

## تحلیل جریان‌های تراکم پذیر خارجی با استفاده از شرایط مرزی دور جدید

سید اسماعیل رضوی      استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

### چکیده

اندازه دامنه محاسبات در تحلیل عددی جریان شاره‌ها، همواره از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. در این مقاله مدلی براساس تئوری مشخصه‌ها برای شرایط مرزی دور در حل عددی جریان‌های تراکم‌پذیر غیر لزج خارجی ارائه می‌شود. در این مدل برای شرایط مرزی دور از بسط‌های مجانبی متغیرهای ریمن و روش مشخصه‌های بهبود یافته استفاده شده است. با کاربرد این مدل توانسته‌ایم در یک میدان محاسبات کاهش یافته حول ایرفویل به جواب‌های عددی دقیقی دست یابیم. نتایج به دست آمده با جواب‌های عددی دیگر محققان در این زمینه مقایسه شده و توافق خوبی بین آنها دیده می‌شود. اهمیت مدل حاضر در کاهش دامنه محاسبات، در عین حال حفظ دقت جواب‌ها می‌باشد، که نتیجه آن کاهش تعداد گره‌های شبکه است. به این ترتیب کارایی محاسبات بالا رفته و موجب صرفه‌جویی در استفاده از حافظه کامپیوتر به ویژه در روش‌های ضمنی می‌گردد. کلمات کلیدی: معادلات اوایلر، جریان‌های تراکم‌پذیر، شرایط مرزی دور، معادلات مشخصه، روش اختلاف محدود ضمنی، زمانروی.

## Analysis of External Compressible Flows Using The New Far-Field Conditions

S. E. Razavi      School of Mechanical Engineering, University of Tabriz

### Abstract

The size of computational domain has been a major factor in the numerical solution of fluid flows. In this paper a characteristic based model for the solution of external, inviscid compressible flows is presented. In this model, the asymptotic expansions of Riemann variables along with enhanced characteristic method have been used. Applying this model enabled us to obtain accurate results for the flow over an airfoil. The numerical solutions are compared to that of other investigators, in which a good agreement would exist. The main importance of the far-field model is the computational domain reduction, while conserving the solution accuracy. Consequently, the number of grid points are reduced considerably, leading to a reduction in computing time and memory specially in implicit schemes.

**Key words:** Euler equations, Far-field boundary conditions, Characteristic method, Implicit scheme, Time-marching.

## ۱- مقدمه

مرزی (اعم از جامد و دور) برخلاف پخش این اطلاعات صورت گیرد منجر به ناسازگاری و ناپایداری عددی خواهد شد. اگر امواج عددی بیرون رونده از میدان محاسبات میرا نشوند، به مرزهای جامد و دور برخورد نموده و به داخل میدان محاسبات منعکس می‌شوند. این روند تا میرایی کامل آنها ادامه می‌یابد که همگرایی را تحت تاثیر قرار داده و به تعویق خواهد انداخت. بر اساس تئوری مشخصه‌ها برای جریان‌های خارجی فراصوتی مشکلی در اعمال شرایط مرزی دور وجود ندارد به شرطی که موج ضربه این مرز را قطع نکند [۷ و ۱۳]. درجریان‌های فراصوتی همه اطلاعات از بالادست منتشر می‌شوند. در مرز ورودی این جریان همه اطلاعات از شرایط بالادست تثبیت شده و در مرز خروجی همه اطلاعات از دامنه محاسبات اخذ می‌شوند. در تحلیل جریان‌های فروصوتی و تراصوتی دقت کامل در اعمال شرایط مرزی دور ضروری است. زیرا در اینگونه رژیم‌ها، پخش اطلاعات و حرکت موجگونه خطاها در درون میدان محاسبات در جهت‌های مختلفی انجام می‌گیرد. به طور کلی اعتقاد بر این است که مدل‌سازی شرایط مرزی دور براساس تئوری مشخصه‌ها منجر به جواب‌های دقیق و پایدار می‌شود [۹، ۱۲ و ۱۳]. در جریان‌های تراکم‌پذیر یک بعدی معادلات مشخصه‌ها برای معادلات اولیر موجودند، در حالی که برای جریان‌های دو و سه بعدی معادلات مشخصه انتشار امواج درجهت‌های مختلف را نشان می‌دهند. در مقاله حاضر مدل‌سازی براساس معادلات مشخصه دو بعدی [۷ و ۱۳] و بسط‌های مجانبی متغیرهای ریمن انجام یافته است. به طور کلی مرزهای دور در معرض برخورد دو نوع اطلاعات هستند: الف) اطلاعات خارج از دامنه محاسبات (یا نواحی دور دست، ب) اطلاعات از داخل دامنه محاسبات (یا اطلاعات عددی). دو اطلاعات نامبرده در مرز با هم تداخل می‌یابند، که اگر این تداخل در امتداد مسیرهای مشخصه‌های معادلات حاکم انجام نگیرد، منجر به انعکاس اغتشاشات عددی به درون میدان محاسبات شده و ناپایداری عددی را موجب خواهد شد [۷، ۸ و ۱۲].

