

## تعیین مدل ماهواره‌ای مناسب برای محاسبه اسفروئید در ایران

خسرو مقتصدآذر  
مهدی نجفی علمداری  
استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده عمران، دانشگاه تبریز  
دانشیار دانشکده مهندسی ژئودزی و ژئوماتیک، دانشگاه صنعتی خواجه  
نصیرالدین طوسی تهران

### چکیده:

این پژوهش میزان انحراف معیار اسفروئید تا درجه و مرتبه ۲۰ را در حالت استفاده از مدل‌های ماهواره‌ای مختلف مورد بررسی قرار می‌دهد. برای بررسی این موضوع از انحراف معیار ضرائب پتانسیل، در مدل‌های گوناگون استفاده شده است. با توجه به نتایج انجام شده، ملاحظه می‌شود که در حالت استفاده از مدل ماهواره‌ای EIGEM-GL04C، انحراف معیار برای اسفروئید ایران، تا درجه و مرتبه ۲۰، کمتر از حالتی است که از سایر مدل‌های ماهواره‌ای برای محاسبه اسفروئید استفاده می‌شود. کلمات کلیدی: اسفروئید، مدل ژئوپتانسیل، ژئوئید، ثقل.

## Determination of the Best Satellite Geopotential Model for the Spheroid Computation in IRAN

K. Moghtased-Azar Dept. of Surveying, Faculty of Eng. Tabriz University  
M. Najafi Alamdari Dept. of Geodesy, Faculty of geodesy & Geomatics  
Engineering, K.N. Toosi University of Technology

### Abstract

In this paper, the standard deviation of the spheroid up to degree and order 20 in Iran, when using various satellite-derived geopotential models, has been studied. For the comparison, the standard deviations of potential coefficients in various geopotential models are examined. According to the results, the EIGEM-GL04C geopotential model up to degree and order 20 showed small standard deviation over the territory of Iran.

**Key words:** Spheroid, Geopotential Model, Geoid, Gravity.

## ۱- مقدمه

قسمت باقی‌مانده ژئوئید از حل انتگرال اسفروئیدی<sup>(۵)</sup> استوکس روی ژئوئید بدست می‌آید این انتگرال به لحاظ وجود کرنل اسفروئیدی با طیف فرکانس‌های بالا به مانند یک فیلتر<sup>(۶)</sup> بصورت اتوماتیک سهم فرکانس‌های کوتاه را از داده‌های سطحی، حذف می‌کند.

در محاسبه اسفروئید، هر مدل ماهواره‌ای ژئوپتانسیل، علاوه بر ضرائب پتانسیل، شامل انحراف معیار ضرائب پتانسیل نیز می‌باشد که مربوط به خطاهای ردیابی ماهواره بوده و بیانگر دقت ضرائب پتانسیل می‌باشند.

در هنگام محاسبه اسفروئید می‌توان از انواع مدل‌های ماهواره‌ای ژئوپتانسیل استفاده کرد ولی بهتر است که قبل از استفاده از آنها، مقدار واریانس بدست آمده برای اسفروئید، که حاصل از انحراف معیار ضرائب پتانسیل می‌باشند را حساب کرده و سپس آنها را مورد استفاده قرار داد.

هدف ما در تعیین ژئوئید، رسیدن به دقت حدود چند سانتی‌متر می‌باشد بنابراین بایستی از مدل‌های ماهواره‌ای استفاده کرد که اسفروئید بدست آمده از آن ضرائب آن، دارای مینیمم انحراف معیار باشد.

## ۲- میدان واقعی پتانسیل ثقل زمین<sup>(۷)</sup>

پتانسیل ثقل واقعی زمین ( $W$ )، مجموع پتانسیل جاذبه ( $W_g$ ) و پتانسیل گریز از مرکز ( $W_c$ ) می‌باشد:

$$W = W_g + W_c \quad (1)$$

در کاربردهای دینامیکی ماهواره برای تعیین پتانسیل ثقل، یک مدل هارمونیک برای پتانسیل بصورت یک سری بی‌نهایت از توابع هارمونیک در نظر گرفته می‌شود که در سیستم مختصات کروی ژئوسنتریک بصورت زیر فرموله می‌گردد:

$$W_g(r, \Omega) = \frac{GM}{r} - \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n W_n(\Omega) \quad (2)$$

