

## بررسی اندرکنش ترک‌ها در حالت الاستواستاتیک

بابک امیدوار      استادیار دانشکده محیط زیست، دانشگاه تهران  
محمد رحیمیان      دانشیار دانشکده فنی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران  
ندا داریوندی      دانشجوی دکتری سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

### چکیده

این مقاله به بررسی اندرکنش ترک‌ها در محیط بی‌نهایت دو بعدی در حالت الاستواستاتیک می‌پردازد. روش به‌کار رفته، روش المان مرزی می‌باشد. برای مرز ترک‌ها، به‌دلیل اجتناب از مشکلات عددی از روش المان مرزی دوگانه استفاده شده است. بنابراین علاوه بر معادلات انتگرالی منفرد قوی، معادلات هیپرسینگولار نیز به مساله اضافه می‌شوند و این مساله در انتخاب نوع المان‌ها در المان مرزی اثر می‌گذارد. نتایج به‌صورت ضرایب شدت تنش بیان شده‌اند. برای محاسبه این ضرایب از روش بازشدگی عرض ترک استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده حاکی از این است که نحوه قرارگیری ترک‌ها تاثیر قابل توجهی روی ضرایب شدت تنش دارد.  
کلمات کلیدی: اندرکنش ترک‌ها، المان مرزی دوگانه، ضریب شدت تنش.

## Elastostatic Study of Cracks Interaction

B. Omidvar      Faculty of Environment, University of Tehran  
M. Rahimian      Faculty of Civil Engineering, University of Tehran  
N. Darivandi      Faculty of Civil Engineering, Sharif University

### Abstract

This paper makes static studies of multiple crack interaction in infinite, elastic, two dimensional bodies applying the Boundary element method. To avoid numerical inaccuracies in crack boundaries the method of Dual boundary element (DBEM) is used here so hyper singular equations are added to the system and this will affect the process of choosing element types. The results in terms of stress intensity factors (SIFs) are presented for a variety of crack arrangements, relative sizes of cracks spacing and crack orientations. In order to calculate the so called factors, crack opening displacement method is used. It is found that crack arrangements have significant effects on SIFs.

**Key words:** Cracks' interaction, Dual boundary element method, Stress intensity factor.

## ۱- مقدمه

بسیاری از مواد شکننده از ابتدا و پیش از بارگذاری دارای ناپیوستگی‌هایی به فرم ترک و حفره می‌باشند. حضور این ناپیوستگی‌ها به دلیل تمرکز تنش بالایی که ایجاد می‌کنند، تأثیر قابل توجهی روی خصوصیات مکانیکی ماده می‌گذارد و پتانسیل این مسئله برای تبدیل به یک عامل فاجعه‌آمیز باعث شده که آنالیز دقیق اندرکنش ترک‌ها و میدان‌های تنش و تغییر مکان در اطراف آنها از اهمیت بسیار بالایی برخوردار گردد. برای تخمین رفتار سازه حین شکست، دانستن اندازه ترک، تنش سرویس، خصوصیات ماده و ضرایب شدت تنش (به‌عنوان یک پارامتر پایه در مکانیک شکست خطی الاستیک) مورد نیاز است.

تاکنون بسیاری از محققان با استفاده از روش‌های تئوریک و حل‌های بسته، به بررسی رفتار این ناپیوستگی‌ها پرداخته‌اند. در این مورد می‌توان به مراجع [۴] تا [۱۰] مراجعه نمود. با وجود تعدد بررسی‌های انجام شده، این حل‌های تئوریک صرفاً برای مدل‌های ساده قابل کاربرد می‌باشند و در مورد سازه‌هایی که در عمل به کار می‌روند به دلیل فرم تصادفی قرارگیری ناپیوستگی‌ها در آنها، قابل استفاده نیستند.

در برخی تحقیقات نیز با به‌کارگیری تقریبات خاص به روش‌های ساده‌تری دست یافته‌اند. از آن جمله می‌توان به روش ترکیبی که در مرجع [۱۱] معرفی شده اشاره نمود. در این روش، از حل مدل‌های ساده برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مدل‌های پیچیده‌تر استفاده شده است. در مرجع [۱۲] نیز میزان دقت این روش بررسی شده است.

در مرجع [۱۳] نیز تکنیکی ساده برای محاسبه تقریبی میدان‌های تنش و تغییر مکان در صفحات الاستیک حاوی ترک‌های متعدد بیان شده است. در این تکنیک بازشدگی عرض ترک (COD) با استفاده از نتایج به‌دست آمده در مرجع [۱۴] و مقایسه با ضرایب شدت تنش، به صورت چند جمله‌ای با ضرایب در برگیرنده اندرکنش ترک‌ها، بسط داده می‌شود و سپس میدان تغییر مکان را با انتگرال‌گیری روی سطوح ترک محاسبه می‌کنند. این روش در فاصله کوچک ترک‌ها دارای دقت خوبی می‌باشد.

روش‌های المان محدود نیز بطور وسیعی در مسائل مکانیک شکست به کار برده شده‌اند، ولی المان‌های معمول که در این روش به کار می‌روند در نزدیکی ترک‌ها و حفره‌ها دارای دقت خوبی نیستند و حتی اگر تعداد المان‌ها را در این محدوده زیاد

کنیم نیز به دقت مورد نیاز نخواهیم رسید. برای حل این ایراد باید تدابیر خاص اتخاذ نمود. به‌عنوان مثال، در مراجع [۱۵] و [۱۶] روش‌های اصلاح شده‌ای برای حل این موارد پیشنهاد شده است ولی ایراد عمده این روش‌ها، نیاز آنها به به‌کارگیری المان‌های زیاد در محدوده ترک‌ها و حفره‌ها می‌باشد. در مرجع [۱۷] نیز با کاربرد فرمولبندی المان هیبرید و تکنیک متغیرهای مختلط نوعی المان برای محاسبه ضرایب شدت تنش در صفحات دربرگیرنده ترک‌های لبه‌ای به‌دست آمده است. در مرجع [۱۸] نیز، با استفاده از تبدیل‌های هم‌شکل، نوع خاصی از المان دارای ترک یا حفره داخلی به کار رفته است.

روش المان مرزی نیز امکان بررسی بسیاری از مسائل پیچیده اندرکنش ترک‌ها را فراهم نموده است. لازم به توجه است که در روش المان مرزی تنش‌ها در نقاط داخل میدان دارای دقت بالایی هستند زیرا در این روش تقریبی برای جواب در نقاط داخلی میدان اعمال نمی‌شود و جواب در نقاط داخل میدان دقیق و پیوسته است. این امر استفاده از روش المان مرزی را در مدلسازی مسائلی که در آن تغییرات زیاد تنش وجود دارد بسیار مناسب می‌کند. بنابراین روش المان مرزی در مسائل مکانیک شکست از کارآیی خوبی برخوردار است و در مراجع [۱۹] و [۲۰] از این روش استفاده شده است.