در حالت کلی می‌توان شرایط مرزی غیر انعکاسی را ایجاد نمود اگر اطلاعاتی از خارج میدان و در بی‌نهایت دور از آن موجود باشد [۷ و ۸]. در مورد معادلات ناویه-استوکس به دلیل وجود جملات اتلاف فیزیکی بخشی از این انعکاس‌های عددی مستهلک می‌شوند، اما در اعداد رینولدز بالا بایستی

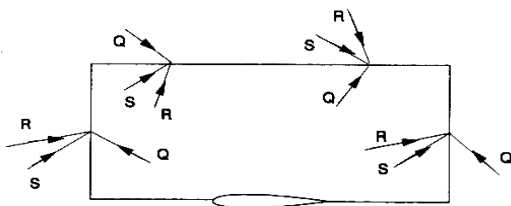
اندازه دامنه محاسبات در تحلیل عددی جریان شاره‌ها همواره مساله مهمی بوده است. زیرا در شبیه‌سازی‌های عددی جریان شاره‌ها اغلب با محدودیت حافظه کامپیوتر برای ذخیره‌سازی اطلاعات مواجه هستیم. در برخی موارد مانند تحلیل عددی جریان اطراف ایرفویل‌ها و یا پره‌های توربوماشین‌ها، مرزهای احاطه کننده جریان کاملاً مشخص نیستند. در اینگونه موارد برای شبیه‌سازی عددی جریان بایستی مرزهای احاطه کننده (مرزهای دور) به دقت ترسیم شوند، زیرا عملاً مرز واقع شده در بی‌نهایت در روش‌های عددی قابل قبول نمی‌باشد. در اینجاست که باید مرزهای دور ساختگی برای محدود ساختن دامنه محاسبات وارد کار شوند. در روش‌های عددی مرسوم و قدیمی اینگونه مرزها باید در فاصله قابل ملاحظه‌ای از بخش غیر خطی جریان (یا مراکز اغتشاش، مثلاً در فاصله‌ای به اندازه ۸۰ برابر وتر ایرفویل از مرکز ایرفویل) قرار گیرند [۳، ۴ و ۵]. اغتشاشات شامل امواج خطا و اکوستیک می‌باشند که دامنه و فرکانس‌های مختلفی دارند. این عمل باعث ازدیاد گره‌های شبکه و زمان محاسبات کامپیوتر می‌شود. در واقع در نواحی دورتر میدان که تغییرات پارامترهای جریان دارای اهمیت کمی هستند، تعداد گره‌های زیاد حجم محاسبات را افزایش خواهد داد. به ویژه در روش‌های حل عددی ضمنی که اغلب با محدودیت حافظه کامپیوتر برای ذخیره‌سازی اطلاعات مواجهیم. در تحلیل عددی جریان‌های خارجی دو شیوه برای اعمال شرایط مرزی دور وجود دارد: الف) دورتر قرار دادن مرز خارجی از جدارهای جامد به نحو چشمگیر ب) به کار بردن مدلی برای شرایط مرزی دور و نزدیک‌سازی این مرز به مرزهای جامد

برای نزدیک‌سازی مرزهای دور و کاهش دامنه محاسبات، مدل عددی هوشمندی بایستی اعمال گردد. شرایط مرزی دور در آزمایشات تونل باد نیز حایز اهمیت هستند. زیرا در اینگونه موارد حالت جریان بستگی کامل به شرایط مرزی دور ورودی و خروجی دارد [۶]. اعمال ناقص شرایط مرزی دور پایداری عددی الگوریتم را کاهش داده، دقت و همگرایی روش عددی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. با کاربرد مدل مناسبی برای شرایط مرزی دور دقت جواب‌ها افزایش یافته، از اندازه میزان محاسبات کاسته شده و همگرایی سریعتر خواهد شد.

معادلات اولیر دارای ماهیت هذلولوی بوده و پخش اطلاعات در امتداد خطوط مشخصه صورت می‌گیرد. اگر اعمال شرایط

در معادلات فوق  $Q = q - \frac{2}{\gamma-1}a$ ,  $R = q + \frac{2}{\gamma-1}a$  متغیرهای ریمن،  $\alpha = \frac{1+\gamma}{4}$ ,  $\theta = \tan^{-1} \frac{v}{u}$ ،  $\beta = \frac{3-\gamma}{4}$ ،  $\gamma = 1.4$  برای هواست.  $a$  نشانگر سرعت صوت و  $q$  سرعت برآیند است. معادلات فوق انتشار موج‌های فشار را توسط متغیرهای ریمن و انتشار انتروپی را در امتداد خطوط جریان نشان می‌دهند. بایستی توجه داشت که معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) برای جریان‌های آیزنتروپیک صادقند. گفتنی است که مدل شرایط مرزی دور در کار حاضر برای بخش ورودی و خروجی جریان‌های فروصوتی و بخش ورودی جریان‌های تراصوتی قابل کاربرد خواهد بود. شرایط مرزی دور خروجی جریان‌های خارجی غیر آیزنتروپیک مستلزم اعمال مدل دیگری است [۷]. برای تهیه اطلاعات در خارج دامنه محاسبات از معادله‌های (۱) و (۲) در مرز دور ورودی و از معادله (۲) در مرز دور خروجی استفاده خواهیم کرد.

