مدل رياضي شبيه سازي رسوبگذاري و فرسايش كف كانال فرسايش پذير

محمد حسين حامدي دانشيار دانشكدة مهندسي مكانيك، دانشگاه صنعتي خواجه نصير الدين طوسي
ايرج سعيدپناه دانشجوي دكتراي تخصصي مهندسي هيدروليك، دانشگاه علم و صنعت ايران

چكيده

در اين مقاله مدل يك بعدي جريان غير دائمي با كف فرسايش پذير ارائه ميگردد كه معادلات سن و نان براي جريان آب و معادله پيوستگي براي انتقال رسوب بهطور همزمان توسط روش تفاضل محدود با استفاده از الگوي صريح مك كورمك حل شده اند براي بررسي صحت و ارائه كاربرد مدل، نتايج محاسباتي با دادههاي تجربي مقايسه شدهاند كه بهطو ر قابل قبولي با هم تطابق دارند.

كلمات كليدى: رسوبگذاري، فرسايش، مدل رياضي،كانال.

Mathematical Modeling of Sedimentation and Erosion of Channels

M. H. Hamedi Mechanical Engineering Faculty, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
I. Saeed Panah Hydraulics Department of Civil Engineering, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran

Abstract

Channel erosion or sedimentation will occur, if balance between water and sediment flows, is affected by any natural events or human activities. This will happen if the geometry of channel (area, shape or slope) or the rate of sediment transport change. Therefore, accurate evaluation of erosion and bed-load transport will be very important in river engineering. In this paper an unsteady one-dimensional model with moving bed is presented. The Saint-Venant Equations and the continuity equation of sediment were solved by finite difference method, using McCormak algorithm. The results also compared with experimental information to evaluate the mode. Reasonable agreement was found between the model and experimental results.

Key words: Sedimentation, Erosion, Mathematical modeling, Channel.

۱- مقدمه

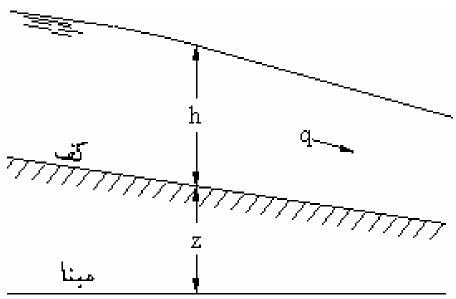
عدم تعادل بين دبي آب، جريان رسوب و شكل كانال موجب فرسايش كف كانال و يا رسوبگذاري مي‌شود. اين چنين عدم تعادلي مي‌تواند در اثر عوامل طبيعي يا ديگر عوامل نظير ساخت يك سد، تغيير در نرخ تأمين رسوب، پايين آوردن كف كانال، جابجايي نقاط تغيير شيب و غيره باشد. يك تخمين قابل اطمينان از فرسايش يا رسوبگذاري در پروژه‌هاي كنترل رودخانه و مديريت منابع آب ضروري است. در اين مقاله يك مدل رياضي يك بعدي، غير دائم با كف قابـل تغيير ارائه مي‌گردد. معـادلات حاكم سن و نان براي جريان آب و معادله پيوستگي براي انتقال رسوب بهطور همزمان توسط الگوي صريح مك كورمك حل مي‌شوند. براي بررسي درستي مدل، نتايج محاسباتي با دادههاي آزمايشگاهي مقايسه مي‌گردند.