از ایرادات این روش این است که زمانی که دو وجه ترک در یک سطح قرار دارند استفاده مستقیم از روش المان مرزی (BEM) منجر به بروز مشکلات ریاضی می‌شود. برای برطرف کردن مشکل فوق در مرجع [۲۱] امکان مدل کردن ترک به صورت یک شکاف بیضی شکل بررسی شده است. نتایج حاکی از دقت کم این روش برای محاسبه ضرایب شدت تنش در نمونه کششی که ترک در وسط آن قرار داشت، بود. روش دیگر بر اساس فرمول‌بندی چند دامنه در مرجع [۲۲] می‌باشد. این روش، روشی عمومی است و می‌توان آن را در مسائل متقارن و نامتقارن ترک در محیط‌های دو و سه بعدی به کار برد.

همچنین در مرجع [۲۳] برای مسائل دو بعدی و در مرجع [۲۴] برای مسائل سه بعدی، روش المان مرزی دوگانه (DBEM) معرفی شده است. این روش، روشی عمومی و کارآ برای مدلسازی مسائل ترک در BEM است که در ادامه بطور کامل توضیح داده خواهد شد.

$$C_{ij}(x')u_i(x') = - \int T_{ij}(x',x)u_j(x)d\Gamma(x) + \int U_{ij}(x',x)t_i(x)d\Gamma(x) \quad (3)$$

$x'$ : نقطه روی هم‌گذاری روی مرز

$x$ : نقطه ای روی مرز

$u_i$ : مؤلفه تغییر مکان

$t_i$ : مؤلفه بردار تنش

$U_{ij}(x',x)$ : تغییر مکان در راستای  $i$  در نقطه  $x'$  وقتی که در نقطه  $x$  در راستای  $j$  بار واحد قرار گرفته باشد.

$T_{ij}(x',x)$ : مؤلفه بردار تنش در راستای  $i$  در نقطه  $x'$  وقتی که در نقطه  $x$  در راستای  $j$  بار واحد قرار گرفته باشد.

Free Term:  $C_{ij}(x')$  نامیده می‌شود و در صورتیکه مرز در

نقطه  $x'$  هموار باشد برای محیط محدود مقدار آن برابر  $\frac{1}{2}\delta_{ij}$  است که در آن  $\delta_{ij}$  تابع دلتای کرونگر است.

پاسخ‌های اساسی تغییر مکان و بردار تنش  $U_{ij}(x',x)$ ،  $T_{ij}(x',x)$  برای مسائل کرنش مسطح عبارت است از [۱] و [۲]:

$$U_{ij}(x',x) = \frac{1+\nu}{4\pi E(1-\nu)} \left[ (3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (4)$$

$$T_{ij}(x',x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (5)$$

$E$  مدول ارتجاعی و  $\nu$  ضریب پواسن است.

$r$  فاصله بین  $x$  و  $x'$  است و  $n_i$  مؤلفه برداریکه عمود بر سطح  $\Gamma$  در نقطه  $x$  است.

$T_{ij}$  را با استفاده از مفاهیم تئوری ارتجاعی می‌توان از  $U_{ij}$  به دست آورد [۱].

$$T_{ij} = \lambda \left( \frac{\partial U_{mj}}{\partial x_m} \right) n_i(x) + \mu \left( \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial U_{kj}}{\partial x_i} \right) n_k(x) \quad (6)$$

$\lambda$  و  $\mu$  ضرایب لامه هستند.

برای به دست آوردن معادله انتگرال مرزی دیگری که نسبت به معادله (۳) مستقل باشد باید از معادله (۳) مشتق‌گیری کرده و از قانون هوک استفاده کنیم تا معادله انتگرال مرزی بردار تنش حاصل شود. مرز در نقطه  $x'$  هموار فرض می‌شود [۲ و ۱]:

در پژوهش صورت گرفته، با استفاده از روش المان‌مرزی والمان‌مرزی دوگانه، برنامه‌ای نوشته شده است که در این مقاله ابتدا به بررسی صحت جواب‌های به دست آمده و سپس به مسائل دو بعدی اندرکنش ترک‌ها در حالت الاستواستاتیک خواهیم پرداخت.

## ۲- معادلات حاکم بر مسئله

معادله ناویه به عنوان یک معادله پایه برای فرمول‌بندی مستقیم BIE مطرح است. در حالت برداری این معادله به این صورت مطرح می‌گردد [۱]:

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot u) = -\frac{f}{\mu} \quad (1)$$

$u$ : بردار تغییر مکان

$\nu$ : ضریب پواسن

$\mu$ : مدول برشی

$f$ : بردار بار حجمی

با استفاده از بردار گالرکین می‌توان به پاسخ‌های اساسی مربوط به معادلات دیفرانسیل حاکم دست یافت [۲]. سپس با استفاده از قضیه تقابل بتی - ماکسول:

$$\int_{\Gamma} t_i^{(a)} u_i^{(b)} ds = \int_{\Gamma} t_i^{(b)} u_i^{(a)} \quad (2)$$

به معادلات انتگرال مرزی تغییر مکان و بردار تنش دست می‌یابیم که تغییر مکان‌ها و بردارهای تنش مرزی را به هم ربط میدهد.

$t_i$ : بردار تنش که مقدار آن برابر است با  $n_j \sigma_{ij}$

$n_j$ : برداریکه عمود بر سطح

سیستم (a) پاسخ اساسی فرض می‌شود که مشخص است و سیستم (b) جواب‌های مسئله مورد نظر است که مجهولند. برای حل عددی این معادلات انتگرالی، پس از المان بندی مرز مساله، از توابع شکلی برای توصیف هندسه و متغیرهای مربوط به هر المان استفاده می‌شود.

معادله انتگرال مرزی تغییر مکان در یک محیط با مرز  $\Gamma$  به صورت زیر است:

قسمت منفرد استفاده کرد و انتگرال‌ها را به صورت تحلیلی - عددی برآورد نمود [۱].