در شکل ۱ انتشار امواج اکوستیک و انتروپی در مرز دور یک جریان دو بعدی خارجی داده شده است. بسته به این که مرز دور ورودی و یا خروجی باشد ترتیب پخش امواج تغییر می‌کند. حین روند همگرایی گره‌های واقع در مرز دور افقی در شکل ۱ می‌توانند به تناوب به ورود (inflow) و خروج (outflow) تبدیل گردند.



شکل ۱- انتشار متغیرهای ریمن (امواج ریمن) و انتروپی در مرزهای دور ورودی و خروجی یک جریان خارجی (فروصوتی و تراصوتی)

### ۳- متغیرهای ریمن بسط یافته

برای شبیه‌سازی رفتار نواحی دوردست از خاصیت مهم این نواحی که همان بسط مجانبی است، استفاده می‌کنیم. فیزیک مساله حکم می‌کند که در نواحی خیلی دور از بخش غیر خطی جریان (مرزهای جامد)، شرایط جریان آزاد (بدون اغتشاش)

مدل‌های مناسبی برای شرایط مرزی دور طراحی و به کار گرفته شوند [۱، ۲، ۶]. مدلی براساس متغیرهای ریمن در مختصات طبیعی توسط Verhoff برای شبکه C داده شده است [۸]. این مدل درگیر محاسبات ضرایب فوریه و انتگرال‌گیری‌های عددی است که کاربرد عملی آن را کاهش می‌دهد. مدلی که توسط Jameson [۳] برای مرز دور به کار برده می‌شود مدلی یک بعدی برای حل جریان‌های دو بعدی است. نقص این مدل در یک بعدی فرض نمودن جریان به طور موضعی در نزدیکی مرزهای دور است. به هنگام استفاده از اینگونه مدل‌های یک بعدی در حل جریان اطراف ایرفویل‌ها و بال‌ها، مرزهای دور بایستی در فاصله قابل ملاحظه‌ای دور از سطوح جامد (مثلاً پنجاه برابر وتر ایرفویل) قرار گیرند. این بعد مسافت برای جریان‌های ناپایای خارجی (ایرفویل و بال نوسان کننده) حتی بیشتر است [۲، ۴] و [۶]. برای ایرفویل‌های دارای زاویه حمله (وجود برآ)، تقریب‌های یک بعدی می‌تواند منجر به برای نادرست شود [۱۵]. مدل مرز دور حاضر به گونه هوشمند مرزهای ورودی و خروجی را متمایز نموده و اطلاعات بیرون رونده از دامنه محاسبات در امتداد خطوط دو مشخصه برون‌بایی می‌شود.

### ۲- معادلات حاکم در مرزهای دور

برای مدل‌سازی رفتار جریان و امواج در مرزهای دور، معادلات دو بعدی و ناپایای اولر براساس متغیرهای ریمن به شکل زیر در می‌آیند [۷].

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (\alpha R + \beta Q) \left[ \cos \theta \frac{\partial R}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial R}{\partial y} \right] = F(R, Q, \theta) \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (\beta R + \alpha Q) \left[ \cos \theta \frac{\partial Q}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial Q}{\partial y} \right] = -F(R, Q, \theta) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{R+Q}{2} \left[ \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = G(R, Q, \theta) \quad (3)$$

که در آنها داریم

$$F(R, Q, \theta) = -\frac{\gamma-1}{8} (R^2 - Q^2) \left[ -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]$$

$$G(R, Q, \theta) = -\frac{\gamma-1}{4} \frac{R-Q}{R+Q} \left[ -\sin \theta \frac{\partial (R-Q)}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial (R-Q)}{\partial y} \right]$$

برای ایرفویل NACA0012 بدون زاویه حمله  $\theta_\infty = 0$  خواهد بود. در بخش افقی مرز دور به جای  $\varepsilon_k(x)$  خواهیم داشت:  $\varepsilon_k(y) = e^{-k\omega}$ . در معادلات فوق جمله‌های غیر خطی مانند  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  با روش تاخیر زمانی خطی می‌شوند. البته می‌توان با انتخاب جملات بیشتری از بسط‌های متغیرهای ریمن به معادلات با مرتبه بالا برای مرز دور دست یافت. اما در عمل انتخاب دو جمله دقت خوبی را نتیجه داد. در مدل شرایط مرزی دور، معادله‌های (۵) و (۷) برای رسانیدن اطلاعات از خارج دامنه محاسبات به مرز دور ورودی و به طور مشابه معادله (۶) برای مرز دور خروجی در جریان آیزنتروپیک به کار می‌روند. در مرز دور ورودی متغیرهای  $R, \theta$  از خارج دامنه محاسبات و  $Q$  از داخل دامنه محاسبات به سوی این مرز منتشر می‌شوند. در این حالت  $Q$  بایستی با استفاده از اطلاعات عددی داخل میدان محاسبات معین و محاسبه شود. در مرز دور خروجی شرایط گفته شده برعکس می‌شوند، یعنی  $R, \theta$  از داخل دامنه محاسبات معلوم شده و  $Q$  با استفاده از معادله (۶) به طور عددی محاسبه می‌شود. روشن است هرگونه مدل شرط مرزی که ناسازگار با جهت انتشار اطلاعات به طریقه گفته شده باشد منجر به ناپایداری عددی پایدارترین روش‌های عددی ضمنی می‌شود [۱۲ و ۱۳].

