روش جدید حل معادلات سیستم‌های مکانیکی درمسائل معکوس و حذف خطا

محمدحسن حجتی دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی (نوشیروانی) بابل

چکیده

تحلیل سیستمهای مکانیکی معمولاً به مجموعه‌ای از معادلات منجر می‌گردد که باید به طور همزمان حل شود. با توجه به ویژگی‌های سیستم‌های واقعی، این مجموعه معادلات ترکیبی از دستگاه معادلات خطی و تعداد محدودی معادلات غیر خطی می‌باشد و در نتیجه مجموع دستگاه معادلات غیر خطی است. روش‌های فعلی حل این معادلات مانند روش نیوتن- رافسون، تفاوتی بین بخش خطی و غیر خطی قائل نشده و همه را به طور یکجا به صورت غیر خطی حل می‌کند که امکان بروز مشکلاتی در زمینه همگرایی روش وجود دارد. در این مقاله روش جدیدی برای حل مجموعه معادلات سیستم ارائه می‌شود که بر اساس تقسیم مجموعه معادلات به دو بخش خطی و غیر خطی استوار است. بخش خطی که صرفاً بر حسب تعداد مشخصی از متغیرها خطی است با فرض مقادیر اولیه‌ای برای متغیرهای غیر خطی و بدون نیاز به روش‌های مبتنی بر تکرار حل می‌شود. بخش غیر خطی بر مبنای یک فرمول جدید برای نمو متغیرهای غیر خطی و به روش تکراری حل می‌شود. این فرمول بر اساس بسط رشته تایلور به دست می‌آید. نمونه موردی این تحقیق موضوع تعیین مدول یانگ با استفاده از میزان خیز جانبی در چند نقطه از یک تیر خمشی تحت خمش خالـص است. از آنجا که مقادیر اندازه‌گیری شده دارای خطا می‌باشد، مقاله حاضر روش جدیدی برای فیلتر و حذف کردن خطاهای موجود در اندازه‌گیری و بطور همزمان شناسایی و تعیین مشخصه‌های نامعلوم سیستم پیشنهاد می‌نماید. با توجه به استفاده روش پیشنهادی از جبر ماتریس‌ها در حذف خطا، قابلیت اجرای کامپیوتری آن ساده و سریع می‌باشد. نشان داده می‌شود که اولاً روش پیشنهادی در حل معادلات غیر خطی کارا و موثر است، به تعداد حدس‌های اولیه کمتری نیاز دارد و همگرایی آن نیز بسیار خوب است. کاربرد ماتریس فیلتر کننده به حذف خطا از داده‌ها منجر گردید و مقدار به دست آمده برای مدول کشسانی تیر در موافقت بسیار خوب با مقادیر مورد انتظار است.

کلمات کلیدی: حل معادلات غیر خطی، مسایل معکوس، خطا، خطازدایی، ماتریس فیلتر کننده، اندازه‌گیری تجربی.

A New Method for the Solution of Equations of Mechanical Systems in Inverse Problems and Data Filtering

M. H. Hojjati Faculty of Mechanical Engineering, Babol University of Technology

Abstract

Analysis of mechanical systems usually leads to the solution of a set of simultaneous equations. Very often these equations can be classified as a combination of a group of linear equations in terms of some selected variables and a group of nonlinear equations. This paper presents a new method for the solution of these equations. The method uses any non-iteration technique suitable for the solution of linear group. The nonlinear group, however, is solved by a new formula for the nonlinear variable increments in consecutive iterations. This is based on Taylor series expansion. It is shown that the method is effective with good rate of convergence and needs less number of initial approximations compared with those needed in Newton-Raphson method. The paper also presents a method for removing errors from measured data. The method creates a matrix filter based on the available information about the system involved. These two methods have been described in a simple case study of a simple beam under pure bending. The results of simultaneous identification of modulus of elasticity and removing of errors from measured lateral deflections of the beam prove the effectiveness and accuracy of the proposed methods.

Key words: Nonlinear systems, Inverse problems, Data filtering, Experimental measurements, Matrix filter.