۲-پيشينه تحقيق

محققيـن مختلفـي از جملـههـلي (۱۹۸۶)، داودي و ونـوني(۱۹۸۶) و كانج و همكاران (۱۹۸۰) كارهاي انجام شده در مورد مشابهسازي عددي هيدروليك رسوب را مورد بررسي قرار دادند. علاوه بر اين تعدادي حل تحليلي با ساده كردن معادلات تشريح كنندة روند رسوبگذاري و فرسايش ارائه گرديده‌اند. سوني و همكاران (۱۹۸۰) يك مدل خطي پخشي براي پيش‌بيني پروفيل‌هاي گذراي كف به علت افزايش رسوب را مورد استفاده قرار دادند. گيل (۱۹۸۳) معادلة خطي پخشي تشريح كنندة روند رسوبگذاري و فرسايش را با سري فوريه و روشهاي تابع خطا حل كرد. جاراميلو و جين (۱۹۸۴) يك معادله ديفرانسيل جزئي غير خطي بيضوي را توسعه داده و آن را با استفاده از روش باقيماندهها حل كرده و نتايج محاسباتي را با اطلاعات آزمايشگاهي مقايسه كردند. ژانگ و كاهاويتا (۱۹۸۷) و گيل (۱۹۸۷) راه حلهاي غير خطي براي رسوبگذاري و فرسايش ارائه دادند كه نسبت به راه حل‌هاي خطي تطابق بهتري را با اطلاعات آزمايشگاهي نشان دادند.

۳-معادلات حاكم

معـادلات زيــر جـريان غيـر دائـم در يـك كانـال مستطيلـي عريض بـا كف فرسايش پذير شكل (۱) را مشخص ميكنند:



شكل ۱- شكل توصيفي

۱-۳- معادله پيوستگي براي آب

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (۱)$$

۲-۳-معادله منتوم براي آب

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}+\frac{1}{2}gh^2\right)+gh\frac{\partial z}{\partial x}+ghS_f=0 \qquad (۲)$$

۳-۳-معادله پيوستگي جريان براي رسوب

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-p)z+\frac{q_s h}{q}\right]+\frac{\partial q_s}{\partial x}=0 \qquad (۳)$$

كه در آن q دبي آب در واحد عرض، h عمق جريان، z رقوم كف كانال، q_s دبي رسوب در واحد عرض و p تخلخل لايه كف مي‌باشد. دبي رسوب را مي‌توان توسط يك تابع نمايي (۴) تجربي از سرعت جريان تخمين زد.

$$q_s=a\left(\frac{q}{h}\right)^b \qquad (۴)$$

كه در آن a و b ثابتهاي تجربي هستند كه بستگي به خصوصيات رسوب دارد. تحقيقات آزمايشگاهي نشان داده است كه ضريب مانينگ n در شرايط جريان غير يكنواخت در يك كانال رسوبگذار كمتر از مقدارn براي شرايط يكنواخت ميباشد.

قانون مقاومت براي جريان يكنواخت را ميتوان در شرايط جريان غير يكنواخت بهكار برد، بهشرط آنكه از شيب خط انرژي موضعي براي شيب كف استفاده گردد.

۳-۴-الگوي عددي مك كورمك

معادلات (۱) تا (۳) يك دستگاه معادلات ديفرانسيل جزئي هذلولوي غيرخطي را تشكيل ميدهند كه در اين پژوهش با استفاده از الگوي مك كورمك حل عددي مي‌شوند.

اين روش چند مرحلهاي يا روش پيشبيني كننده- تصحيح كننده در دو گام انجام ميشود، به اين صورت كه در گام اول، مقداري موقتي براي متغير وابسته پيشبيني ميشود و به دنبال آن در گام دوم، مقدار تصحيح براي تعيين مقدار نهايي متغير انتخاب ميگردد. بنابراين با استفاده از روش تفاضل محدود پيشرو براي مشتقهاي جزئي مكاني در بخش پيشبيني كننده و تفاضلهاي محدود پسرو در بخش تصحيح كننده، معادلات منفصل شدة زير حاصل مي شوند.