#### ۴- توسعه مدل شرایط مرزی دور (جریان‌های آیزنتروپیک)

در جریان‌های ناپایای دو بعدی غیر لزج، مدل‌سازی شرایط مرزی دور باید با ماهیت هندلولی آنها سازگار باشد. در حل اینگونه جریان‌ها به طریقه عددی، هر گره از شبکه توسط سیگنال‌های متعددی مورد اصابت قرار می‌گیرد که در واقع مسیر سیگنال‌ها خطوط bicharacteristic همگرا شونده به سوی آن است. مدل حاضر تبادل اطلاعات بین دامنه محاسبات و دنیای خارج از آن را در نظر می‌گیرد. در شکل ۴ دامنه‌های محاسبات انبساط یافته و کاهش یافته و موقعیت جریان نسبت به آنرا مشاهده می‌کنید. همانطور که روشن است با امتداد دامنه  $\theta = 0$  خواهد شد ولی در کاهش دامنه باید تغییرات  $\theta$  را در نظر گرفت. در شکل ۲ نیمه مرزهای دور ورودی و خروجی حول ایرفویل نشان داده شده است، که شامل دو مرز دور عمودی و یک مرز دور افقی است. مرز دور افقی می‌تواند ورودی و خروجی باشد.

برقرار باشد. در نتیجه می‌توان فرض نمود که در فواصل دورتری از دامنه محاسبات، متغیرهای ریمن به مقادیرشان در جریان آزاد یعنی  $R_\infty, Q_\infty$  میل می‌کنند، در نتیجه برای مرزهای دور عمود بر جریان آزاد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R(x, y, t) &= R_\infty + \sum_{k=1}^m R_k(y, t) \varepsilon_k(x) \\ Q(x, y, t) &= Q_\infty + \sum_{k=1}^m Q_k(y, t) \varepsilon_k(x) \\ \theta(x, y, t) &= \theta_\infty + \sum_{k=1}^m \theta_k(y, t) \varepsilon_k(x) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آنجا  $\varepsilon_k(x) = e^{-k\omega}$  بوده و ضریب جدایش  $\omega$  به شکل  $\omega = \frac{\pi S_f}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$  در می‌آید [۹ و ۱۳]. که  $S_f$  ضریب اطمینان و  $M_\infty$  عدد ماخ جریان آزاد است. متغیرهای ریمن برای حالت بدون برآ (یعنی زاویه حمله صفر و  $\theta_\infty = 0$ ) به  $Q_\infty = u_\infty - \frac{2}{\gamma - 1} a_\infty$ ,  $R_\infty = u_\infty + \frac{2}{\gamma - 1} a_\infty$  هستند که  $u_\infty, a_\infty$  به ترتیب سرعت صوت و سرعت جریان آزاد را نشان می‌دهند. با انتخاب دو جمله از بسط‌های (۴) و واردسازی آنها در معادلات (۱ تا ۳) داریم:

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + (\alpha R_\infty + \beta Q_\infty) \left[ \omega R_1 \cos \theta + \frac{\partial R_1}{\partial y} \sin \theta \right] = \tilde{F}(\theta, \theta_1) \quad (۵)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + (\beta R_\infty + \alpha Q_\infty) \left[ \omega Q_1 \cos \theta + \frac{\partial Q_1}{\partial y} \sin \theta \right] = -\tilde{F}(\theta, \theta_1) \quad (۶)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (R_\infty + Q_\infty) \left[ \omega \theta_1 \cos \theta + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \sin \theta \right] = \tilde{G}(R_1, Q_1, \theta_1, \theta) \quad (۷)$$

که توابع سمت راست عبارتند از:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\theta, \theta_1) &= -\frac{\gamma - 1}{8} (R_\infty^2 - Q_\infty^2) \left[ -\omega \theta_1 \sin \theta + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \cos \theta \right] \\ \tilde{G}(R_1, Q_1, \theta_1, \theta) &= -\frac{\gamma - 1}{4} \frac{R_\infty - Q_\infty}{R_\infty + Q_\infty} \left[ -\omega (R_1 - Q_1) \sin \theta + \frac{\partial (R_1 - Q_1)}{\partial y} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

در مرز ورودی از معادله‌های (۵) و (۷) برای یافتن  $\theta_1, R_1$  استفاده می‌کنیم. بدین گونه که آنها به روش اختلاف محدود در هر گام زمانی حل می‌شوند. مشتقات موجود در این معادله‌ها به شکل زیر تقریب می‌شوند.

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} \cong \frac{R_1^{n+1}(j) - R_1^n(j)}{\Delta t}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial y} \cong \frac{R_1^n(1, j+1) - R_1^n(1, j-1)}{y(1, j+1) - y(1, j-1)}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} \cong \frac{\theta_1^{n+1}(j) - \theta_1^n(j)}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \cong \frac{\theta_1^n(1, j+1) - \theta_1^n(1, j-1)}{y(1, j+1) - y(1, j, j-1)}$$

(۱۰)

در روی خطوط تقارن و مرز دور افقی به ترتیب داریم:

$$R_{y=0} = R_{\infty} + R_1(0,1) = R(1,1)$$

$$R_{y=1} = R_{\infty} + R_1(1,t) = R(1, JM)$$

(۱۱)