۱- مقدمه

تحلیل اغلب سیستم‌های مهندسی بویژه در مهندسی مکانیک مستلزم حل همزمان دستگاه معادلات است. این معادلات به صورت معادلات حالت، معادلات حرکت، معادلات پیوستگی، شرایط اولیه یا مرزی و نظایر آن می‌باشند. در بسیاری موارد بویژه در هنگام استفاده از روش‌هایی مانند روش اجزای محدود، تفاضل‌های محدود یا در کاربرد برخی روش‌های حذف خطا [۶-۱] دستگاه معادلات، مرکب از تعداد زیادی معادلات خطی می‌باشد که با تعداد محدودی معادلات غیر خطی که معمولاً از شرایط اولیه یا مرزی ناشی می‌شود همراه است. معمولترین روش موجود در حل این معادلات، روش نیوتن- رافسون [۱۰-۷] است که مجموعه معادلات را به صورت دستگاه معادلات غیر خطی در نظر گرفته و حل می‌نماید. علیرغم این که روش نیوتن- رافسون روش قابل اعتمادی می‌باشد، در مواردی که معادلات رفتار خوبی نداشته و تخمین‌های اولیه از جواب‌های معادلات دور باشد امکان واگرایی حل وجود دارد [۱۰-۷]. علاوه بر آن، این روش مستلزم تعداد زیادی تخمین اولیه (به تعداد متغیرهای مجهول) است که همواره امکان تخمین صحیح همزمان برای آ نها وجود ندارد. روش معرفی شده در این مقاله، معادلات سیستم را به دو گروه تقسیم می‌کند. گروه اول معادلاتی است که بر حسب تعدادی از متغیرها خطی است. گروه دوم معادلاتی است که بر حسب همه یا بخشی از متغیرها غیر خطی می‌باشد. بخش خطی با استفاده از یکی از روش‌های مناسب برای سیستم‌های خطی و بدون نیاز به روش‌های مبتنی بر تکرار حل می‌شود. بدیهی است حل این معادلات خطی به مقادیر تخمین اولیه برای متغیرهای غیر خطی نیاز دارد. این تعداد تخمین اولیه به میزان قابل توجهی از تعداد مورد نیاز در روش نیوتن- رافسون کمتر است. بخش غیر خطی معادلات بر مبنای یک فرمول جدید برای نمو متغیرهای غیر خطی و به روش تکراری حل می‌شود. این فرمول بر اساس بسط رشته تایلور به دست می‌آید. جزئیات این روش که بطور موفقیت‌آمیز توسط حجتی و لوکوزویچ [۱۱] در حل دستگاه معادلات تحلیلی بکار رفته است در بخش بعدی آورده شده است.

یکی از مواردی که حل سیستم‌های مکانیکی به تعداد زیادی معادلات خطی و تعداد زیادی معادلات غیر خطی منجر می‌شود، مسائل معکوس و مشخص‌سازی سیستم و نیز حذف خطا از مقادیر اندازه‌گیری یا محاسبه شده برخی پارامترهای سیستم است. در بسیاری کاربردهای عملی از مقادیر اندازه‌گیری شده تجربی برای تعیین برخی پارامترهای سیستم استفاده می‌شود. از جمله می‌توان به استفاده از دمای نقاط مختلف یک جسم برای تعیین گرمای ویژه یک ماده [۸]، تعیین ضخامت بخش‌های مختلف یک ماده مرکب چند لایه [۱۲] و یا استفاده از خیز جانبی یک محور برای تعیین ضریب کشسانی یا صلبیت خمشی آن اشاره نمود.

۲- تئوری

در این بخش ابتدا اساس روش پیشنهادی برای حل معادلات سیستم خطی- غیر خطی تشریح می‌شود و سپس به تئوری مربوط به حذف خطا از داده‌های تجربی و ایجاد ماتریس فیلتر کننده پرداخته می‌شود.

الف: روش جدید حل دستگاه معادلات

در بسیاری موارد معادلات سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1,\ldots x_m,t_1\ldots t_n)=0,\\
&f_2(x_1,\ldots x_m,t_1\ldots t_n)=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_m(x_1,\ldots x_m,t_1\ldots t_n)=0\\
&\phi_1(x_1,\ldots x_m,t_1\ldots t_n)=0,\\
&\phi_2(x_1,\ldots x_m,t_1\ldots t_n)=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\phi_n(x_1,\ldots x_m,t_1\ldots t_n)=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

در معادلات فوق، با فرض معلوم بودن متغیرهای غیر خطی t_j ($j=1$ to n)، دسته معادلات f_i ($i=1$ to m) بر حسب متغیرهای x_i ($i=1$ to m) خطی می‌باشند. یعنی بازای هر مقدار تخمینی برای t_j می‌توان دسته معادلات f_iرا با استفاده از

یکی از روش‌های مناسب برای سیستم‌های خطی و بدون نیاز به روش‌های مبتنی بر تکرار حل نموده و متغیرهای $\boldsymbol{x_i}$ را تعیین کرد. با دوباره‌نویسی سیستم معادلات فوق به صورت ماتریسی داریم:

$$f(x,t)=0,$$
$$\phi(x,t)=0$$

(۲)