#### ۴- مدل کردن ترک و حل معادلات انتگرالی

برای حل عددی معادلات انتگرالی، مرز را به المان‌هایی تقسیم نموده، از توابع شکلی برای توصیف هندسه و متغیرهای مربوط به هر المان استفاده می‌شود. مرز مسئله  $\Gamma$  به  $M$  المان مرزی با  $P$  گره در هر المان تقسیم می‌شود. تغییر مکان و بردار تنش با استفاده از توابع شکلی  $N^P(\zeta)$  تقریب زده می‌شود. سپس با در نظر گرفتن نقطه چشمه روی یکی از نقاط گره‌ی و انجام انتگرال‌گیری عددی روی هر المان و حصول انتگرال‌گیری روی کل مرز و جمع کردن انتگرال‌ها روی تمام المان‌ها معادلات متناظر با آن گره حاصل می‌شود. معادلات انتگرال‌مرزی برای هر کدام از گره‌های المان مرزی به کار گرفته می‌شود. با توجه به نکات فوق، بعد از جزءبندی کردن مکان، معادلات انتگرال‌مرزی تغییر مکان و بردار تنش به ترتیب بصورت زیر در می‌آید [۱]:

$$c_{ij}^l u_i^l = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \left\{ \begin{aligned} & t_i^{mp} \int_{-1}^1 U_{ij}^l(\zeta) N^p(\zeta) J^m(\zeta) d\zeta \\ & - u_i^{mp} \int_{-1}^1 T_{ij}^l(\zeta) N^p(\zeta) J^m(\zeta) d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$0.5 t_j^l = n_i^l \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & t_k^{mp} \int_{-1}^1 U_{kij}^l(\zeta) N^p(\zeta) J^m(\zeta) d\zeta \\ & - u_k^{mp} \int_{-1}^1 T_{kij}^l(\zeta) N^p(\zeta) J^m(\zeta) d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

که در آن ۱ شماره گره روی هم‌گذاری است که برای آن از معادلات تغییر مکان یا معادلات بردار تنش استفاده می‌شود.  $im$  ژاکوبین و  $\zeta$  مختصه محلی ( $-1 \leq \zeta \leq 1$ ) است.

با اعمال معادله انتگرال‌مرزی تغییر مکان برای نقاط روی هم‌گذاری در یک سطح ترک و اعمال معادله انتگرال‌مرزی بردار تنش برای سطح دیگر ترک یک سری معادلات جبری غیروابسته حاصل می‌شود.

بعد از انجام انتگرال‌گیری‌های لازم و عملیات جبری، معادله ماتریسی زیر حاصل می‌گردد:

$$[F] \{u\} = [G] \{t\} \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} t_j^l(x') = -n_i^l(x') \int T_{ijk}^l(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) + n_i^l(x') \int U_{ijk}^l(x', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (7)$$

که در آن  $T_{kij}$  و  $U_{kij}$  پاسخ‌های اساسی حالت الاستواستاتیک هستند که به ترتیب ترکیب خطی از مشتقات  $T_{ij}$  و  $U_{ij}$  هستند [۱]:

$$\dot{U}_{kij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial U_{km}}{\partial x'_m} + \mu \left( \frac{\partial U_{kj}}{\partial x'_i} + \frac{\partial U_{ki}}{\partial x'_j} \right) \quad (8)$$

$$T_{kij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial T_{km}}{\partial x'_m} + \mu \left( \frac{\partial T_{kj}}{\partial x'_i} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x'_j} \right) \quad (9)$$

#### ۳- المان مرزی دوگانه در مسائل مکانیک شکست الاستواستاتیک

معادلات دوگانه ای که در DBEM استفاده می‌شود، شامل معادلات انتگرال‌مرزی تغییر مکان (۳) و معادلات انتگرال‌مرزی تنش (۷) است. در ادامه، ماده الاستیک خطی، ایزوتروپ و همگن فرض می‌شود. از نیروهای حجمی نیز صرف نظر می‌گردد.

در این روش برای اجتناب از مشکلات ریاضی در دو وجه ترک باید از معادلات انتگرالی مستقل استفاده کرد. در این نوع فرمول‌بندی معادله انتگرال‌مرزی تغییر مکان در یک وجه ترک و معادله انتگرال‌مرزی بردار تنش روی وجه دیگر ترک به کار گرفته می‌شود. با به کارگیری این روش، از مشکلی که در اثر قرار گرفتن مقابل هم دو گره با مختصات یکسان روی سطوح مقابل ترک ایجاد می‌شود اجتناب می‌گردد. زیرا دو معادله مستقل برای این دو گره به وجود می‌آید.

لازم به ذکر است که انتگرال اول در معادله (۷)

هیپرسینگولار از درجه  $\frac{1}{r^2}$  و انتگرال دوم منفرد قوی از درجه

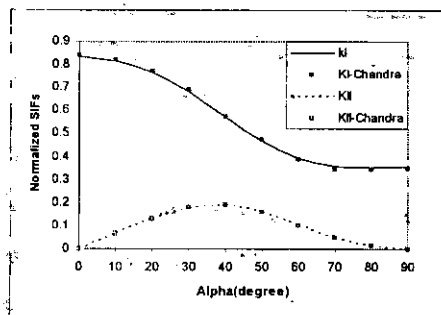
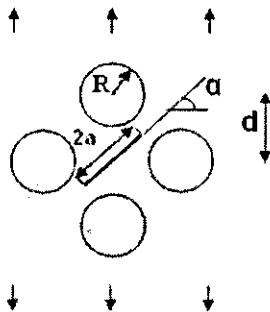
$\frac{1}{r}$  است. برای اینکه انتگرال‌های هیپرسینگولار در معادله

انتگرالی بردار تنش دارای جواب باشد از المان‌های درجه دو غیرپیوسته برای تقسیم‌بندی مرز استفاده می‌شود و برای محاسبه آنها می‌توان از مفاهیم انتگرال مقدار معین هادامارد و انتگرال مقدار اصلی کوشی استفاده کرد. در صورتی که المان‌ها مستقیم باشند می‌توان برای المان‌های غیرپیوسته معمولی انتگرال‌های ذکر شده را به صورت تحلیلی برآورد کرد و برای المان‌های غیرپیوسته نیوک ترک می‌توان از روش جداسازی

۶- نتایج عددی

در این بخش، کاربرد روش و برنامه عنوان شده برای مسائل مختلف اندرکنش ترک‌ها بررسی می‌گردد. معادلات انتگرالی بیان شده برای اشکال مختلف قرارگیری ترک‌ها قابل کاربرد می‌باشد. در ابتدا صحت روش پیشنهادی و نرم‌افزار تهیه شده با استفاده از نتایج موجود در سایر مقالات بررسی می‌گردد و سپس به مسائل مختلف اندرکنش استاتیکی ترک‌ها، در حالات مختلف قرارگیری نسبت به یکدیگر، به‌ویژه، به جهت قرارگیری ترک‌ها و فاصله آنها با یکدیگر خواهیم پرداخت. در تمام موارد عنوان شده، ضرایب شدت تنش نسبت به ضریب شدت تنش یک ترک در صفحه با ابعاد بی‌نهایت که تحت تأثیر تنش کششی یکنواخت نرمال بر سطح خود  $(\sigma\sqrt{\pi a})$  قرار گرفته، بدون بعد گردیده‌اند. طول ترک‌ها نیز برابر می‌باشد. در تمام موارد محیط، با ابعاد بی‌نهایت و تحت تأثیر تنش کششی یکنواخت  $(\sigma)$  در بی‌نهایت می‌باشد.