به دلیل مشکلات اندازه‌گیری شتاب ثقل در سطح زمین روش زمینی گراویمتری<sup>(۱)</sup> به تنهایی نمی‌تواند سطح ژئوئید را در کلیه طیف‌های آن مشخص و نمایان سازد. بنابراین یک روش ترکیبی با استفاده از دو نوع داده: داده‌های ماهواره‌ای و داده‌های زمینی، معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد. اولین نوع از داده‌ها، یک سری داده‌های هموزن بوده و بدلیل اینکه ماهواره‌ها میدان ثقل زمینی را در فرکانس‌های بالا، به دلیل وجود ارتفاع آنها از سطح زمین، حسن نمی‌کنند، این نوع داده‌ها تنها در باند فرکانس‌های کوتاه قابل اعتماد می‌باشند. نوع دوم داده‌ها، انامولی‌های جاذبه سطحی می‌باشند<sup>(۲)</sup> و بدلیل اینکه مشاهدات ثقل در روی سطح زمین در مناطق، پراکنده توزیع شده‌اند. بنابراین، این نوع از داده‌ها تنها در باند فرکانس‌های کوتاه قابل اعتماد می‌باشند.

بطوری که ملاحظه می‌شود هرکدام از سری داده‌ها در باند فرکانس جداگانه قابل اعتماد بوده و حامل اطلاعاتی جداگانه از میدان ثقل زمین می‌باشند و برای استفاده مناسب از این داده‌ها در تعیین ژئوئید، بایستی برای هر نوع از داده‌ها، وزن آماری خاصی قائل شد.

برای پرهیز از دوبار استفاده از داده‌ها، یکی از روش‌ها این است که حد فرکانس مرزی مشخص و واضحی مابین انواع داده‌ها قائل شد. بدلیل اینکه ضرائب پتانسیل ماهواره تنها تا درجه و مرتبه ۲۰، از دقت مناسب برخوردارند، این درجه و مرتبه به عنوان مرز قابل قبولی برای هر دو نوع داده در نظر گرفته می‌شود [۹]. بنابراین ژئوئید در دو قسمت به شرح زیر قابل تعیین می‌باشد:

قسمت طول موج‌های بلند، تا درجه و مرتبه ۲۰، توسط میدان ژئوپتانسیلی ماهواره تعیین می‌شود و این قسمت از ژئوئید را اسفروئید رفرانس درجه بالاتر<sup>(۳)</sup> (نسبت به بیضوی نرمال) گویند. قسمتی از ژئوئید که شامل طول موج‌های کوتاه و یا به عبارت دیگر باقی‌مانده ژئوئید<sup>(۴)</sup> می‌باشد و از طریق داده‌های زمینی ثقل محاسبه می‌شود.

- 1- Gravimetric Method
- 2- Surface Gravity Anomalies
- 3- Higher-Degree Reference Spheroid
- 4- Residual Geoid

- 5- Spheroidal
- 6- High-pass Filter
- 7- Actual Gravity Field of the Earth

زمین، پتانسیل نرمال (U) می‌باشد که مولد آن بیضوی متوسط زمین می‌باشد که با سرعت زاویه‌ای معادل سرعت چرخش زمین حول محور اقصی خود دوران می‌کند بنابراین پتانسیل واقعی زمین را می‌توان بصورت زیر فرموله کرد:

$$W = U + T \quad (۶)$$

که در آن فرمول، پتانسیل زمان بصورت زیر فرموله می‌گردد:

$$U = U_g + W_c \quad (۷)$$

که در آن  $U_g$  قسمت جاذبی پتانسیل نرمال،  $W_c$  برابر پتانسیل گریز از مرکز زمین می‌باشد.

$U_g$  در فضای خارج از بیضوی یک تابع هارمونیک بوده و می‌تواند در سیستم مختصات ژئوسنتریک توسط یک تابع هارمونیک به سری بی‌نهایت بصورت زیر بسط داده شود [۱]:

$$U_g(r, \varphi) = \frac{GM^*}{r} - \frac{GM^*}{r} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{a^*}{r}\right)^n J_n^N P_n(\sin\varphi) \quad (۸)$$

در فرمول فوق  $a^*$  قطر اطول بیضوی نرمال،  $M^*$  جرم بیضوی نرمال،  $r$  شعاع ژئوسنتریک نقطه مورد محاسبه،  $J_n^N$  ضرایب پتانسیل نرمال می‌باشند که از فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$J_n^N = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3e^n}{(n+1)(n+3)} (1 - 0.5n + 2.5n \frac{J_2^N}{e^2}) \quad (۹)$$

ضریب  $J_n^N$  برای درجات زوج  $n$  تعریف می‌شود و تمامی ضرایب پتانسیل نرمال برای  $n$  های فرد صفر می‌باشند و  $e$  اولین خروج از مرکزیت<sup>(۴)</sup> و  $J_2^N$  ضریب درجه دوم می‌باشد. ضرایب  $J_n^N$  برای  $n > 8$  به سمت صفر میل می‌کند [۸].