که f بردار معادلات خطی بر حسب متغیرهای x و ϕ بردار معادلات غیر خطی است. مقادیر جواب اولیه برای مجموعه معادلات را x و t می‌نامیم که به روش فوق بدست می‌آیند. فرض می‌کنیم که $x+\Delta x$ و $t+\Delta t$ تقریب‌های بهتری از جواب باشد. با استفاده از بسط رشته تایلور معادلات فوق داریم:

$$\phi(x+\Delta x,t+\Delta t)=\phi(x,t)+\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t=0$$

(۳)

$$f(x+\Delta x,t+\Delta t)=f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t=0$$

دو معادله زیر را می‌توان از معادلات فوق استخراج نمود:

$$\phi(x,t)+\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t=0 \qquad (۴)$$

$$f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t=0 \qquad (۵)$$

اگر معادله(۵) را برای Δx حل کنیم داریم:

$$\Delta x=-\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^{-1}\left[f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right] \qquad (۶)$$

با جایگزینی این مقدار در معادله (۴) و حل آن برای Δt رابطه زیر را برای نمو متغیرهای غیر خطی داریم:

$$\Delta t=-\left[I-(\frac{\partial\phi}{\partial t})^{-1}(\frac{\partial\phi}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial x})^{-1}(\frac{\partial f}{\partial t})\right]^{-1}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]^{-1}[\phi(x,t)]$$

(۷)

در رابطه فوق I ماتریس قطری واحد با مرتبه n است. روش پیشنهادی به این طریق عمل می‌کند که با یک فرض اولیه t_0 مقدار x را از حل بخش خطی و بدون نیاز به تکرار حل می‌کند. سپس با استفاده از معادله (۷)، Δt بدست آمده و با جایگزینی $t_0+\Delta t$ مقادیر جدید x محاسبه می‌شود. این روش ادامه می‌یابد تا شرط همگرایی زیر تامین شود:

$$\max\left|\Delta x_i\right|\le\delta \text{ و } \max\left|\Delta t_j\right|\le\delta \qquad (۸)$$

δ عدد کوچکی است که با توجه به دقت مورد نظر در حل معادلات سیستم انتخاب می‌شود.

ب: فیلتر کردن و مشخص کردن سیستم

یکی از روش‌های شناسابی سیستم‌ها استفاده از مقادیر اندازه‌گیری شده برخی متغیرهای حالت سیستم می‌باشد. با توجه به طبیعت و نوع روش بکار گرفته شده در اندازه‌گیری و نیز تجهیزات مصرفی، داده‌های تجربی دارای میزانی خطا می‌باشند. موضوع خطازدایی یا فیلتر نمودن خطا از اندازه‌گیری‌های تجربی در منابع مختلف مورد بررسی قرار گرفته و از ادبیات تحقیق نسبتاً گسترده‌ای برخوردار است. از این میان می‌توان به روش‌هایی نظیر روش حداقل مربعات، توابع spline، توابع جریمه و الگوریتم‌های خاص اجزای محدود اشاره نمود [۱۵-۱۳]. همانطور که نشان داده خواهد شد، روش پیشنهادی این مقاله که مبتنی بر ایجاد یک ماتریس خاص فیلتر کننده قرار دارد دارای چند ویژگی ممتاز نسبت به روش‌های سنتی است. این روش از ریاضی و منطق ساده و قابل فهمی برخوردار است و تصحیح خطا در آن بر اساس میزان دانش و اطلاع از سیستم مورد مطالعه صورت می‌گیرد. هر چه این اطلاعات بیشتر باشد، خطازدایی با دقت بهتری صورت خواهد گرفت و بدین ترتیب تصحیح خطا به رفتار فیزیکی سیستم بستگی داشته و یک عمل صرفاً ریاضی نمی‌باشد. با توجه به استفاده روش از جبر ماتریس‌ها، پیاده‌سازی و اجرای آن در کامپیوتر بسیار ساده و عملیات سریع صورت می‌گیرد. تصحیح خطا در این روش به هیچ گونه پیش‌بینی از میزان تقریبی خطا نیاز ندارد. روش پیشنهادی عمومیت دارد و امکان

کاربرد آن در اغلب زمینه‌های مهندسی و علوم وجود دارد. کاربرد روش تعمیم یافته آن به صورت ماتریس تطبیقی در "مسائل معکوس" و "مشخص‌سازی سیستم" که در این مقاله و برای تعیین ضریب کشسانی یک تیر خمشی با استفاده از خیز جانبی آن بکار می‌رود، امکان پرهیز از کاربرد روش‌های سنتی که در معرض مشکلات مربوط به همگرایی هستند را فراهم می‌آورد. در حل معادلات سیستم از روش جدید پیشنهادی پیش گفته شده استفاده خواهد شد.