که در آن  $JM$  بیشینه تعداد گره‌ها در امتداد  $y$  را نشان می‌دهد. با وارد کردن تقریب‌های (۱۰) در معادله‌های (۵) و (۷)، مقادیر  $\theta_1^{n+1}, R_1^{n+1}$  در گام زمانی بعدی محاسبه می‌شوند. مقدار  $Q_1^{n+1}$  از داخل دامنه محاسبات برای مرز ورودی و در امتداد خطوط مشخصه غالب معلوم می‌گردد [۶] در نتیجه در هر گام زمانی در مرز ورودی داریم:

$$Q_1^{n+1}(1, j) = Q_1^{n+1}(1, j) - Q_{\infty}$$

(۱۲)

در واقع امواج بیرون رونده از مرزها را می‌توان با روشهای عددی میرا نمود که در اینجا از پرداختن به آن خودداری می‌کنیم [۱۲ و ۱۳]. در جریان‌های خارجی که مرزهای ورودی و خروجی عمود بر مسیر جریان باشند، متغیرهای ریمن در امتدادهای  $x, y$  به شکل زیر در می‌آیند [۱۴].

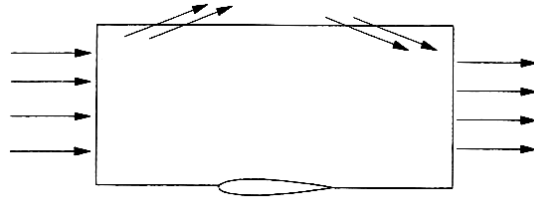
$$R_u = u + \cos \varphi \frac{2}{\gamma-1} a, \quad Q_u = -u + \cos \varphi \frac{2}{\gamma-1} a$$

(۱۳)

زاویه موج  $\varphi$  از رابطه (۸) در هر گام زمانی محاسبه شده، سپس متغیرهای جریان مانند زیر معلوم می‌گردند:

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}(R_u^{n+1} + Q_u^{n+1}), \quad a^{n+1} = \frac{\gamma-1}{4 \cos \varphi} (R_u^{n+1} - Q_u^{n+1})$$

(۱۴)



شکل ۲- مرزهای دور ورودی و خروجی در تحلیل جریان تراکم پذیر خارجی

جهت اطلاعات بیرون رونده از دامنه محاسبات (فقط اکوستیک) با رابطه زیر برای هر گره واقع در مرزهای ورودی و خروجی شبکه و در امتداد خط bicharacteristic محاسبه می‌شود [۱۳].

$$\tan \varphi = \frac{v_{\theta}^{n+1} - v_{\theta}^n}{u_{\theta}^{n+1} - u_{\theta}^n}$$

(۸)

که در آن  $u$  و  $v$  مولفه‌های سرعت جریان در گره و  $\varphi$  جهت انتشار امواج است. باید توجه داشت که معادله (۸) به طور موضعی در پیرامون مرزهای ورودی و خروجی معتبر است. این تقریب در نواحی ای صادق است که امواج اکوستیک غالب باشند. در هر گام زمانی و در هر گره روی مرزها  $\varphi_j$  محاسبه شده و مقدار آن با  $\pi/2$  مقایسه می‌شود. با دور شدن از سطح ایرفویل  $\varphi_j$  به سمت صفر میل می‌کند، یعنی  $v$  مقیدار ثابتی پیدا می‌کند [۱۳]. شکل ۱ جهت‌های احتمالی انتشار موجهای بیرون رونده در هر گره را نشان می‌دهد. امواج بیرون رونده بیشماری در طی روند همگرایی در داخل دامنه محاسبات تولید می‌شود، اما آنهایی برای ما اهمیت دارند که به مرزهای دامنه اصابت می‌کنند.

در ناحیه دور بالادست جریان  $x \ll 0$  است و توابع نمایی در سریهای (۴) فوق‌العاده کوچک شده، در نتیجه  $R$  و  $Q$  به مقادیرشان در جریان آزاد ( $Q_{\infty}, R_{\infty}$ ) میل خواهند کرد. اگر مبدا مختصات در مرز ورودی ( $x=0$ ) قرار گیرد، با تقریب مرتبه اول سریهای (۴) به شکل زیر در می‌آیند:

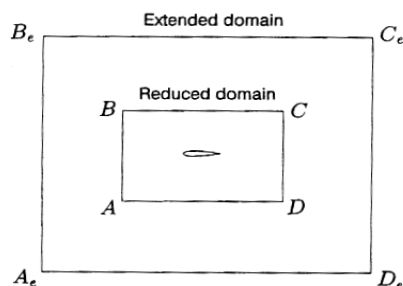
$$R = R_{\infty} + R_1, \quad Q = Q_{\infty} + Q_1, \quad \theta = \theta_1, \quad \theta_{\infty} = 0$$

(۹)

جامد مرسوم مورد استفاده قرار گرفته و نشان داده شده که این نوع شرط مرزی از نظر میرا کردن امواج خطا و تسریع همگرایی عملکرد بهتری دارد [۱۶]. در مرز جامد جریان غیر لزج شرط فیزیکی  $V \cdot n = 0$  اعمال می‌شود. فشار از معادله ممنتوم نرمال محاسبه شده و بقیه متغیرهای جریان با روش برونابی محاسبه شده‌اند.