شتاب ثقل نرمال ( $\gamma$ )، اندازه بردار ثقل نرمال، را می‌توان برحسب مشتقات پتانسیل نرمال در امتداد خط نرمال بر بیضوی

که در آن  $r$  شعاع ژئوسنتریک نقطه مورد محاسبه بوده و  $\Omega$  موقعیت مسطحاتی نقطه مورد محاسبه،  $a$  شعاع کره بریلیون<sup>(۵)</sup> کره ژئوسنتریکی با مینیمم شعاع طوری که بتواند کل کره زمین را فراگیرد، و  $W_n$  هارمونیک‌های سطحی کروی می‌باشند:

$$\forall_n \geq 2; W_n(\Omega) = \sum_{m=0}^n [\overline{w_{nm}^c} \overline{Y_{nm}^c}(\Omega) + \overline{w_{nm}^s} \overline{Y_{nm}^s}(\Omega)] \quad (۳)$$

ضرایب پتانسیل نرمالیزه شده و بدون واحد فیزیکی بوده و  $\overline{Y_{nm}^c}$  و  $\overline{Y_{nm}^s}$  هارمونیک‌های کروی نرمالیزه شده از درجه  $n$  و مرتبه  $m$  می‌باشند [۱]:

$$\overline{Y_n^c} = \sqrt{2n+1} P_n(\sin\varphi); m=0 \quad (۴)$$

$$\left(\frac{\overline{Y_{nm}^c}}{\overline{Y_{nm}^s}}\right) = \sqrt{2(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left(\frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda}\right) P_m(\sin\varphi); m \neq 0$$

که  $P_n$  چند جمله‌ای‌های لژاندر<sup>(۶)</sup> و  $P_{nm}$  توابع لژاندر<sup>(۷)</sup> از درجه  $n$  و مرتبه  $m$  می‌باشند. ثقل واقعی ( $g$ )، مقدار و اندازه بردار ثقل همان قدر مطلق حاصل از گرادیان پتانسیل واقعی می‌باشد. مقدار بردار ثقل مساوی گرادیان قائم پتانسیل با علامت منفی می‌باشد [۹]:

$$g = |\nabla W| = -\frac{\partial W}{\partial H} \quad (۵)$$

### ۳- انامولی پتانسیل

به دلیل اینکه تغییرات پتانسیل ثقل ( $W$ ) در مقایسه با مقدار آن بسیار کوچک می‌باشد، قسمت عمده پتانسیل بصورت ریاضی قابل بیان می‌باشد و قسمت باقی‌مانده آن را انامولی پتانسیل نامیده که مقدار آن ( $10^{-5}W$ ) می‌باشد و بنابراین مقدار آن بسیار کوچک بوده، و براحتی می‌توان تقریبات کروی را در مورد آن بکار برد. ساده‌ترین و در عین حال نزدیکترین مدل به پتانسیل واقعی

- 1- Brillouin Sphere
- 2- Legendre Polynomials
- 3- Associated Legendre Functions

۴- ارتفاع ژئوئید<sup>(۳)</sup>

ارتفاع ژئوئید (N)، از طریق انامولی پتانسیل T (در روی ژئوئید،  $T_g$ ) با استفاده از فرمول دوم برونز<sup>(۴)</sup> بصورت زیر بدست می‌آید:

$$N(\Omega) = \frac{T_g(\Omega)}{\gamma_0} \quad (14)$$

این فرمول از بسط سری تیلور<sup>(۵)</sup> پتانسیل شمال روی بیضوی رفرانس با فرض،  $W_0 = U_0$  بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$U_g = U_0 + \frac{\partial U}{\partial H} \left| N + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial H^2} N^2 + \dots \right. \quad (15)$$

که  $W_0$  پتانسیل ژئوئید می‌باشد. در صورت وجود شرط  $U_0 \neq W_0$ ، بایستی تصحیحی به سری تیلور اضافه شود [1]. با در نظر گرفتن معادله (۱۰) و انجام ساده سازی‌هایی خواهیم داشت:

$$N(\Omega) = \frac{T_g(\Omega)}{\gamma_0} = \frac{1}{2\gamma_0} \frac{\partial \gamma}{\partial H} N^2 + \dots \quad (16)$$

باتقریب  $\gamma_0 = 10^6 m$  و  $\frac{\partial \gamma}{\partial H} = 0.3 \frac{mgal}{m}$ ، ترم دوم سری فوق متساوی  $1.5 \times 10^{-7} N^2$  می‌شود که برای رسیدن به ژئوئیدی دز حد سانتی‌متر این تصحیح قابل نظر کردن می‌باشد [۱۰].