شکل (۱) چهار حفره متقارن را نشان می‌دهد که ترکی را احاطه کرده‌اند. دایره‌ها همگی دارای شعاع یکسان  $(R=a)$  می‌باشند.



شکل ۱- تغییرات ضرایب شدت تنش (Stress Intensity Factor, SIF) با زاویه قرارگیری ترکی که بوسیله چهار دایره که بطور متقارن قرار گرفته اند احاطه شده است

ماتریس‌های  $[G]$  و  $[U]$  شامل انتگرال‌هایی با هسته‌های  $U_{ij}$  و  $T_{ij}$  و  $U_{kij}$  و  $T_{kij}$  هستند و بردارهای  $\{t\}$  و  $\{u\}$  نیز بردارهای تغییر مکان و تنش می‌باشند.

با حل این معادلات، مجهولات تغییر مکان و بردار تنش محاسبه می‌گردند و با استفاده از تغییر مکان‌ها و بردارهای تنش مرزی میتوان مقادیر تنش، کرنش، انرژی کرنشی و ضرایب شدت تنش را محاسبه کرد.

شرایط لازم برای وجود انتگرال‌های منفرد که در معادلات انتگرال مرزی ظاهر می‌شود محدودیت‌های ویژه‌ای را برای مدل‌سازی ترک اعمال می‌کند. به عبارت دیگر، برای اینکه انتگرال منفرد قوی که در معادله تغییر مکان (۳) ظاهر می‌شود جواب داشته باشد، باید مؤلفه‌های تغییر مکان در گره‌ها پیوسته باشد. بنابراین این هرالمان مرزی پیوسته و یا المان غیرپیوسته با گره‌های داخلی این شرط را ارضاء می‌کند. در معادله بردار تنش (۷) شرط وجود جواب انتگرال هیبرسینگولار این است که مشتق اول تغییر مکان در نقطه روی هم‌گذاری پیوسته هولدر باشد. این شرط توسط المان‌های ناپیوسته با گره‌های داخلی بطور ضمنی ارضاء می‌شود. زیرا گره‌ها، نقاط داخلی المان‌ها هستند [۱].

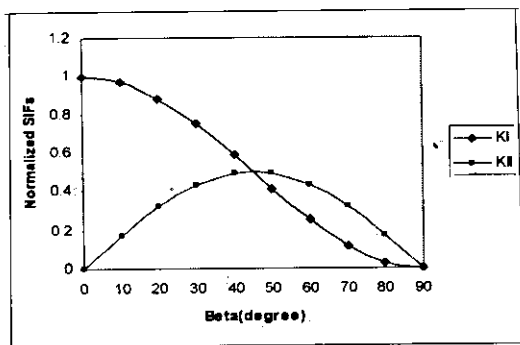
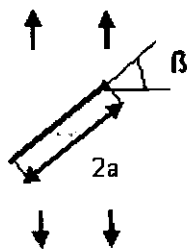
۵- ضرایب شدت تنش

در تئوری مکانیک شکست یکی از روش‌های تشخیص پایداری یا گسترش ترک مقایسه پارامتر ضریب شدت تنش در نوک ترک با مقدار بحرانی آن است. با استفاده از ضرایب شدت تنش می‌توان میدان‌های تنش اطراف نوک ترک را نیز به دست آورد.

در سال ۱۹۵۷، ایروین [۲۵] حالت تنش را در همسایگی نزدیک نوک ترک بررسی کرد. او سه مود مختلف شکست را بر اساس جایجایی نسبی ترک در نظر گرفت. مود اول، مود نرمال نام دارد که بر اساس تغییر مکان نسبی متقارن بازشدگی دو سطح ترک ایجاد می‌گردد. مود دوم مود برشی شکست می‌باشد که در اثر تغییر مکان نسبی پادمتقارن لغزش دو سطح ترک ایجاد می‌گردد. مود سوم نیز مود پیچشی سازه است که در حالت دو بعدی امکان وقوع ندارد [۳].

برای محاسبه ضرایب شدت تنش در نرم افزارهای نوشته شده در این مقاله از روش بازشدگی عرض ترک (COD) استفاده شده است. شرح کامل این روش در مرجع [۲۶] عنوان شده است.

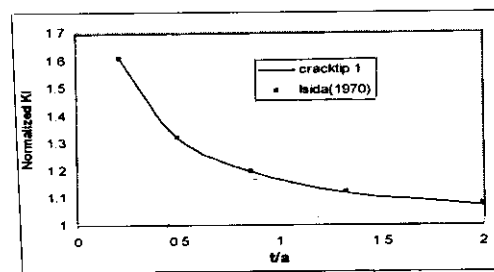
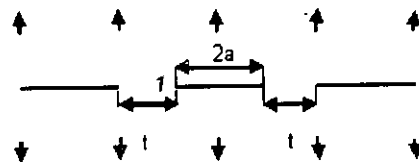
مدل تغییرات ضرایب شدت تنش مود اول و دوم ( $K_I$  و  $K_{II}$ )، با زاویه قرارگیری ترک نسبت به افق بررسی گردیده است. در این مقاله این مدل به‌عنوان یک مدل پایه مطرح می‌گردد و در اکثر مدل‌های بعدی، نتایج به‌دست آمده از مقایسه با این مدل حاصل گردیده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌گردد با تغییر زاویه ترک از صفر تا نود درجه نسبت به افق، مقدار  $K_I$  کاهش می‌یابد. در نود درجه مقادیر  $K_I$  و  $K_{II}$  هر دو به صفر می‌رسد و این به این معناست که حضور بارهیج تأثیری روی ترک نداشته است که با توجه به جهت قرارگیری ترک امری منطقی به نظر می‌رسد. در حدود زاویه چهل و پنج درجه مقادیر  $K_I$  و  $K_{II}$  با هم برابر می‌گردد. در این زاویه  $K_{II}$  نیز دارای مقدار ماکزیمم خود می‌باشد.