۳-۵- معادلات پيش بيني كننده

$$h_i^* = h_i^h - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(q_{i+1}^k - q_i^k\right)$$
$$q_i^* = q_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\left(q_{i+1}^k\right)^2}{h_{i+1}^k} - \frac{\left(q_i^k\right)^2}{h_i^k} + \frac{g}{2}\left[\left(h_{i+1}^k\right)^2 - \left(h_i^k\right)^2\right]\right\} - gh_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(z_{i+1}^k - z_i^k\right) - gh_i^k\Delta t\frac{\left(q_i^k n\right)^2}{\left(h_i^k\right)^{3.33}}$$
$$z_i^* = z_i^k + \frac{1}{1-p}\left[\left(\frac{q_s h}{q}\right)_i^k - \left(\frac{q_s h}{q}\right)_i^*\right] - \frac{\Delta t}{(1-p)\Delta x}\left[\left(q_s\right)_{i+1}^k - \left(q_s\right)_i^k\right] \qquad (۵)$$
$$\left(q_s\right)_i^* = a\left(\frac{q_i^*}{h_i^*}\right)^b$$

كه در آن بالا نويس * مقادير در انتهاي بخش پيش‌بيني كننده را نشان مي‌دهد، يا به عبارت ديگر علامت * نشان دهندة مقدار موقت متغير وابسته در مرحله زماني جلوتر است.

۳-۶-معادلات تصحيح كننده

$$h_i^{**} = h_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(q_i^* - q_{i-1}^*\right)$$
$$q_i^{**} = q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\left(q_i^*\right)^2}{h_i^*} - \frac{\left(q_{i-1}^*\right)^2}{h_{i-1}^*} + \frac{g}{2}\left[\left(h_i^*\right)^2 - \left(h_{i-1}^*\right)^2\right]\right\} - gh_i^*\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(z_i^* - z_{i-1}^*\right) - gh_i^*\Delta t\frac{\left(q_i^* n\right)^2}{\left(h_i^*\right)^{3.33}}$$

$$z_i^{**} = z_i^* + \frac{1}{1-p}\left[\left(\frac{q_s h}{q}\right)_i^* - \left(\frac{q_s h}{q}\right)_i^{**}\right] - \frac{\Delta t}{(1-p)\Delta x}\left[\left(q_s\right)_i^* - \left(q_s\right)_{i-1}^*\right] \qquad (۶)$$
$$\left(q_s\right)_i^{**} = a\left(\frac{q_i^{**}}{h_i^{**}}\right)^b$$

كه در آن بالا نويس ** مقادير متغيرها پس از مرحله تصحيح كننده را نشان ميدهد.

حال، مقادير مجهولات در مرحله زماني k+۱ (يعني در انتهاي فاصله زماني Δt) به وسيله روابط زير داده ميشوند:

$$h_i^{k+1} = \frac{1}{2}\left(h_i^k + h_i^{**}\right)$$
$$q_i^{k+1} = \frac{1}{2}\left(q_i^k + q_i^{**}\right) \qquad (۷)$$
$$z_i^{k+1} = \frac{1}{2}\left(z_i^k + z_i^{**}\right)$$

با استفاده از الگوريتم ذكر شده، مقادير q, h وz در مرحله زماني جديد k+۱ در هر گره داخلي (i= ۲,…,N) محاسبه ميگردند. مقادير متغيرهاي وابسته q, h و z در گره هاي مرزي ۱ و N+۱ با استفاده از شرايط مرزي محاسبه مي گردند. براي شرايط جريان زير بحراني، بايد دو شرط مرزي در مرز بالا دست و يك شرط مرزي در مرز پايين دست معين باشند. مقادير متغيرهاي وابستهاي كه از طريق شرايط مرزي مشخص نشدهاند را ميتوان از معادلات مشخصه به دست آورد. علاوه بر اين ميتوان، مقادير آنها را از برونيابي مقادير معلوم در گرههاي داخلي محاسبه كرد.

۷-۳-شرط پايداري

براي پايداري بايد الگوي مك كورمك شرط (C_n) را ارضا كند. با توجه به آنكه امواج آب با سرعتي خيلي بيشتر از تغييرات كف حركت ميكنند، اين شرط توسط رابطه زير بيان ميگردد:

$$C_n = \frac{\left(q/h + \sqrt{gh}\right)\Delta t}{\Delta x} \le 1 \qquad (۸)$$

كه در آن C_n عدد كورانت ميباشد. براي پايداري الگو بايد معادله (۸) در هر نقطه شبكه ارضا شود.