۵- میدان ثقل بدست آمده از ماهواره برای زمین<sup>(۵)</sup>

طول موج‌های بلند میدان ثقل زمین می‌تواند از آنالیز اغتشاشات<sup>(۶)</sup> مسیر ماهواره‌ای که در ارتفاع پایین قرار دارند بدست آید. این واقعیت از آنجا ناشی می‌شود که ماهواره‌ها در ارتفاعات مذکور، طول موج‌های بلند میدان ثقل را بخوبی حس

می‌توان آن را در (n) بدست آورد و در نهایت با حفظ دقت کافی، می‌توان آن را در امتداد ارتفاع اورتومتريک<sup>(۱)</sup> بدست آورد:

$$\gamma = |\nabla U| = \frac{-\partial U}{\partial H} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۱)، (۶) و (۷) مقدار T، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$T(r, \Omega) = W_g(r, \Omega) - U_g(r, \Omega) \quad (11)$$

بدلیل اینکه  $U_g$  و  $W_g$  در ابعاد خارج از زمین توابعی هارمونیک می‌باشند پس T تابعی هارمونیک در بیرون سطح زمین خواهد بود. با در نظر گرفتن معادلات (۲) و (۸)، فرمول T بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$T(r, \Omega) = \frac{GM}{r} T_0 - \frac{GM}{r^n} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n T_n(\Omega) \quad (12)$$

که  $T_0$  هارمونیک درجه صفر بوده و برای  $M^* = M$ ، به سمت صفر میل خواهد کرد و  $T_n$  هارمونیک‌های سطحی انامولی پتانسیل می‌باشد که:

$$n \geq 2; T_n(\Omega) = \sum_{m=0}^n [\overline{T_{nm}}^c \overline{Y_{nm}}^c(\Omega) + \overline{T_{nm}}^s \overline{Y_{nm}}^s(\Omega)] \quad (13)$$

که  $\overline{T_{nm}}^c$  و  $\overline{T_{nm}}^s$  ضرایب انامولی پتانسیل می‌باشند.

در بدست آوردن T از طریق معادلات (۲) و (۸) فرض بر این بود که سیستم مختصات یک سیستم مختصات ژئوسنتریک کروی می‌باشد بنابراین این معادله (۱۲) نیز در یک سیستم مختصات ژئوسنتریک صادق می‌باشد؛ اگر چنانچه سیستم مختصات ژئوسنتریک نباشد، در فرم طیفی T، هارمونیک درجه اول ظاهر خواهد شد [۱].

- 3- Bruns Second Formula
- 4- Taylor Series
- 5- Satellite-Derived Gravity Field of the Earth
- 6- Perturbation

- 1- Orthometric Height
- 2- Geoidal Height

در سرشکنی مشاهدات ردیابی ماهواره، پتانسیل ثقل زمین<sup>۵</sup> در سیستم مختصات تعریف شده در شبکه ایستگاه‌های ردیاب<sup>۶</sup>، به سری هارمونیک‌های کروی بسط داده می‌شود که در صورت انطباق سیستم مختصات فوق با سیستم مختصات ژئوستریک، بسط سری فوق، فاقد هارمونیک مرتبه اول خواهد بود. بنابراین طول موج‌های بلند (از درجه و مرتبه کمتر از  $L$ ) میدان ثقل بدست آمده از ماهواره بصورت زیر فرموله می‌گردد:

$$W_L(r, \Omega) = \frac{GM}{\gamma} W_0 - \frac{GM}{\gamma} \sum_{N=2}^L \left(\frac{\hat{a}}{r}\right)^N W_N(\Omega) \quad (17)$$

در رابطه فوق  $\hat{M}$  جرم زمین به علاوه جرم اتمسفر بدست آمده از ماهواره می‌باشد و  $W_0$  هارمونیک مرتبه صفر در سری فوق می‌باشد. حال اگر چنانچه جرم مساوی همان مقدار اولیه جرم ( $\hat{M}$ ) در سرشکنی در نظر گرفته شود، هارمونیک مرتبه صفر ( $W_0$ ) واحد خواهد بود و  $\hat{a}$  نصف قطر اطول بیضوی و  $W_N$  هارمونیک سطحی پتانسیل بدست آمده از ماهواره می‌باشد (معادله ۳).