شکل ۳- تغییرات ضرایب شدت تنش ترک در محیط بی‌نهایت که تحت تأثیر تنش کششی در بی‌نهایت قرار گرفته با زاویه قرارگیری ترک نسبت به افق

شکل (۴) دو ترک در محیط بی‌نهایت را نشان می‌دهد که تحت تأثیر تنش کششی در بی‌نهایت قرار گرفته‌اند. در این مدل تغییرات ضرایب شدت تنش نوک ترک‌ها با تغییر زاویه یکی از آنها نسبت به افق بررسی گردیده است.

طول ترک نیز  $2a$  می‌باشد.  $d$  فاصله مرکز ثقل ترک از مرکز دایره می‌باشد.  $d/a$  برابر ۳ می‌باشد. نتایج به‌دست آمده به خوبی با نتایج به‌دست آمده در مرجع [۱۰]، همخوانی دارد. دوایری که در امتداد قائم قرار دارند تمایل به افزایش ضریب شدت تنش مود اول ( $K_I$ ) و دوایری که در امتداد افقی قرار دارند، تمایل به کاهش آن دارند. در جمع تمایل به کاهش  $K_I$  در مدل غالب می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌گردد از زاویه  $67.5^\circ$  به بعد مقدار  $K_I$  پایدار می‌گردد. شکل (۲) سه ترک هم امتداد، در محیط بی‌نهایت را نشان می‌دهد که دارای طول مساوی  $2a$  می‌باشند. در این مدل تغییرات ضرایب شدت تنش با فاصله میان ترک‌ها بررسی شده است.

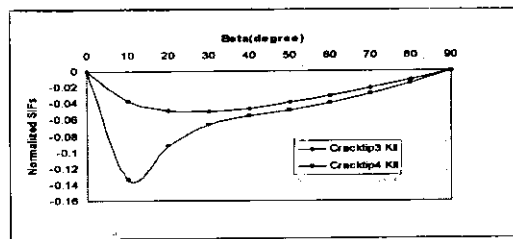
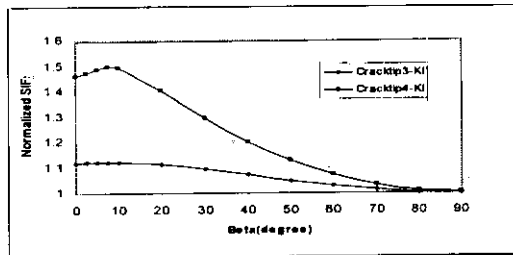
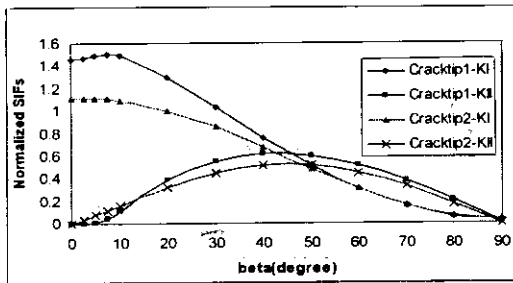
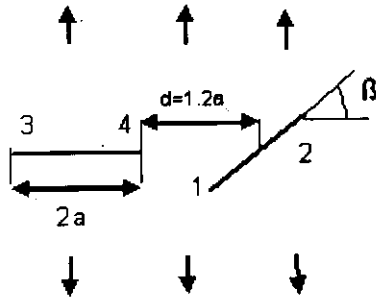


شکل ۲- تغییرات ضریب شدت تنش در ترک میانی از سه ترک هم امتداد که در بی‌نهایت تحت تأثیر تنش کششی عمود بر صفحه ترک‌ها قرار دارند با فاصله ترک‌ها

مشاهده می‌گردد که پاسخ‌های به‌دست آمده به خوبی با جواب‌های به‌دست آمده در مرجع [۸] همخوانی دارد. این مدل در مرجع [۱۲] نیز بررسی گردیده است.

در این مدل با افزایش فاصله ترک‌ها، مقدار  $K_I$  کاهش یافته، به یک نزدیک می‌شود.

شکل (۳) یک ترک مایل در محیط بی‌نهایت را نشان می‌دهد که از دو طرف تحت تأثیر تنش کششی قرار گرفته است. در این



شکل ۴- تغییرات ضرایب شدت تنش در دو ترک در محیط بی‌نهایت با زاویه قرارگیری یکی از ترک‌ها نسبت به افق

شکل (۵) یک ترک در محیط بی‌نهایت را نشان می‌دهد که دو ترک بطور متقارن آنرا احاطه نموده اند. فاصله ترک‌ها برابر  $1/2a$  است. در این مدل تغییرات ضرایب شدت تنش با زاویه ترک میانی نسبت به افق بررسی می‌گردد. در این مدل ضرایب شدت تنش نسبت به شکل (۴) افزایش دارند که با اضافه شدن یک ترک نسبت به مدل قبل امری منطقی به نظر می‌رسد.

مشاهده می‌گردد که مقادیر KI درنوک ترک شماره ۱ نسبت به شکل (۳) افزایش داشته است.