فرض می‌کنیم که یک یا چند پارامتر یک سیستم مورد اندازه‌گیری قرار گرفته که برای سهولت آنها را با بردار $\left[u^*\right]$ نمایش می‌دهیم که دارای n عضو می‌باشد. اندازه‌گیری می‌تواند در نقاط مختلف، در زمان‌های متفاوت و از خواص مختلف صورت گیرد. هدف کلی تصحیح این داده‌ها و به دست آوردن بردار جدید $\left[u\right]$ می‌باشد که همان متغیرهای اندازه‌گیری شده بعد از تصحیح و خطازدایی می‌باشد. مجموعه عملیاتی که باعث تبدیل $\left[u^*\right]$ به $\left[u\right]$ می‌شود را عمل خطازدایی یا فیلتر کردن داده‌ها می‌نامیم. روش ماتریس فیلتر کننده ابتدا توسط لوکوزویچ [۱] پیشنهاد و سپس توسط حجتی و لوکوزویچ جهت کاربرد در مسائل معکوس توسعه یافت [۶-۲]. خلاصه‌ای از مبانی روش پیشنهادی در زیر ارائه می‌شود.

عمل فیلتر کردن بر اساس اطلاعات اضافی که در مورد سیستم وجود دارد صورت می‌گیرد که می‌تواند به صورت‌های مختلف بروز نماید. گاه این اطلاعات به صورت معادله تعادل سیستم، معادله پیوستگی یا معادله سازگاری هندسی آن است و گاه نیز به صورت برخی شرایط اولیه یا مرزی خاص، شرط تقارن یا نظایر آن ظاهر می‌شود. فرض می‌کنیم که این اطلاعات به صورت کلی زیر تعریف شود:

$$P(u,t)=0 \qquad (۹)$$

که P در معادله فوق می‌تواند یک تابع یا اپراتور دیفرانسیل مشخص باشد که فرض می‌شود باید m مرتبه ارضا شود. در صورتی که یک یا چند معادله از m معادله فوق دارای اپراتور دیفرانسیل باشد با بکارگیری روش تفاوت‌های محدود یا اجزای محدود آن را جایگزین می‌نماییم. با استفاده از روش حداقل مربعات و ضرایب لاگرانژ مقدار خطای کلی (R) در محدوده مورد مطالعه (مکانی، زمانی) به صورت ماتریسی زیر قابل بیان می‌باشد که در آن بالا نویس T برای تعریف ترانهاده ماتریس استفاده شده است:

$$R=\frac{1}{2}\left[u-u^*\right]^T\left[u-u^*\right]+\lambda^T.P \qquad (۱۰)$$

معادله (۱۰) دارای n مجهول $\left[u\right]$ و m مجهول $\left[\lambda\right]$ می‌باشد. در صورتی که یک یا چند متغیر سیستم یعنی x_k $(k=1,2,...,l)$ که در معادله فوق ظاهر می‌شوند نیز مجهول باشد، جمع مجهولات در معادله (۱۰) به $m+n+l$ می‌رسد. برای دستیابی به این مجهولات از این حقیقت ساده استفاده می‌شود که مشتق R نسبت به هر یک از مجهولات باید صفر باشد یعنی:

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u_i}=0 \qquad i=1,2,..., n \qquad (۱۱\text{-الف})$$

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \lambda_j}=0 \qquad j=1,2,..., m \qquad (۱۱\text{-ب})$$

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_k}=0 \qquad k=1,2,..., l \qquad (۱۱\text{-ج})$$

این کار منجر به دستیابی به $m+n+l$ معادله و $m+n+l$ مجهول می‌شود که حل همزمان آنها منجر به تعیین مقادیر تصحیح شده $\left[u\right]$، ضرایب لاگرانژ $\left[\lambda\right]$ و متغیرهای مجهول سیستم $\left[x_k\right]$ می‌شود. در حل مجموعه معادلات از روش تفکیک آن به دو گروه خطی و غیر خطی ارائه شده در این مقاله استفاده می‌شود.