#### ۶- هندسه جریان، شبکه، و الگوریتم حل جریان

برای ارزیابی مدل ارائه شده برای شرایط مرزی دور در جریانهای تراکم‌پذیر خارجی آیزنتروپیک از روش اختلاف محدود ضمنی به طریقه فاکتورگیری استفاده شده است [۵]. نرم افزار دو بعدی به روش زمانروی (time-marching) توسط مولف نوشته شده و در آن مدل ارائه شده اعمال گردیده است. شبکه به روش جبری تولید شده و بخش‌هایی از میدان‌های انبساط یافته و کاهش یافته در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. به علت تقارن نیمه میدان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر حل شده است. کاربرد مدل حاضر همراه با روش ضمنی فوق، با کاهش فوق‌العاده تعداد گره‌های شبکه و در نتیجه کاهش ابعاد ماتریس‌های بلوک سه قطری در جهت‌های  $x, y$  همراه بوده است (شکل ۳). کد حاضر با شبکه‌های مختلفی اجرا شده و سپس شبکه بهینه‌ای برای محاسبات انتخاب شده است. دامنه انبساط یافته شامل  $175 \times 50$  گره بوده که به اندازه ۹ وتر در امتداد  $x$  و ۸ وتر در امتداد  $y$  جا داده شدند. دامنه کاهش یافته شامل  $63 \times 70$  گره بود که در فاصله ۲ وتر در امتداد  $x$  و  $1/5$  وتر در امتداد  $y$  جا داده شدند.



شکل ۳- طرحواره میدان‌های محاسبات انبساط یافته و کاهش یافته حول ایرفویل NACA0012

و چون قبلاً از معادله (۷) مقدار  $\theta_1$  محاسبه شده، در نتیجه  $\theta = \theta_1$  معلوم است، اندازه بردار سرعت پیدا می‌شود.

$$q^{n+1} = \frac{u^{n+1}}{\cos \theta^{n+1}} \quad (15)$$

که در نهایت برای محاسبه  $Q^{n+1}$  خواهیم داشت:

$$Q^{n+1} = q^{n+1} - \frac{2}{\gamma-1} a^{n+1} \quad (16)$$

با داشتن مقدار  $Q^{n+1}$  از معادله (۱۶) و مقادیر  $R^{n+1}$  و  $\theta^{n+1}$  به ترتیب از معادله‌های (۵) و (۷)، می‌توان دیگر متغیرهای جریان را در مرزهای دور ورودی به شیوه زیر محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= \frac{1}{2}(R^{n+1} + Q^{n+1}), & a^{n+1} &= \frac{\gamma-1}{4}(R^{n+1} - Q^{n+1}) \\ u^{n+1} &= q^{n+1} \cos \theta^{n+1}, & v^{n+1} &= q^{n+1} \sin \theta^{n+1} \\ \rho^{n+1} &= \left[ \frac{\rho_\infty^\gamma}{\gamma p_\infty} (a^{n+1})^2 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, & p^{n+1} &= \frac{1}{\gamma} \rho^{n+1} (a^{n+1})^2, \\ \rho^{n+1} &= \frac{1}{\gamma} \rho^{n+1} (a^{n+1})^2 \\ E^{n+1} &= \frac{1}{\gamma-1} \frac{p^{n+1}}{\rho^{n+1}} + \frac{1}{2} [(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2] \end{aligned} \quad (17)$$

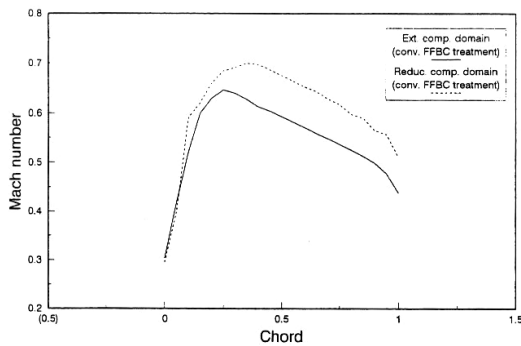
بعد از مراحل فوق بردار پایستار  $[\rho^{n+1}, (\rho u)^{n+1}, (\rho v)^{n+1}, (\rho E)^{n+1}]^T$  در مرز ورودی محاسبه شده و به الگوریتم داخل میدان محاسبات می‌پیوندد. درمدلسازی شرط مرزی خروجی آیزنتروپیک مشابه عملیات فوق تکرار می‌شود با این تفاوت که مقادیر  $R_1, \theta_1$  و بدنبال آن  $R$  و  $\theta$  با استفاده از الگوریتم عددی که برای حل میدان محاسبات بکار می‌رود معلوم می‌گردند و فقط  $Q_1$  از معادله (۶) به روش اختلاف محدود یافته شده و به دنبال آن  $Q$  محاسبه می‌گردد. در نهایت دو اطلاعات فوق در روی مرز خروجی توسط رابطه‌های (۱۷) به هم پیوند داده شده و بردار کانسرواتو خروجی معلوم می‌گردد.