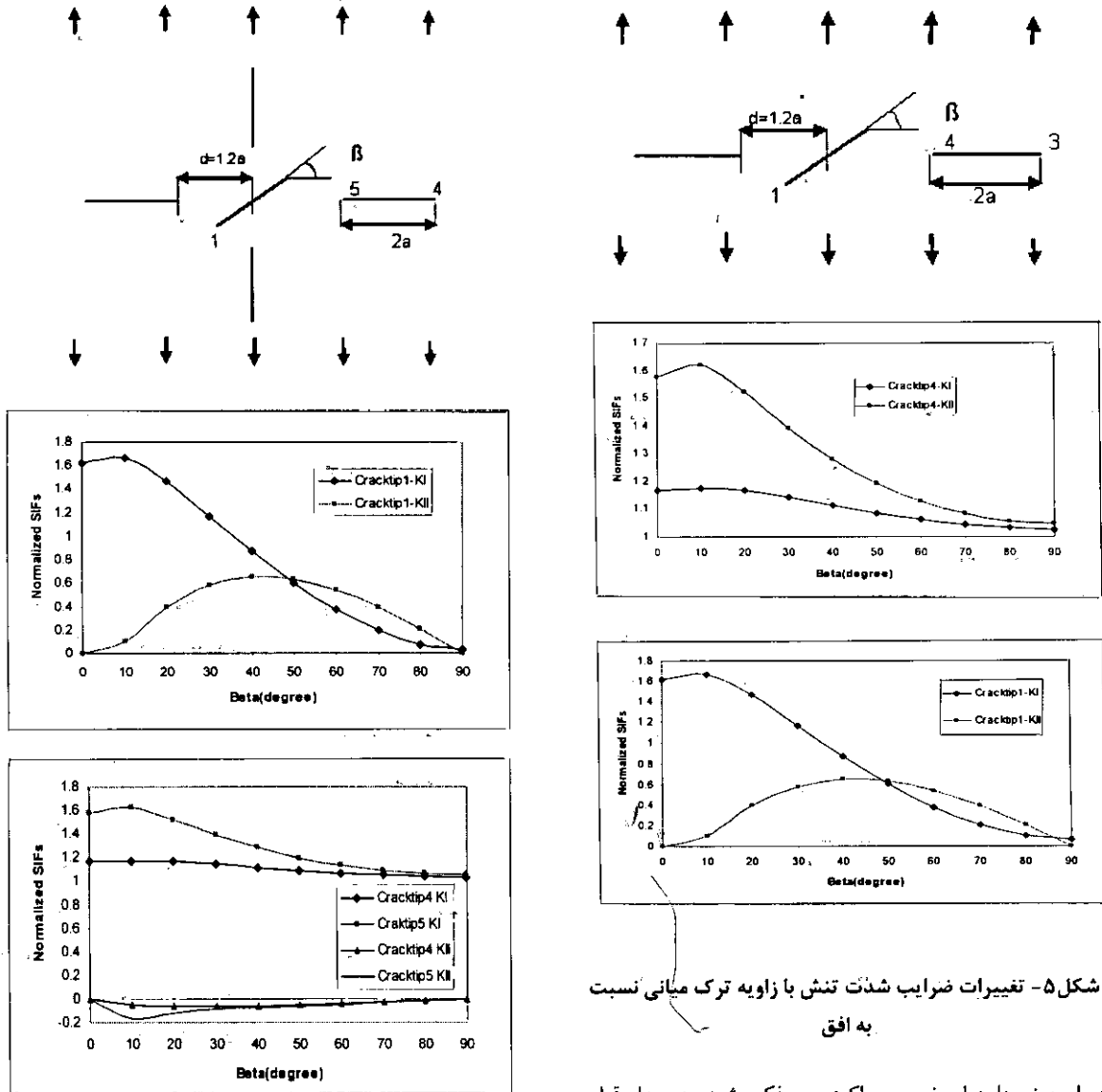
مقدار KI درنوک ترک شماره ۱ در زاویه  $7/5^\circ$  دارای ماکزیم مقدار خود می‌باشد ولی در شکل (۳) چنین ماکزیمی مشاهده نمی‌گردد.

این ماکزیم در نوک ترک‌های ۳ و ۴ نیز مشاهده می‌گردد ولی درنوک ترک شماره ۲ وجود ندارد از بررسی‌های دیگر نتیجه می‌شود که با افزایش فاصله دو ترک این ماکزیم به سمت راست نمودار منتقل می‌گردد و زمانی که فاصله ترک‌ها به  $1/8 a$  برسد این ماکزیم بطور کامل محو می‌گردد. بنابر این، این مسئله می‌تواند به دلیل اندرکنش ترک‌ها باشد که با افزایش فاصله ترک‌ها تأثیر خود را از دست می‌دهد.

مقدار KII در نقطه ۱، نیز ثابته درجه با سرعت کمتری افزایش می‌یابد و حتی مقدار آن تا قبل از این زاویه از مقادیر KII در شکل (۳) کمتر می‌باشد و در عین حال قدر مطلق KII در نقطه ۴ تا ده درجه دارای افزایش و از آن پس دچار کاهش می‌گردد. به نظر می‌رسد این مساله با ماکزیم مشاهده شده در نمودارهای KI کاملاً مرتبط باشد. از ده درجه به بعد مقادیر KII درنوک ترک شماره ۱ نسبت به شکل (۳) افزایش یافته و جهت تقعر در منحنی نیز عوض می‌شود.

مقادیر KI در نقطه ۱ از مقادیر آن در نقطه ۲ بیشتر است که امری منطقی به نظر می‌رسد. نکته قابل توجه این است که این دو مقدار از زاویه  $55^\circ$  به بعد کاملاً بر یکدیگر منطبق می‌گردند. گویی این عدم تقارن در مدل دیگر روی مقادیر KI تأثیر نمی‌کند. این مقادیر نیز به میزان اندکی از مدل شکل (۳) بیشتر می‌باشند.

در نود درجه این مقادیر کاملاً صفر نمی‌شوند و به میزان بسیار ناچیزی از آن فاصله دارند. این اثر ناچیز، اثر اندرکنش ترک‌ها می‌باشد. این مورد در نمودارهای KII نیز مشاهده می‌گردد با این تفاوت که مقدار آنها از زاویه  $55^\circ$  به بعد به هم نزدیک می‌گردد. در نود درجه نیز مقدار آنها کاملاً صفر نمی‌گردد. بنابر این می‌توان نتیجه گرفت با تغییر زاویه قرارگیری ترک از  $55^\circ$  به بعد، اثر اندرکنش ترک‌ها را می‌توان ناچیز فرض نمود.



شکل ۵- تغییرات ضرایب شدت تنش با زاویه ترک میانی نسبت به افق

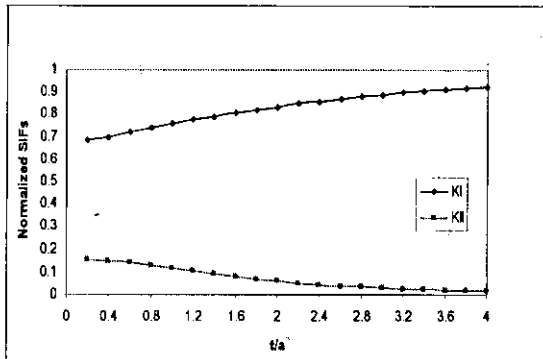
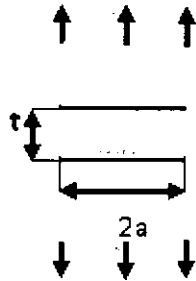
شکل ۶- تغییرات ضرایب شدت تنش با زاویه ترک میانی نسبت به افق

در این نمودارها حضور ماکزیمم ذکر شده در مدل قبل بیشتر احساس می‌گردد. برخلاف مدل قبل ضرایب شدت تنش در نقاط ۳ و ۴ در زاویه نود درجه مخالف صفرند و این بیانگر تأثیر بیشتر اندرکنش ترک‌ها می‌باشد.