#### ۶- میدان رفرنس درجه بالاتر<sup>۷</sup>

همانطوری که گفته شده میدان ثقل بدست آمده از ماهواره برای طول موج‌های بلند ژئوئید مناسب می‌باشد. بدلیل اینکه ماهواره‌های مورد استفاده در زوایای میل مختلف تمامی زمین را دور می‌زنند، از این لحاظ ضرایب تعیین شده به زبان آماری ناریب<sup>۸</sup> بوده و کمترین ابهام را دارا می‌باشند.

لزوم استفاده از ماهواره‌های ژئودزی در تعیین میدان پتانسیل از آنجا استنباط می‌شود که در حال حاضر داده‌های ثقل زمینی از تمامی نقاط سطح زمین موجود نمی‌باشد. حال برای سهولت، پتانسیل ثقل را به قسمت طول موج‌های بلند ( $W_L$ ) و طول موج‌های کوتاه ( $W^L$ ) تجزیه می‌کنیم:

$$W = W^L + W_L \quad (18)$$

می‌کنند ولی در عوض تأثیر طول موج‌های کوتاه میدان ثقل در این ارتفاعات کمتر می‌شود بنابراین ماهواره‌ها این طول موج‌ها را حس نمی‌کنند زیرا که دامنه طول موج‌های میدان ثقل زمین از درجه و مرتبه ۲۰ و بالاتر از آن، ۴۰٪ کاهش می‌یابد [۹]. میدان ثقل بدست آمده از طریق ماهواره، مدل ژئوپتانسیل ماهواره‌ای<sup>۹</sup> نامیده می‌شود. این مدل معمولاً با یک سری توابع هارمونیک کروی با ضرائب مربوطه بیان می‌گردد. یک نوع از این مدل‌ها در سال ۱۹۹۵ توسط:

“Deutsches Geodatisches Forschungsinstitut, Abot, I” (DGFI)

ارائه گردیده مدل GRIM4 می‌باشد [۶]. از بین این مدل‌ها می‌توان به مدل GRIM4-S4 اشاره کرد که مدلی است که در آن صرفاً از مشاهدات ماهواره‌ای<sup>۱۰</sup> استفاده شده است و تا درجه و مرتبه ۶۰ می‌باشد و در آن از مشاهده به ۳۱ ماهواره به زوایای میل مختلف که در فاصله بین صفر درجه تا ۹۰ درجه عرض جغرافیایی توزیع شده‌اند، استفاده شده است.

یک ماهواره به تنهایی با یک زاویه میل مشخص، تنها می‌تواند قسمتی از طول موج‌های میدان ثقل زمین را مشخص نماید بنابر این دامنه نسبی هریک از مؤلفه‌های پریودیک که در داده‌های ماهواره‌ای وجود دارد عمدتاً به زاویه میل ماهواره وابسته می‌باشد و این بدان معنی است که طیف توان نسبی<sup>۱۱</sup> داده‌ها با زاویه میل ماهواره عوض می‌شود و در نتیجه ترکیب داده‌های بدست آمده از ماهواره‌های مختلف با زاویه میل مختلف می‌تواند بطور کامل طول موج‌های بلند میدان ثقل را مشخص نماید [۴].

یک آنالیز از حساسیت ضرائب پتانسیل مدل GRIM4 به اطلاعات اغتشاشی گردشی ماهواره نشان داد است که سهم اطلاعات اغتشاشی مذکور در ضرائب پتانسیل از درجه و مرتبه بالا به سرعت کاهش می‌یابد [۴].

یعنی با افزایش درجه و مرتبه ضرائب، درجه وابستگی آنها به اطلاعات اغتشاشی حقیقی، کمتر می‌شود و نشان داده شده است که ضرائب از درجه و مرتبه صفر تا درجه و مرتبه ۲۵، بیش از ۵۰٪ به اطلاعات اغتشاشی گردشی ماهواره<sup>۱۲</sup> وابسته هستند [۴].