#### ۵- شرایط مرزی جامد

شرایط مرزی جامد خوب بایستی بدون هیچ انعکاسی بر امواج خطا و مزاحم غلبه کنند. برای این منظور مدل‌سازی مرز جامد نیز باید سازگار با جهت انتشار خطوط مشخصه صورت گیرد. اخیراً مدل شرایط مرزی جامد نرم به جای شرایط مرزی

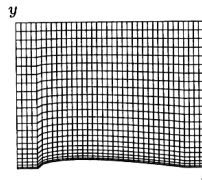
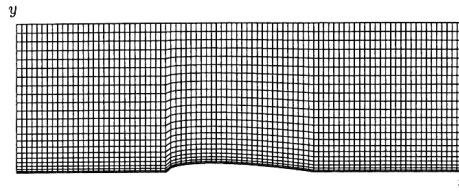
شکل ۶ نیز توزیع ضریب فشار را در میدان‌های انبساط یافته و کاهش یافته با اعمال شرایط مرزی دور مرسوم نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود اعمال شرایط مرزی دور رایج توزیع ضرایب فشار متفاوتی را در دو میدان نتیجه می‌دهد.

در شکل ۷ منحنی‌های عدد ماخ برای دامنه انبساط یافته با شرایط مرزی دور رایج و دامنه کاهش یافته و اعمال مدل شرایط مرزی دور حاضر ملاحظه می‌شوند. همانگونه که دیده می‌شود هم‌خوانی خوبی بین دو منحنی جواب‌ها وجود دارد. در شکل ۸ ضرایب فشار بدست آمده با مدل شرایط مرزی فعلی با ضرایب فشار Jameson و همکاران [۳] مقایسه شده‌اند. این نتایج توسط بسیاری از محققان به عنوان مقایسه به کار می‌رود. همانگونه که مشاهده می‌شود بین این دو سری جواب توافق نسبتاً خوبی وجود دارد. آزمایش‌های عددی نشان داد کاهش دامنه محاسبات در امتداد  $x$  بیشتر از امتداد  $y$  جواب‌های عددی را در مساله حاضر تحت تاثیر قرار می‌دهد به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که در تحلیل جریان‌های خارجی فاصله مرزهای دور و همچنین نوع اعمال شرایط مرزی دور به طور قابل ملاحظه‌ای دقت جواب‌ها و پایداری عددی طرح (scheme) به کار رفته را تحت تاثیر قرار می‌دهد. دقت مدل شرایط مرزی به کار رفته می‌تواند همسان با دقت طرح عددی و یا یک مرتبه کمتر از آن باشد [۷].



شکل ۵- توزیع اعداد ماخ روی ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر برای میدان‌های انبساط یافته و کاهش یافته با شرایط

$$\text{مرزی دور مرسوم } CFL = 2.2, M_{\infty} = 0.6$$



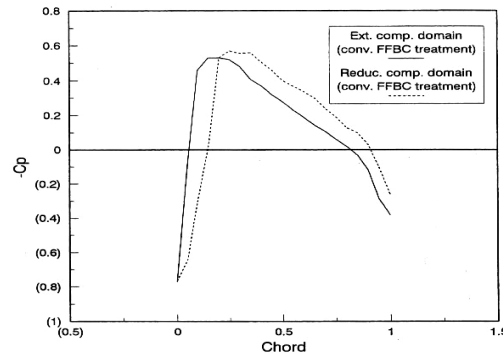
شکل ۴- بخشی از شبکه‌های تولید شده برای میدان‌های انبساط یافته و کاهش یافته حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر

#### ۷- نتیجه‌گیری

با اعمال مدل شرایط مرزی دور ارایه شده به جریان خارجی حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر توانسته‌ایم تعداد گره‌های شبکه را در حدود هشت برابر کاهش دهیم. مدل حاضر به ویژه برای تحلیل جریان‌های تراکم‌پذیر که با روش‌های اختلاف محدود و حجم محدود ضمنی انجام می‌گیرند مناسب است. از این نظر که ابعاد ماتریس‌ها با کاهش و حذف گره‌های زاید شبکه به حداقل ممکن می‌رسند. همان‌گونه که در شکل ۳ دیده می‌شود با اعمال مدل شرایط مرزی دور اختلاف دو میدان  $A_1 B_1 C_1 D_1$  و  $ABCD$  صرفه‌جویی شده است. در مدل حاضر انتشار امواج از داخل میدان محاسبات منظور شده است که با تئوری مشخصه‌ها سازگار بوده و پایداری الگوریتم عددی داخل میدان را تضمین می‌کند. شکل ۵ توزیع عدد ماخ را در روی ایرفویل برای میدان‌های انبساط یافته و کاهش یافته با اعمال شرایط مرزی دور رایج [۳ و ۴] برای هر دو میدان نشان می‌دهد. همانگونه که دیده می‌شود جواب‌های به دست آمده در دو میدان تفاوت چشمگیری با هم دارند. نتیجه می‌گیریم که برای حل میدان کاهش یافته به هیچ وجه نمی‌توان از روش‌های شرایط مرزی دور رایج استفاده کرد. در مقایسه جواب‌های عددی، جواب‌های حاصل از میدان انبساط یافته را به عنوان معیاری مطمئن قبول می‌کنیم. انبساط یا امتداد میدان تا جایی ادامه می‌یابد که دیگر تفاوتی در جواب‌های عددی احساس نشود.