۸-۳- لزجت مصنوعي

نوسانات عددي در نزديكي وجوه تيز امواج را مي‌توان با استفاده از لزجت مصنوعي از بين برد. براي چندين حالت مورد مطالعه، هموار كردن فقط براي حالت مهاجرت نقطه تغيير شيب مورد نياز بود.

۴-كاربردها

براي ارائه كاربرد اين مدل، نتايج حل عددي با اطلاعات آزمايشگاهي كه در آزمايشگاه هيدروليك دانشگاه لاوال (كبك-كانادا) در دو حالت مقايسه ميشوند.

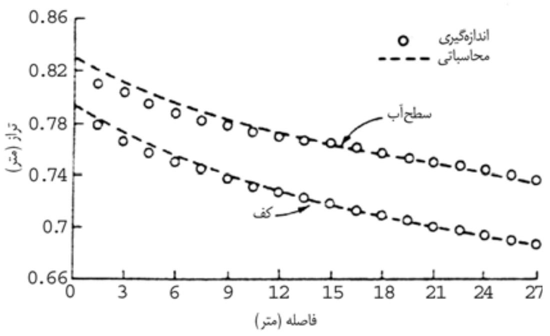
۱-۴- رسوبگذاري به علت افزايش بار رسوب

نتايج آزمايشگاهي در مورد روند رسوبگذاري در يك كانال آزمايشگاهي با نتايج محاسباتي مقايسه شدند. كانال داراي عرض ۰/۲۵ متر و طول ۳۲ متر بود. ماسه تشكيل دهنده كف و مصالح تزريق شده داراي قطر متوسط ۰/۳۳ ميليمتر بودند. از اندازه گيريهاي جريان يكنواخت مقادير ذكر شده زير محاسبه گرديدند: $a=۱/۳۵\times۱۰^{-۳}$ ، $b = ۶$ ، ضريب n معادل ۰/۰۲۳ ، و تخلخل لايه رسوب كف، p مساوي ۰/۵. براي نتايج ارائه شده در اينجا، دبي اوليه آب، q_0 معادل ۰/۰۳ متر مكعب بر ثانيه در واحد عرض، عمق يكنواخت جريان h_0 معادل ۰/۰۶ متر، شيب اوليه كف، S_o مساوي ۰/۰۰۳۶۷ و دبي تعادلي رسوب، q_{s0} مساوي ۵ متر مكعب بر ثانيه در واحد عرض بود. در مدل رياضي، دبي واحد يكنواخت، عمق جريان يكنواخت و ترازهاي اوليه كف به عنوان شرايط اوليه در هر گره مشخص شدند. شرايط گذرا با افزايش نرخ دبي رسوب در انتهاي بالا دست بهاندازه Δq_s آغاز شد. يك شرط مرزي در انتهاي پايين دست و دو شرط مرزي در انتهاي بالادست مشخص شدند. مرز بالادست كه بيان كننده دبي واحد ثابت بود با $q(0,t)= q_o$ براي $t \ge 0$ مشخص شد. البته، گنجاندن مرز دوم $q_s(0,t)= q_{so} + \Delta q_s$ به سادگي مرز اول نبوده و بايد در قالب معادلهاي كه رقوم كف در انتهاي بالا دست از روي آن قابل محاسبه باشد، بيان گردد. اين امر با فرض يك گره فرضي در بالادست گره ۱ و مشخص كردن دبي رسوب در اين گره معادل $q_{so}+ \Delta q_s$ انجام ميگيرد. با استفاده از معادله پيوستگي جريان رسوب و اعمال تفاضل محدود پسرو براي مشتقهاي مكاني، خواهيم داشت:

$$\left[(1-p)z + \frac{q_s h}{q}\right]_1^{k+1} = \left[(1-p)z + \frac{q_s h}{q}\right]_1^{k} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(q_{so} + \Delta q_s) - (q_s)\right]_1^k \qquad (۹)$$