5- Tracking Station Network  
6- Higher-Degree Reference Field  
7- Unbiased

1- Satellite-Derived Geopotential Model  
2- Purely Satellite-Derived Model  
3- Relative Power Spectrum  
4- Orbital Perturbation Information

$$N_L(\Omega) = \frac{GM}{r_g \gamma_0} T_n - \frac{GM^*}{r_g \gamma_0} \sum_{n=2}^L \left( \frac{\hat{a}}{r_g} \right)^n T_n(\Omega) \quad (26)$$

۷- واریانس اسفروئید از درجه L

برای برآورد خطا، کارکردن با تقریبات کروی اسفروئید، کافی می‌باشد [۹]:

$$N_L(\Omega) = R \sum_{n=2}^L T_n(\Omega) \quad (27)$$

که R شعاع متوسط زمین می‌باشد. واریانس اسفروئید مربوط است به خطاهای موجود در ضرائب مدل پتانسیل که وجود آنها نیز به دلیل وجود خطاهایی در ردیابی ماهواره می‌باشد. برای محاسبه واریانس اسفروئید، با در نظر گرفتن معادله (۱۳) و (۲۷) و اعمال قانون انتشار خطاها به معادله (۲۷) خواهیم داشت:

$$\delta^2 N_L(\Omega) = R^2 \sum_{n=2}^L \sum_{m=0}^n \left\{ \overline{T_{nm}^c}(\Omega)^2 \delta^2 \overline{T_{nm}^c} + \overline{Y_{nm}^s}(\Omega)^2 \delta^2 \overline{T_{nm}^s} \right\} \quad (28)$$

که در آن  $\delta T_{nm}^c$  و  $\delta T_{nm}^s$  به ترتیب انحراف معیار ضرائب پتانسیل ماهواره‌ای کسینوسی و سینوسی می‌باشند.

۸- نتایج عددی

کشور ایران در عرض جغرافیائی بین ۲۵ درجه و ۴۵ درجه و طول جغرافیائی بین ۴۰ درجه و ۶۵ درجه قرار دارد. بنا بر این برای محاسبه مناسب‌ترین اسفروئید حاصل از مدل‌های ژئوپتانسیل ماهواره‌ای گوناگون، از لحاظ کمتر بودن واریانس، مدل‌های ژئوپتانسیل ماهواره‌ای زیر انتخاب گردید:

مدل EIGEN-GL04C، مدل GGM02C [۷]، مدل GGM01C [۳]، مدل PGM2000a [۲]، مدل EGM96 [۵].

در هر ۵ مدل فوق، ضرائب پتانسیل تا درجه و مرتبه ۲۰ استفاده گردید و مقدار واریانس اسفروئید (فرمول ۲۸) برای هر ۵ مدل برای کشور ایران محاسبه گردید و نتایج حاصله به شرح زیر است (گراف‌های مربوطه در شکل‌های ۱ الی ۵ آورده شده است):

$W_L$  میدان ثقل بدست آمده از معادله (۱۷) بوده و پتانسیل فرانس از درجه بالاتر نامیده می‌شوند. حال می‌توان نوشت:

$$W_L = U + \delta U \quad (19)$$

که  $\delta U$  همان تفاضل پتانسیل فرانس درجه بالاتر و پتانسیل درجه دوم (U) می‌باشد. با مقایسه معادله (۱۹) و معادله زیر:

$$W_L = U + T_L \quad (20)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\delta U = T_L \quad (21)$$

که  $T_L$  طول موج‌های بلند انامولی پتانسیل (T) می‌باشد. با مقایسه معادلات (۸) و (۱۱) و (۱۷) داریم:

$$\delta U = T_L(r, \Omega) = \frac{GM^*}{r} T_0 - \frac{GM^*}{r} \sum_{n=2}^L \left( \frac{\hat{a}}{r} \right)^n T_n(\Omega) \quad (22)$$

که:

$$T_0 = \hat{W}_0 - \frac{M^*}{M} \quad (23)$$

و:

$$\forall n \geq 2, T_n(\Omega) = \hat{W}_n(\Omega) - \frac{M^*}{M^A} \left( \frac{a^*}{\hat{a}} \right)^n J_n^N P_n(\sin \varphi) \quad (24)$$

حال بر اساس  $\delta U(T_L)$  اسفروئید  $N_L$  نسبت به بیضوی فرانس به طریقه زیر از فرمول برونز بدست می‌آید:

$$N_L(\Omega) = \frac{T_L(\Omega)}{\gamma_0(\Omega)} \quad (25)$$

و فرم طیفی آن بصورت زیر می‌باشد:

۹- نتیجه‌گیری

PGM2000A، برای هر پنج مدل فوق، مقدار واریانس اسفروئید محاسبه گردید و ملاحظه شد که در حالت استفاده از مدل ماهواره‌ای EIGEN-GL04C انحراف معیار برای اسفروئید ایران، تا درجه و مرتبه ۲۰، کمتر از حالتی است که از سایر مدل‌های ماهواره‌ای برای محاسبه اسفروئید استفاده می‌شود.