با توجه به آنکه معادله (۱۱ـ ج) معمولاً به صورت غیر خطی ظاهر می‌شود، ابتدا و با فرض آن که متغیرهای سیستم همگی مشخص هستند معادلات اول و دوم در (۱۱) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر بیان نمود [۴]:

$$Iu+N\lambda=u^* \qquad (۱۲\text{-الف})$$

$$N^Tu=F^* \qquad (۱۲\text{-ب})$$

در این معادلات، $N_{(n\times m)}$ ماتریس سیستم و $F^{*}{}_{(m\times 1)}$ برداری است که هر دو حاوی اطلاعات ارائه شده در مورد سیستم مورد مطالعه می‌باشند. I بردار واحد $n\times n$ و N^T ترانهاده ماتریس N است. حل مجموعه معادلات ماتریسی فوق برای u و λ معادلات زیر را نتیجه خواهد داد.

$$\lambda = \left(N^T N\right)^{-1}\left(N^T u^* - F^*\right) \tag{۱۳}$$

$$u = \left(I - N\left(N^T N\right)^{-1}\right)u^* + N\left(N^T N\right)^{-1} F^* \tag{۱۴}$$

ضریب $\left(I - N\left(N^T N\right)^{-1}\right)$ در معادله (۱۴) را ماتریس فیلتر کننده می‌نامیم. همانطور که مشخص است این عبارت فقط به مشخصات سیستم یعنی ماتریس N بستگی دارد و در نتیجه در صورت مشخص بودن سیستم، فقط به یک بار محاسبه نیاز دارد و هر مجموعه از داده‌های تجربی u^* را می‌توان با استفاده از معادله (۱۴) فیلتر نموده و خطازدایی کرد. چگونگی عملیات تعیین همزمان متغیرهای نامعلوم و حذف خطا در مطالعه موردی زیر تشریح شده است.

۳- مطالعه موردی

یک تیر فولادی یکنواخت به طول $۶۰۰mm$، ضخامت $۵mm$ و پهنای $۵۰mm$ که تحت خمش خالص به میزان $۱۰۰۰۰N.mm$ قرار دارد به عنوان مطالعه موردی انتخاب گردیده است. علاوه بر خطازدایی از مقادیر خیز جانبی، مدول کشسانی تیر نیز مجهول فرض شده است و برنامه باید به طور همزمان نسبت به حذف خطا اقدام نموده و مقدار مناسب برای ضریب کشسانی تیر را تخمین بزند. اطلاعاتی که در مورد این سیستم وجود دارد این است که اولاً معادله اویلر باید به عنوان شرط تعادل برقرار باشد یعنی:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_0 \tag{۱۵}$$

که در آن E ضریب کشسانی، I لنگر لختی سطح مقطع تیر، y خیز جانبی و M_o لنگر خمشی ثابت اعمالی به تیر می‌باشد. ثانیاً مقادیر خیز جانبی روی دو تکیه‌گاه ساده در طرفین طول تیر باید صفر باشند. یک شبکه تفاوت محدود با فقط ۹ گره که در فاصله‌های مساوی در طول تیر قرار دارند در نظر گرفته می‌شود. گره شماره ۱ در تکیه‌گاه چپ و گره شماره ۹ در تکیه‌گاه راست تیر قرار دارند.

شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$u_1 = 0 \qquad u_9 = 0 \tag{۱۶}$$

با استفاده از معادله (۱۵) و جایگزینی مشتق مرتبه دوم با بیان تفاوت محدودی آن داریم:

$$u(x+\Delta x) - 2u(x) + (\Delta x)^2.\frac{M_o}{EI} = 0 \tag{۱۷}$$

با استفاده از نماد

$u(x) = u_i$ و $u(x\pm\Delta x) = u_{i\pm 1}$

داریم:

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -(\Delta x)^2.\frac{M_o}{EI} \tag{۱۸}$$

معادله (۱۸) را می‌توان برای کلیه گره‌های داخلی (یعنی i=۲، ۳،...،۸) نوشت. ترانهاده ماتریس F^* به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد:

$$[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0]\, F^{*T} = \mathrm{b}$$

که در آن $b = -(\Delta x)^2.\dfrac{M_o}{EI}$ می‌باشد. ماتریس N نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه اعمال معادلات (۱۱)، ۱۹ معادله و ۱۹ مجهول بدست می‌آید. ۱۹ مجهول عبارت از ۹ مقدار تصحیح شده خیز $[u]$، ۹ ضریب لاگرانژ $[\lambda]$ و مقدار مدول کشسانی تیر E می‌باشند. باید توجه نمود که هر چند کلیه معادلات غیر خطی می‌باشند اما ۱۸ معادله اول ناشی از معادلات (۱۱ـ الف) و (۱۱ـ ب) نسبت به $[u]$ و $[\lambda]$ خطی هستند. با استفاده از روش پیشنهادی جداسازی بخش خطی و غیر خطی و با در نظر گرفتن E به عنوان تنها متغیر غیر خطی می‌توان معادلات را بشرح زیر به دو بخش خطی و غیر خطی تفکیک کرد. در بخش خطی داریم:

$$f(u,\lambda,\mathrm{E}) = Ax - B = 0 \tag{۱۹}$$

که در آن:

$$A=\begin{bmatrix} I & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$x=[u_1\ u_2 \ldots u_9,\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_9]^T$$

$$B=\begin{bmatrix} u^* \\ F^* \end{bmatrix}$$

تنها معادله غیر خطی عبارت است از:

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{E}} = \phi_1(u,\lambda,\mathrm{E})$$

$$=(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^T\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial E}+\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T}{\partial E}(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{u}-\boldsymbol{F}^*)+\boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{N}^T\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial E}-\frac{\partial \boldsymbol{F}^*}{\partial E})=0$$

باجایگزینی روابط زیر در معادله (۷) معادله لازم جهت نمو تنها متغیر غیر خطی در تکرارهای متوالی بدست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{E}} = -\frac{\partial B}{\partial \mathrm{E}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathrm{E}}$$

۴- ارائه نتایج و بحث پیرامون آن

جدول شماره (۱) مقادیر نظری خیز جانبی را در محل نه گره انتخابی در طول تیر نشان می‌دهد که با استفاده از تئوری خمش تیرها در محدوده کشسانی و با استفاده از E= ۲۰۰ GPA برای مدول کشسانی فولاد محاسبه گردیده است. جهت نشان دادن توانایی‌های روش پیشنهادی سه رشته داده به عنوان مقادیر خیز تیر در نظر گرفته می‌شود. رشته اول از مقادیر نظری به عنوان u^* استفاده می‌کند. نتایج بدست آمده پس از حل معادلات سیستم و در نتیجه اعمال فیلتر تطبیقی و تعیین همزمان مدول کشسانی به عنوان متغیر مجهول سیستم مشخص گردید که مقادیر بدست آمده برای u دقیقاً با مقادیر نظری یکسان است. این موضوع نشان می‌دهد که فیلتر طراحی شده قادر به شناسایی و تشخیص داده‌های عاری از خطا می‌باشد و تغییری در آنها ایجاد نمی‌کند ولی با استفاده از آنها مقدار مدول کشسانی تیر را بدست می‌آورد. جدول (۲) مقادیر بدست آمده برای مدول کشسانی را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود اولاً مقدار بدست آمده دقیقاً با مقدار مورد انتظار مساوی است ثانیاً مقدار آن با مقدار حدس اولیه برای مدول کشسانی تغییر نمی‌کند. جالب توجه آنکه مجموع معادلات غیر خطی با ۱۹ مجهول فقط به یک حدس اولیه برای حل نیاز دارد. تعداد تکرار لازم برای همگرایی بسیار اندک است (جدول ۲) که نشان دهنده سرعت همگرایی خوب روش پیشنهادی است.

با اضافه کردن مقادیر دلخواه و اتفاقی خطا در مقادیر تئوریک، دو رشته مقادیر جدید بدست آورده شده است که به عنوان u^* استفاده می‌شوند تا اثرات فیلتر کردن و میزان حذف خطا در آنها نشان داده شود. جدول شماره (۳) این دو رشته داده (به ترتیب داده‌های شماره ۲ و ۳) را نشان می‌دهد. مقدار خطا در u^* رشته دوم تا ٪۱۰± و در رشته سوم از ٪۱۲- تا ٪۱۴+ متغیر است. محاسبات نشان می‌دهد مقادیر این داده‌ها پس از اعمال فیلتر کردن تطبیقی همزمان با حل معادلات سیستم به حذف کامل خطا از این داده‌ها منجر شده است. شکل‌های (۱ و ۲) به ترتیب مقادیر داده رشته‌های ۲ و ۳ را قبل و بعد از فیلتر کردن با هم مقایسه می‌کند. شایان ذکر است که علت حذف کامل خطا استفاده از معادله اویلر به عنوان معادله حاکم می‌باشد. همان طور که قبلاً نیز اشاره شد در روش پیشنهادی کیفیت حذف خطا به میزان اطلاع از سیستم مورد مطالعه دارد.