سمت چپ معادله (۹) و بنابراين z در مرحله زماني مجهول k+۱ را مي‌توان محاسبه كرد، زيرا عبارتهاي سمت راست براي مرحله زماني k، معلوم هستند. عمق جريان در گره يك از معادله مشخصه با استفاده از دبي معلوم در مرز، محاسبه مي‌گردد. شرط مرزي عمق ثابت در پايين دست به وسيله $h(N\Delta x,t) = h_0$ براي $t \ge 0$ مشخص شد. دبي و تراز كف در انتهاي پايين دست با برون‌يابي مقادير گره‌هاي داخلي محاسبه مي‌شوند. دقت شود كه شرط مرزي عمق ثابت براي كانالهاي طولاني كه در آنها ناپايداريهاي كف در طول مدت محاسبه به انتهاي پايين دست نميرسند، صادق مي‌باشد. اين شرط مرزي براي جريانهاي سيلابي و براي كانالهاي كوتاه صادق نيست. مقادير مرزي در اين حالتها را ميتوان بهوسيله روش مشخصه بههمراه يك منحني تراز - دبي به عنوان شرط مرزي معين شده، محاسبه كرد. مدل رياضي براي يك كانال با طول ۶۰ متر كه به ۶۰ بازه تقسيم شده بود $(\Delta x=1m)$ استفاده شد. گام زماني محاسباتي، Δt، بهصورتي انتخاب شد كه شرط كورانت براي پايداري $(C_n=۰/۹)$ ارضا شود. شكل (۲) پروفيلهاي گذراي كف و سطح آب محاسبه شده در t= ۳۵ دقيقه را با مقادير اندازهگيري شده مقايسه ميكند. نقاط اندازهگيري شده در اينجا مربوط به پروفيلهاي گذراي متوسط ميباشند. متوسطگيري از اطلاعات واقعي به علت

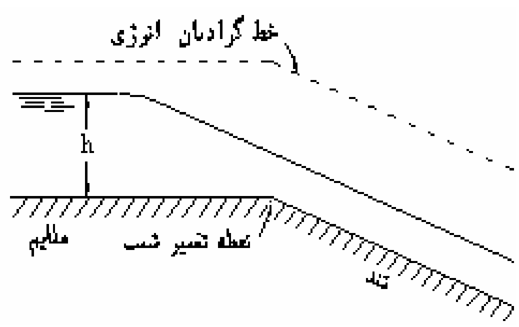
وجود ريپلها و ديونها در كف، لازم است. همانگونه كه مشاهده ميشود، مدل رياضي به طور قانع كنندهاي رسوبگذاري كف كانال و پروفيلهاي گذراي سطح آب را مشابهسازي ميكند.



شكل ۲- مقايسه پروفيلهاي محاسبه شده و اندازه گيري شده كف و سطح آب

۴-۲- مهاجرت نقطه تغيير شيب

يك نقطه تغيير شيب بهعنوان يك تغيير ناگهاني در پروفيلهاي طولي كف يك كانال تعريف ميشود شكل (۳). در يك كانال با كف غير آبرفتي، يك نقطه تغيير شيب دائماً بدون تغيير باقي ميماند. اما در كانالهايي كه جريان روي كف آبرفتي وجود دارد، نقاط تغيير شيب در حين مهاجرت آنها به سمت بالا دست محو ميشوند. با توجه به شكل (۳) جريان در بالا دست نقطه تغيير شيب زير بحراني و در پايين دست آن فوق بحراني ميباشد.



شكل ۳- شكل توصيفي براي مهاجرت نقطه تغيير شيب

تنش پيراموني ($\tau_0 = \gamma h S_f$) در محل شكستگي شيب كف حداكثر بوده، در پايين دست همراه با كاهش عمق جريان، كاهش مي‌يابد و هم چنين در بالادست نقطه تغيير شيب همراه با هموار شدن خط گراديان انرژي و با وجود بالاتر بودن عمق جريان كاهش مييابد. با توجه به آن كه انتقال رسوب مستقيماً متناسب با تنش برشي مي‌باشد، تنش برشي بيشتر در نقطه تغيير شيب منجر به انتقال مواد بيشتري از اين محل نسبت به بازههاي بالا دست و پايين دست ميشود. بنابراين نقطه تغيير شيب به سمت بالادست مهاجرت كرده، مواد فرسايش يافته در پايين دست نشست كرده و نهايتاً بازه خيلي تيز شده هموار مي‌شود.