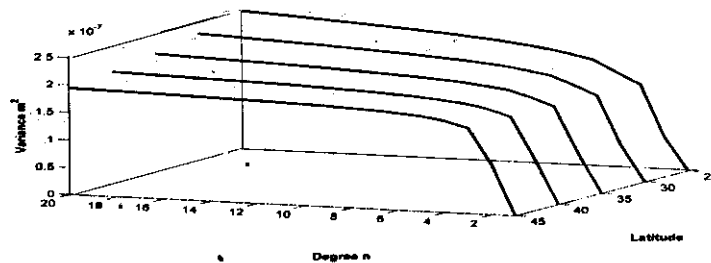
کشور ایران در عرض جغرافیایی بین ۲۵ درجه شمالی و ۴۵ درجه شمالی و طول جغرافیایی بین ۴۰ درجه شرقی و ۶۵ درجه شرقی قرار دارد. برای محاسبه مناسب‌ترین اسفروئید حاصل از مدل‌های ژئوپتانسیل ماهواره‌ای گوناگون، از لحاظ کمتر بودن واریانس، مدل‌های ژئوپتانسیل ماهواره‌ای زیر انتخاب گردید: EIGEN-GL04، GGM02C، GGM01C، EGM96

جدول ۱

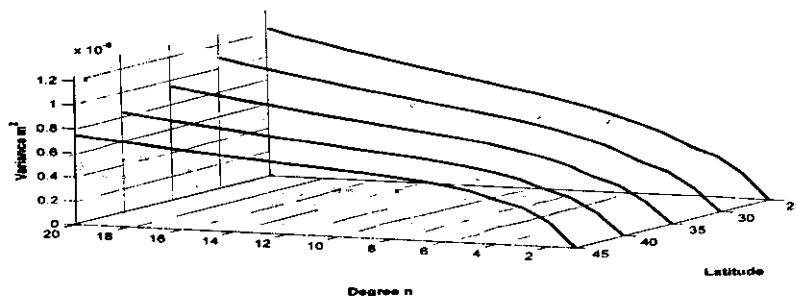
نام مدل	ماکزیمم انحراف معیار برای اسفروئید تا درجه و مرتبه ۲۰ برای کشور ایران
EIGEN-GL04C	0.06 cm
GGM02C	0.11 cm
GGM01C	0.17 cm
PGM2000a	4.33 cm
EGM96	4.93 cm

حاصل از این مدل، برای محاسبه اسفروئید تا درجه و مرتبه ۲۰ از این مدل استفاده گردد.

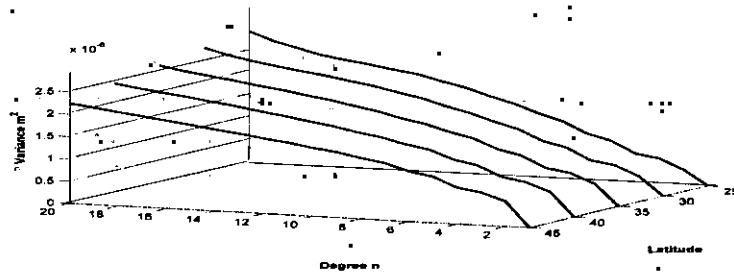
با مقایسه اعداد فوق معلوم می‌گردد که بهترین مدل از بین مدل‌های فوق مدل EIGEN-GL04C می‌باشد و پیشنهاد می‌گردد که با توجه به کمتر بودن واریانس بدست آمده برای اسفروئید



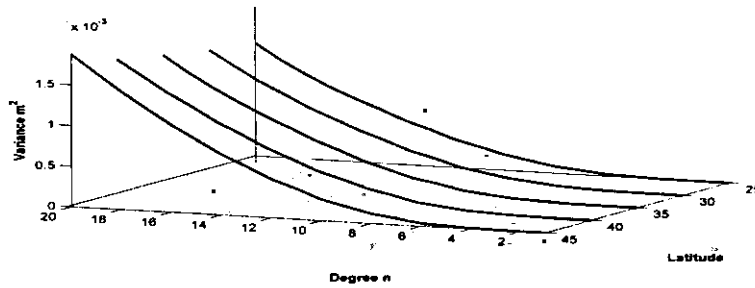
شکل ۱- واریانس اسفروئید حاصل از مدل EIGEN-GL04C در طول جغرافیایی ۵۵ و عرض‌های جغرافیایی متفاوت