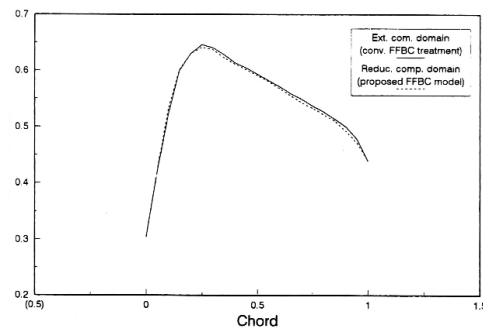
مراجع

- [1] Coocici C. A., Sofronov I. L., and Wendland W. L., "The Far-Field Modelling of Transonic Compressible Flows," *Mathematica Bohemia*, Vol. 125, No. 2, pp.293-305, 2001.
- [2] Tsynov S. V., "Artificial Boundary Conditions for Computation of Oscillating External Flows," *SIAM J. on Scientific Computing*, Vol. 18, No. 6, pp. 1612-1656, 1997.
- [3] Jameson A., Schmidt W. Turkel, E., "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes," *AIAA paper 81-1259*, AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conf., 1981.
- [4] Usab, Jr, W.J., Murman E. M., "Embedded Mesh Solutions of the Euler Equations Using a Multiple-Grid Method" *Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics*, Ed. by Roe P. L., 1981.
- [5] Pulliam, T. H., "Implicit Finite-Difference Methods for the Euler Equations," *Advances in Computational Transonics*, Ed. by Habashi, W.G., 1985.
- [6] Holst, T. L., Flonex, J., Kaunak, U., Chaderjian N. M., "Navier-Stokes Computations About Complex Configurations Including a Complete F-6 Aircraft," *Applied Computational Aerodynamics*, Ed. by Henne P.A., Vol. 125, Progress in Astronautics and Aeronautics Series, 1990.
- [7] Razavi, S. E. "Far Field Boundary Conditions for Computation of Compressible Aerodynamic Flows", PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal, Canada, 1995.
- [8] Gustafsson, B., Kreiss, H. O. "Boundary Conditions for Time-Dependent Problems With an Artificial Boundary", *J. Comp. Phys.* Vol. 30, pp . 333-351, 1979.
- [9] Verhoff, A., Stookesberry D., Agrawal S., "Far Field Computational Boundary Conditions for Two-Dimensional External Flow Problems," *AIAA J.*, Vol. 30, pp. 2585-2594, 1992.
- [10] Beam, R. M., Warming, R. F., "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-Law Form", *J. Comp. Phys.* Vol. 22, pp. 87-110, 1976.
- [11] Ni, R. H., "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler equations", *AIAA J.* Vol. 20, pp. 1565-1571, 1982.



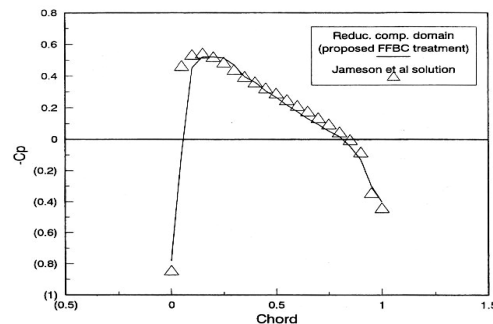
شکل ۶- مقایسه توزیع ضرایب فشار روی ایرفویل برای دامنه‌های محاسبات انبساط یافته و کاهش یافته با شرایط مرزی

$$M_{\infty} = 0.6, \quad CFL = 2.2, \quad \text{دور مرسوم}$$



شکل ۷- مقایسه توزیع اعداد ماخ روی ایرفویل برای دامنه محاسبات انبساط یافته و دامنه محاسبات کاهش یافته با شرایط

$$M_{\infty} = 0.6, \quad CFL = 2.2, \quad \text{مرزی دور حاضر}$$



شکل ۸- مقایسه توزیع ضرایب فشار در روی ایرفویل برای NACA0012 در دامنه محاسبات کاهش یافته و مدل شرایط مرزی دور با نتایج عددی Jameson و همکاران [3] و دامنه

$$M_{\infty} = 0.6, \quad CFL = 2.2, \quad \text{محاسبات کاهش یافته}$$



- [15] Thomas J. L., Salas M. D., "Far-Field Boundary Conditions for Transonic Lifting Solutions to the Euler Equations," AIAA J., Vol. 24, pp. 1074-1080, 1986.
- [16] Mazaheri K., Roe P. L., "Numerical Wave Propagation and Steady-State Solutions: Soft Wall and Outer Boundary Conditions, AIAA J., Vol. 35, No. 6, pp.965-975, 1997.
- [12] Karni, S., "To the Boundary and Back-a Numerical Study", Int. J. for Numerical Methods in Fluids Vol. 13, pp. 201-216, 1991.
- [۱۳] رضوی، سیداسماعیل شرایط مرزی دور محاسباتی برای تحلیل جریان‌های تراکم‌پذیر داخلی، مجموعه مقالات چهارمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها، ص ۴۴۹-۴۶۰ مهرماه ۱۳۷۵.
- [۱۴] رضوی، سید اسماعیل، بررسی موجهای منتشر شونده از میدان محاسبات به مرزهای دور در شارش‌های تراکم‌پذیر، مجله دانشکده فنی دانشگاه تبریز، شماره ۱۷، ص ۴۹-۵۶، ۱۳۷۶.