جدول شماره (۴) مقادیر بدست آمده نهایی برای مدول کشسانی تیر در صورت استفاده از داده‌های رشته ۲ و ۳ و با دو مقدار اولیه مختلف به عنوان حدس اولیه برای مدول کشسانی را نشان می‌دهد. این جدول تعداد تکرار لازم و مقادیر استفاده شده به عنوان حدس اولیه را نیز نشان می‌دهد. در هر چهار حالت مقدار تصحیح شده خیز تیر بعد از فیلتر کردن تطبیقی با مقادیر نظری آن یکسان ملاحظه گردید. جدول (۴) نشان می‌دهد که حتی در صورت استفاده از داده‌های با خطا، مقدار بدست آمده برای مدول کشسانی تیر همخوانی بسیار خوبی با مقدار نظری ۲۰۰ GPA دارد. بررسی نتایج بدست آمده نشان دهنده توانایی روش ارائه شده جهت حل معادلات سیستم و نیز حذف همزمان خطا و تعیین پارامترهای مجهول سیستم می‌باشد.

جدول شماره ۱- مقادیر تئوریک خیز جانبی

فاصله از تکیه‌گاه چپ(mm)	0	75	150	225	300	375	450	525	600
نماد خیز	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
خیز جانبی تئوریک و داده رشته اول (mm)	۰	۱/۸۹	۳/۲۴	۴/۰۵	۴/۳۲	۴/۰۵	۳/۲۴	۱/۸۹	.

جدول شماره ۲- مدول کشسانی بدست آمده و تعداد تکرار برای مقادیر مختلف حدس اولیه (با داده رشته ۱)

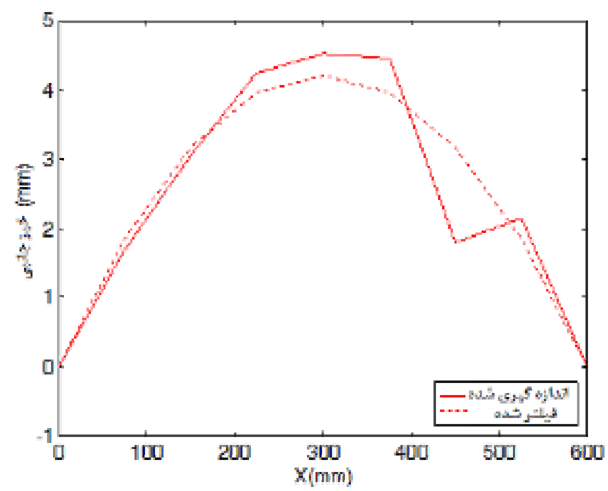
مقدارحدس اولیه (GPA) E_0	مقدار بدست آمده نهایی E(GPA)	تعداد تکرار
۰/۰۰۱	۲۰۰/۰۰۰۰	۸۰
۰/۰۱۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۶۳
۰/۱۰۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۵۳
۱	۲۰۰/۰۰۰۰	۴۲
۱۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۳۲
۸۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۲۲
۱۰۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۲۱
۱۴۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۱۸
۱۷۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۱۶
۱۹۵	۲۰۰/۰۰۰۰	۱۳
۲۰۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۱
۲۲۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۱۴
۳۰۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۱۹
۳۳۰	۲۰۰/۰۰۰۰	۲۹

جدول شماره ۳- داده‌های شماره ۲ و ۳ قبل از فیلتر کردن

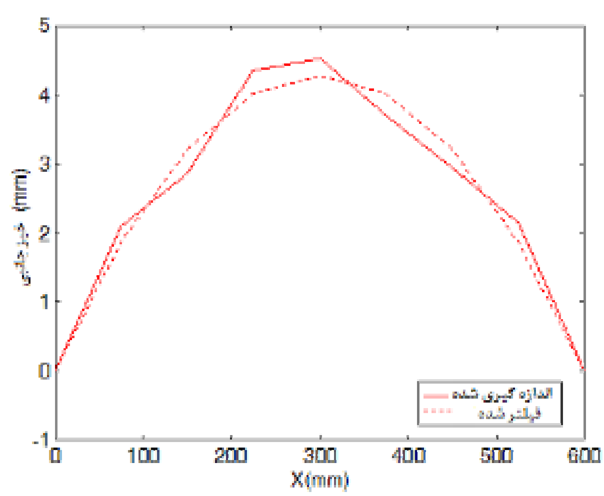
فاصله از تکیه‌گاه چپ (mm)	۰	۷۵	۱۵۰	۲۲۵	۳۰۰	۳۷۵	۴۵۰	۵۲۵	۶۰۰
نماد	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*	u_5^*	u_6^*	u_7^*	u_8^*	u_9^*
داده رشته ۲	۰	۱/۷۰	۳/۰۴	۴/۲۵	۴/۵۲	۴/۴۵	۲/۹۴	۱/۷۹	۰
داده رشته ۳	۰	۲/۱	۲/۸۵	۴/۳۵	۴/۵۲	۳/۷۰	۲/۹۴	۲/۱۵	۰