نتايج آزمايشگاهي به دست آمده در يك فلوم به طول ۱۵/۸ متر و عرض ۱/۲ متر با نتايج محاسباتي مقايسه گرديد. قبل از آزمايش، يك كانال ذوزنقهاي به عرض ۰/۲۳ متر با گوشههاي مدور در ماسههاي غير چسبنده با اندازه متوسط ۰/۶۵ ميليمتر ايجاد شد. يك آبشار تقريباً ۰/۰۴۰۵ متري در فاصله ۱۱/۲ متري از انتهاي بالادست ايجاد شد تا بازه خيلي تيز شده يا نقطه تغيير شيب را مشابهسازي كند. شيب كانال در بالادست و پايين دست اين نقطه تقريباً مساوي ۰/۰۰۱۳۵ بود. سپس آب جريان پيدا كرده (q_o = ۰/۰۰۳ متر مربع بر ثانيه و h_o = ۰/۰۳۰۹ متر) و ترازهاي كف در زمانهاي متوالي ثبت گرديدند.

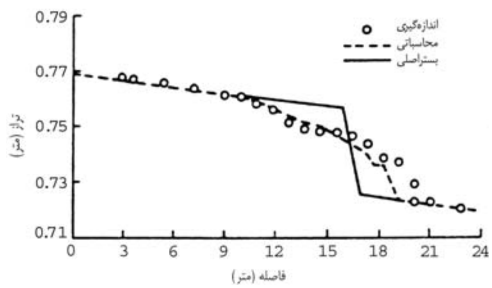
براي مشابه سازي اين آزمايش به وسيله مدل رياضي، كانال به ۶۲ بازه تقسيم شد (ΔX = ۰/۳۰۴۸ متر). شرايط اوليه و مرزي مانند حالت قبل در نظر گرفته شدند؛ عدد كورانت ۰/۸ بود. دبي رسوب از معادله (۴) محاسبه شد، يك مقدار $b = ۴$ استفـاده شد و ضريب a به عنوان تابعي از گراديان خط انرژي، S_e، فرض گرديد. در شروع محاسبات براي هر مرحله زماني جديد، شيب خط گراديان انرژي در هر نقطه شبكه با استفاده از تفاضل محدود پسرو و مقادير q ، h و z در مرحله زماني معلوم، محاسبه گرديد.

$$S_e = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(z_{i-1} + h_{i-1} + \frac{q_{i-1}^2}{2g h_{i-1}^2}\right) - \left(z_i + h_i + \frac{q_i^2}{2g h_i^2}\right)\right] \qquad (۱۰)$$

سپس مقدار a از $a = S_e^{1.71}$ محاسبه شد. توانها در معادله (۴) از اندازهگيريهاي انتقال رسوب (بروش و ولمن ۱۹۶۰)

برآورد شدند. در هر دو آزمایش شرایط مساوي بود، مگر براي شیب کانال، و تفاوت در نرخ انتقال رسوب که مي توانست به شیب خط گرادیان انرژي به وسیله یك قاعده تواني مربوط شود.

در شکل (۴) نتایج محاسباتي و اندازه‌گیري شده در t =۲/۳۶ ساعت مقایسه شده‌اند. پروفیل کف محاسبه شده بطور قابل قبولي با پروفیل کف اندازه‌گیري شده، تطابق دارد. همانگونه که میتوان از شکل (۴) مشاهده نمود، تراز کف پایین دست در آزمایش، بالاتر از مقدار پیشبیني شده توسط مدل میباشد، اگرچه حجم فرسایش پیشبیني شده بالادست تقریباً مساوي نشست در طرف پایین دست میباشد. در آزمایشها عریض شدن کانال در طرف پایین دست نقطه تغییر شیب مشاهده شد و رسوبگذاري بیشتر در آزمایشات ممکن است به علت رسوب اضافي ایجاد شده در اثر فرسایش سواحل باشد.