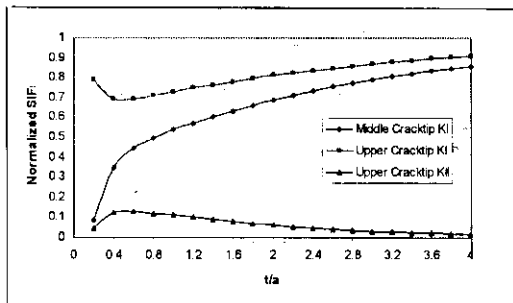
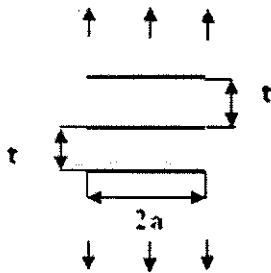
شکل (۶) یک ترک در محیط بی‌نهایت را نشان می‌دهد که چهار ترک دیگر به صورت مستقارن آنرا احاطه کرده‌اند. فاصله نوک ترک‌ها از مرکز ترک میانی  $1/2a$  می‌باشد. در این مدل تغییرات ضرایب شدت تنش ترک‌ها با زاویه ترک میانی نسبت به افق بررسی می‌گردد. ملاحظه می‌گردد که ضرایب شدت تنش در این مدل نسبت به مدل قبل تفاوت محسوسی نکرده است. بنابر این می‌توان نتیجه گرفت که حضور ترک‌های قائم که موازی راستای



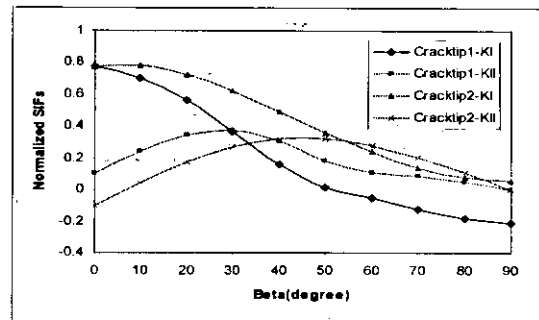
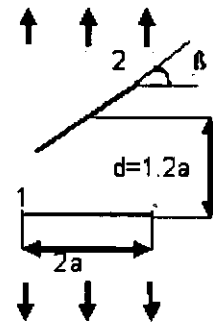
میدان تنشی است که در مدل قبل نیز عنوان شد. با افزایش فاصله ترک‌ها این اختلاف کاهش میابد و مقادیر KI نیز به یک نزدیک می‌شود.



شکل ۸- تغییرات ضرایب شدت تنش دو ترک موازی با فاصله t



شکل ۹- تغییرات ضرایب شدت تنش در سه ترک موازی با تغییر فاصله بین آنها



شکل ۷- تغییرات ضرایب شدت تنش دو ترک با فاصله قائم d، با زاویه ترک بالایی نسبت به افق

شکل (۷) دو ترک را نشان می‌دهد که فاصله مراکز آنها در امتداد قائم برابر  $1/2a$  است. در این مدل تغییرات ضرایب شدت تنش با زاویه ترک بالایی نسبت به افق بررسی می‌گردد. نکته جالب کمتر شدن مقدار KI در نقاط ۱ و ۲ است. یعنی در اینجا حضور ترک پایین اثر کاهشی روی ترک بالایی داشته است. بدین معنا که حضور دو ترک در چنین مدلی باعث کاهش تنش در محیط میان دو ترک می‌گردد.

ماکزیمم مشاهده شده در مدل‌های قبل در این مدل وجود ندارد. ضرایب شدت تنش نیز در زاویه صفر، مقداری مخالف صفر دارند. تمامی این موارد به دلیل تغییراتی است که در میدان تنش محیط میان دو ترک ایجاد شده است. برای درک بهتر این مسئله می‌توان مدل دو ترک موازی را بررسی نمود.

شکل (۸) دو ترک موازی را نشان می‌دهد. در این مدل تغییرات ضرایب شدت تنش با فاصله میان دو ترک بررسی می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، دو ترک مقدار KI کمتری نسبت به یک ترک تنها دارند. همچنین با توجه به اینکه شکل متقارن است انتظار می‌رود که KII صفر باشد ولی چنین نیست. مقدار KII در فاصله کم دو ترک قابل توجه است. اما با افزایش فاصله آنها کاهش یافته، به سمت صفر میل می‌کند. این به دلیل اختلاف

۷- نتیجه‌گیری

با استفاده از روش المان مرزی و المان مرزی دوگانه، نرم افزاری تهیه گردیده است که از طریق آن می‌توان با دقت خوبی به بررسی مسائل مکانیک شکست پرداخت. ابتدا روش‌ها و نرم‌افزار تهیه شده با نتایج موجود در مراجع دیگر مقایسه و بررسی شد و صحت آن مشخص شد. سپس مدل‌های مختلفی از قرارگیری ترک‌ها مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از تحلیل با استفاده از ضرایب شدت تنش بیان گردید.

مشاهده شد که حضور ترک‌های قائم یا به عبارتی ترک‌های موازی با جهت بارگذاری در حالت استاتیکی تأثیری روی ضرایب شدت تنش ندارد. همچنین ترک‌ها بسته به نحوه قرارگیریشان نسبت به هم، می‌توانند اثرات کاهشی یا افزایشی قابل توجهی روی یکدیگر داشته باشند و حتی در بعضی موارد مانع از رسیدن بار به برخی ترک یا ترک‌ها گردند.

از بررسی‌های صورت گرفته می‌توان نتیجه گرفت که با استفاده از روش المان مرزی می‌توان با سهولت و دقت بیشتر به بررسی مدل‌های پیچیده مکانیک شکست پرداخت. علاوه بر نرم‌افزار تهیه شده، علاوه بر سهولت مدلسازی و سهولت تغییر در هندسه مدل، دارای قابلیت افزایش تعداد المان‌ها به راحتی در یک مدل و نیز قابلیت اضافه کردن ترک‌های جدید بدون تغییر هندسه‌های قبلی می‌باشد.

با توجه به قابلیت استفاده از روش‌های بالا در تحلیل مدل‌های دینامیکی و سه بعدی علاوه بر مدل‌های پیچیده الاستواستاتیکی، راه برای بسیاری از تحقیقات لرزه‌شناسی نیز هموار خواهد گردید.