جدول شماره ۴- مقادیر بدست آمده برای E توسط برنامه به ازای مقادیر اولیه مختلف

تعدادتکرار	مقدار بدست آمده نهایی E(GPA)	مقدارحدس اولیه E_0 (GPA)	
۴۵	۲۰۴/۹۰	۱۹۵/.	داده رشته۲
۹	۲۰۴/۸۹	۱۹۵	داده رشته۲
۴۵	۲۰۱/۷۰	۱۹۵/.	داده رشته۳
۹	۲۰۱/۷۱	۱۹۵	داده رشته۳



شکل ۱- مقایسه داده رشته دوم قبل و بعد از فیلتر کردن تطبیقی



شکل ۲- مقایسه داده رشته سوم قبل و بعد از اعمال فیلترتطبیقی

۵- نتیجه‌گیری

روش جدیدی برای حل دستگاه معادلات غیر خطی که بتوان آنها را برحسب برخی متغیرها به دو دسته خطی- غیر خطی تفکیک نمود ارائه شد. با کاربرد روش در حذف همزمان خطا از مقادیر اندازه‌گیری شده تجربی و تعیین پارامترهای نامشخص سیستم توانایی و کارایی آن نشان داده شد. این روش در مقایسه با روش نیوتن- رافسون به تعداد کمتری حدس اولیه نیاز دارد. کاربرد روش پیشنهادی در حذف خطا نیز که مبتنی بر استفاده از یک ماتریس فیلتر کننده تطبیقی است بسیار سریع و کارآمد بوده و نتایج حاصل از بکارگیری آن منجر به حذف کامل خطا از داده‌ها و تعیین تقریباً دقیق پارامتر مجهول سیستم گردیده است. کاربرد این روش می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های سنتی بکار گرفته شده در مسائل معکوس و شناسایی سیستم گردد.

مراجع

[1] S. A. Lukasiewicz, Matrix Filter for Correcting Experimental Data, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 797- 803 ,1993.

[2] S. A. Lukasiewicz, M. Stanuszek and J. Czyz, Filtering of the Experimental Data in Plane Stress and Strain Fields, Experimental Mechanics, June 1993, 139- 147, 1993.

[3] Lukasiewicz, S. A., Hojjati, M. H., Adaptive Matrix Filter, Proceedings of CANCAM 2003, pp394-5, University of Calgary, Calgary, Canada.

[4] Hojjati, M. H., Lukasiewicz, S. A., Application of the Adaptive Matrix Filter to Inverse Heat Conduction Problems, Journal of Thermal Stresses, Vol. 26, Nos. 26-27, pp 1171-1184, Taylor & Francis ,2003.

[5] Lukasiewicz, S. A., Hojjati, M. H., Adaptive Filter Matrix for Inverse Problem in Thermal Field, Proceedings of 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics, June 8-11, 2003, Blacksburg, VA, USA.

[6] M. H. Hojjati, S. A. Lukasiewicz, Modeling of Sucker Rod String, Journal of Canadian Petroleum Technology, Vol. 44, No. 11, pp 55-58, 2005.

[7] W. Cheney, D. Kincaid, Numerical Mathematics and Computing, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999.

[8] M. Ortega and W. C. Reinbolt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, San Diego, 1970.

[9] K. A. Sikorski, Optimal Solutions of Nonlinear Equations, Oxford University Press, 2001.

[10] J. D. Faires, R. L. Burden, Numerical Methods (Book and Disk with Instruction Manual), Brooks/Cole Prindle, Weber and Schmidt Series, Third Edition, 2003.

[11] S. A. Lukasiewicz, M. H. Hojjati, A New Hybrid Method for Solving Linear – Nonlinear Systems of Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 63, pp 231-240, 2005.

[12] S. A. Lukasiewicz, R. Babaei, On inverse problem in thermo elasticity, Third International Congress on Thermal Stresses ’99, June 13-17, 1999, Cracow, Poland.

[13] C. G. Goodwin and R. A. Payne, Dynamic System Variables and Identification, Experiments Design and Data Analysis, Academic Press, New York ,1997.

[14] D. J. Segelman, D. B. Woyak, R. E. Rowlands, Smooth Spline- like Finite Element Differentiation of Full Field Experimental Data over Arbitrary Geometry, Experimental Mechanics, 19, 429- 437 ,1979.

[15] Tessler, A. Freese, R. Anastasi, S. Serabrian, D. Olinger and A. Katz, Least Square Penalty-Constraint Finite Element Method for Generating Strain Fields from Moire Fringe Patterns, Proc. 1987 SPIE Conf. on Photomechanics and Spekle Metrology, 814, 314- 323 ,1987.