شکل ۴- تغییر تراز کف در اثر مهاجرت نقطه تغییر شیب

۵- نتیجه‌گیري

با توجه به تجزیه و تحلیل دادهها تطابق مناسب نتایج حل عـددي بـا نتایـج آزمایشگاهي انجام شده توسط محققین، اشکال(۲) و (۴) توانایي عالي مدل ریاضي ارائه شده جهت شبیهسازي رسوبگذاري و فرسایش کف کانال فرسایشپذیر را مورد تأیید قرار میدهد علاوه بر این استفاده از الگوي مك کورمك به عنوان یك حل عددي توانا، با عنایت به نتایج مناسب حاصل از آن در این پژوهش، جهت تحقیقات عددي هیدرولیك رسوب توصیه مي‌گردد.

به ازاي مقادیر بالاي عدد کورانت خطا کمترین مقدار است یعني هنگامي که عدد کورانت به یك نزدیك میشود، بنابراین بهترین جواب مربوط به اندازه گامي است که عدد کورانت آن یك یا نزدیك به یك است. در این پژوهش در جهت نیل بهبهترین نتایج عددي با توجه به ملاحظات کمترین مقدار خطا و رسیدن به همگرایي حداکثر کوشش بهعمل آمده، که نزدیکترین عدد به یك را انتخاب کنیم که با توجه به تجزیه و تحلیل دادهها تطابق مناسب دارد.

نمادها

q	دبي آب در واحد عرض
h	عمق جریان
z	رقوم کف کانال
q_s	دبي رسوب در واحد عرض
p	تخلخل لایه کف
a	ثابت تجربي
b	ثابت تجربي
n	ضریب مانینگ
Δt	گام زماني
Δx	گام مکاني
k	مرحله زماني
C_n	عدد کورانت
S_0	شیب اولیه کف
q_{s0}	دبي تعادلي رسوب
h_0	عمق یکنواخت جریان
q_0	دبي اولیه اب
Δq_s	افزایش نرخ دبي رسوب
N	شماره گره
S_e	شیب حط انرژي
t	زمان
g	شتاب ثقل

مراجع

[1] Bhallamudi, S.M. and Chaudhry, M. H. (1991). “ Numerical modeling of agradation and degradation in alluvial channels.” Jour. Hydraulic Engineering. Amer. Soc. Civil Engrs. 117, no. 9:1145-64.

[2] Cunge, J. A.; Holly, F. M. Jr; and Verway, A. (1980). “ Practical aspects of computational river hydraulics.” Ritman, London.

[3] Dawdy, D. R. and vanoni, V. A. (1986). “ Modeling alluvial channels.” Water resources research, 22, no. 9:71S-81S.

[4] Gill M. A. (1983). “Diffusion model for agrading channels.” Jour. Hydraulic Research, Inter. Assoc. Hydraulic Research, 21, no. 5:369-78.

[5] Jain, S. C. and Park, I. (1989). “Guide for estimating riverbed degradation.” Jour. Hydraulic Engineering, Amer. Soc. Civil Engrs. 107, no. 1:120-24.

[6] aramillo, W. F. and Jain (1984). “Aggradation and degradation of Engrs.” 110, no. 8:1072-85.

[7] Lyn, D. A. (1987). “Unsteady sediment transport modeling.” Jour. Hydraulic Engineering, American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper. 65-354.

[8] Roberson, J. A. (1988), “ Hydraulic engineering.” Houghton Mifflin, Boston.

[9] ark, I., and Jain, S. C. (1986), “River-bed profiles with imposed sediment load.” Jour. Hydraulic Engineering, Amer. Soc. Civil Engrs. 112, no. 4:267-79.

[10] Brush and Wolman (1960), “Knickpoint behavior in noncohensive material.” A Laboratory Study, Bulletin of the Geological Society of America, 71:58-74.