مراجع

[1] امیدوار، بابک (۱۳۸۰) "بررسی پایداری دینامیکی سدهای بتنی ترک خورده با استفاده از روش المان مرزی دوگانه در فضای زمانی" رساله برای اخذ دکترا، مهندسی سازه، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

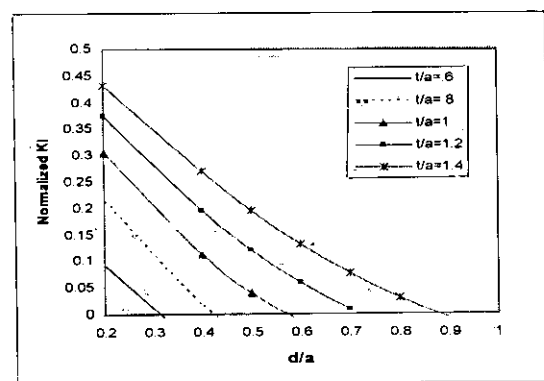
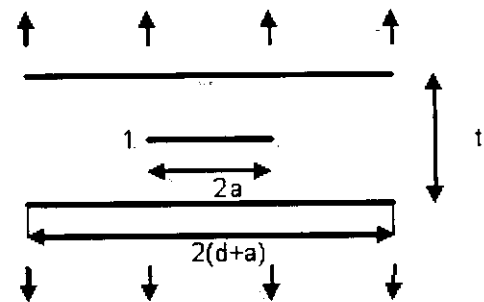
[2] A. A. Becker (1992), "The Boundary Element Method in Engineering" University of Nottingham, England.

[3] Kare Hellan, (1985), "Introduction to Fracture Mechanics" University of Trondheim, Norway.

[4] M. Isida, D. H. Chen, H. Nisitani (1983), "Plane problems of an arbitrary array of cracks emanating from the edge of an elliptical hole", Eng. Fract. Mech. 21:993-1007.

شکل (۹) سه ترک موازی با فاصله یکسان را نشان می‌دهد. در این مدل تغییرات ضرایب شدت تنش با فاصله ترک‌ها بررسی می‌گردد. در فاصله کمتر ترک‌ها، مقدار KI در ترک وسط تقریباً صفر است و با افزایش فاصله ترک‌ها مقدار آن افزایش می‌یابد. این به دلیل کوچک بودن میدان تنش در محیط میان ترک‌ها هنگام کوچک بودن فاصله آنها است.

بنابر این می‌توان انتظار داشت که اگر طول ترک‌های بالا و پایین افزایش یابد میدانی عاری از تنش در اطراف ترک میانی ایجاد گردد که در نتیجه آن ضرایب شدت تنش صفر می‌گردند. شکل (۱۰) به خوبی این مطلب را نشان می‌دهد. در این مدل تغییرات KI ترک میانی با فاصله و طول ترک‌های بالا و پایین بررسی گردیده است. مشاهده می‌گردد، هرچه فاصله ترک‌ها بیشتر باشد، برای ایجاد میدان تنش صفر در ترک میانی ترک‌های بالا و پایین باید طول بیشتری داشته باشند.



شکل ۱۰- تعیین سطح سایه برای سه ترک موازی در نوک ترک

- [17] P. Tong , T. H. H. Pian, S. J. Lasry , (1973) " A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity " , *Int. J. Numer. Meth. Eng.* , 7 -297-308.
- [18] C. H. Yang , A. K. Soh , (2002) " Modeling if voids/cracks and their interactions" , *Appl. Fract. Mech.* 38 -81-101.
- [19] T. A. Cruse , (1988) " Boundary element analysis in computational fracture mechanics" , Kluwer Academic Publishers.
- [20] Th. Seeling, S. Rafiee , D. G ross, (2000) " A simple method for investigation of elastic bodies of finite size containing many cracks " , *Int. J. Eng. Science.* 38 -1459-1472.
- [21] T. A. Cruse, W. Van Buren, ( 1971) " Three Dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack " , *Int. J. Fract. Mech.* , 7 -1-15.
- [22] G. E. Blandford, A. R. Ingraffea, Ligget , (1981) " Two dimesional stress intensity factor computation using the boundary element method " , *Int. J. Numer. Methods Eng.* , 17 -387-404.
- [23] Portela A, Aliabadi MH ,and Rooke DP (1992), "Dual Boundary Element Method: Efficient implementation for cracked problems" ,*Int. J. Numer. Methods Eng.* 33, 1269-1287.
- [24] Mi, Y. and Aliabadi MH, (1992) "Dual Boundary Element Method for Three Dimensional Fracture Mechanics Analysis" , *Eng. Anal. With Boundary Elements* 10 -161-171.
- [25] Irwin GR, (1957) "Analysis of Stresses and Stains near the End of a Crack Traversing a Plate".
- [26] P. Fedelinski, M. H. Aliabadi and D. P. Rooke, (1995) " A single region time domain BEM for dynamic crack problems" , *Int. J. Solids Structures*, 32-3555-3571.
- [5] G. C. Sih., (1973) "Handbook of stress intensity factor "Lehigh University, Bethlehem, A.
- [6] Y. Z. Chen , ( 1984) "General case of multiple crack problems in an infinite plate " , *Eng. Fract. Mech.* 20 ,591-597.
- [7] H. Tada, P. Paris , G. Irwin, (1985) "The stress analysis of cracks Handbook " ,Paris Production Inc., St. Louis, MO.
- [8] M. Isida , (1970) " Analysis of stress intensity factors for plates containing random array of cracks " , *Jpn. Soc. Mech. Eng.* 13 , 635-642.
- [9] M. Isida , (1970) "On determination of stress intensity factors for some common structural problems (1993), " *Eng. Frac. Mech.* , 2 ,61-79.
- [10] K. X. Hu , A. Chandra and Y .Hung,(1992)," Multiple Void- Crack Interaction" , *Int. J. Solids and Structures*, 30,11, 1473-1489.
- [11] Cartwright, D. J. , Rooke , D. P. , (1974) " Approximate stress intensity factors compounded from known solutions " , *Eng. Frac. Mech.* , 6,563-571.
- [12] Stefan D Pastrama, Paulo M S T de Castro, (2001) " Stress Intensity Factor Using the Compounding Method", Project founded by the European community under the competitive and sustainable growth Program.
- [13] L. Gorbatikh , M. Kachanov , (2000) " A Simple technique for constructing the full stress and displacement fields in elastic plates with multiple cracks " , *Eng. Fract. Mech.* , 66 ,51-63.
- [14] M. Kaconov, (1987) " Elastic solids with many cracks : a simple method of analysis " , *Int. J. Solids Struc.* , 23 ,23-43.
- [15] A.K. Soh , (1992) " An improved method for determining free boundary stresses " , *J. Strain Anal.* , 27-2 -93-99.
- [16] A. K. Soh, (1999) " Development of special finite elements for free boundaries" , *Int. J. Solids Struct.* , 36-6 -899-917.