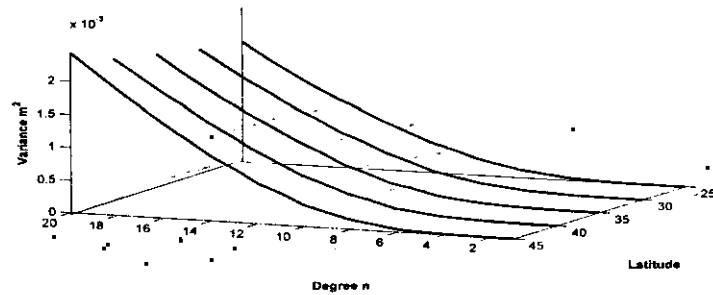
شکل ۲- واریانس اسفروئید حاصل از مدل GGM02C در طول جغرافیایی ۵۵ و عرض‌های جغرافیایی متفاوت



شکل ۳- واریانس اسفروئید حاصل از مدل GGM01C در طول جغرافیایی ۵۵ و عرض‌های جغرافیایی متفاوت



شکل ۴- واریانس اسفروئید حاصل از مدل PGM2000a در طول جغرافیایی ۵۵ و عرض‌های جغرافیایی متفاوت



شکل ۵- واریانس اسفروئید حاصل از مدل PGM06 در طول جغرافیایی ۵۵ و عرض‌های جغرافیایی متفاوت



- Team Meeting, Miami, Florida, November 2000, Manuscript for GJI in Preparation.
- [6] Schwintzer, P., ch. Reigber, A. Bode, Z. Kange, S.Y. Zhu, F.H. Massmann, J.C. Raimondo, R. Biancale, G. Balmino, J.M. Lemoine, B. Moynot, J.C. Marty, F. Barlier, and Y. Boudon (1995). Long-Wavelength Global Gravity Field Models: GRIM4-S4, GRIM4-C4. Geoforschungs Zentrum (GFZ, DIV.I), Potsdam, Germany and Groupede Recherche de Geodesie Spatiale (GRGS), Toulouse, Grasse.
- [7] Schwintzer, P., Reigber, ch., Bode, A., Gruber, Th., Konig, R., Massmann, F. – H., Raimondo, J.C., Schmidt, R., Zhu, S.Y., cGFZ Postdam): A New Global Earth's Gravity Field Model from Sate orbit perturbations: GRIM5-S1. Geophysical Research Letters 27. 3611-3614, 2000.
- [8] Vanicek, P. and A. Kleusberg (1987). The Canadian Geoid-Stokesian Approach. Manuscripta Geodaetica, 12, 86-98.
- [9] Vanicek, P. and E. Krakiwsky (1986). Geodesy: The concepts. NORTH-HOLLAND Publishing Company
- [10] Vanicek, P. and Z. Martinec (1994). The Stokes-Helmert Scheme for the Evaluation of a precise Geoid. Manuscripta Geodaetica, 19.119-128.
- مراجع
- [1] Heiskanen, W.A. and H. Moritz (1981). Physical Geodesy. Reprinted in the Institute of physical Geodesy, Technical University Graz, Austria, 1981.
- [2] Lemoine F.G. 1996 Development of NASA. GSFCIDMA Geopotential Model; in proceedings of IAG Symposium: Gravity, Geoid and Marine Geodesy, Tokyo; paper submitted and accepted.
- [3] Lerch, F.J, R.S. Nerem, B.H. Putney, T.L. Felsentreger, B.V. Sanches, S.M. Klosko, G.B. Patel, R.G. Williamson, D.S. chin, J.C. Chan, K.E. Rachlin, N.L. Chandler, J.J. Mccatrthy, J.A. Marshall, S.B. Luthcke, D.W. Pavlis, J.W. Robbins, S. Kapoor and E.C. Pavlis (1992). Geopotential Models of the Earth From Satellite Tracking, Altimeter and surface Gravity Observations: GEM-T3 and GEM-T3S. NASA. Technical Memorandum 104555. Godard Space Flight Center, Greenbelt, MD.
- [4] Najafi, M. (1996). Contributions Towards The computation of A precise Regional Geoid Ph.D. Thesis, Department of Geodesy and Geomatic Engineering, University of New Brun Swick, Fredericton, N.B., Canada.
- [5] N.K. Pavlis, D.S. Chinn, C.M. Cox and F.G. Lemoine: Geopotential Model Improvement Using POCM4-13 Dynamic Ocean Topography Information. PGM 2000A Presented at TOPEX/JASON science Working