آنالیز پایداری مقاوم کنترل‌کننده خطی در ربات‌ها با مفاصل انعطاف‌پذیر

حمیدرضا تقی‌راد — دانشیار دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
محمد اعظم خسروی — کارشناس ارشد و مدیر گروه برق، شرکت پایا پرتو، تهران

چکیده

در این مقاله الگوریتم جدید وکاملا خطی برای کنترل مقاوم ربات‌های با مفاصل انعطاف پذیر (FJR) ارائه می‌گردد. بدین منظور ابتدا دینامیک ربات صُلب و کنترل PID آن مورد توجه قرار می‌گیرد. سپس FJR با نامعینی‌های ساختاری و غیرساختاری مدل شده و به فرم استاندارد تئوری انحرافات استثنایی[1] در می‌آید. آنگاه الگوریتم پیشنهادی با توجه به کنترل PID ربات صلب و قضیهٔ تیخونوف ارائه می‌گردد. این کنترل‌کننده شامل یک PID مقاوم بر مبنای ربات صلب متناظر و یک ترم اصلاحی ساده است که برای جبران تاثیر انعطاف‌پذیری مفاصل اضافه می‌شود. ویژگی این کنترل کننده در سادگی و خطی بودن آن است. سپس جزئیات ریاضی اثبات پایداری مقاوم الگوریتم پیشنهادی با دو قضیه بیان می‌شود و شرایط کافی برای پایداری مقاوم سیستم به دست می‌آید. در نهایت کارایی الگوریتم پیشنهادی با شبیه‌سازی بازوی یک محوره با مفصل منعطف، بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: رباتهای با مفاصل انعطاف‌پذیر، هارمونیک درایو، انحرافات استثنایی، قضیه تیخونوف، PID مقاوم، پایداری UUB (Uniformly Ultimately Bounded)، تحلیل لیاپانوف.

Stability Analysis of a Robust Linear Controller For Flexible Joint Robots

H. R. Taghirad — Department of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
M. A. Khosravi — Electrical Group, Paya Partow Co. Tehran, Iran

Abstract

In this paper a new and completely linear algorithm is proposed for robust control of flexible joint robots. Moreover, the robust stability of the closed loop system in the presence of structured and unstructured uncertainties is analyzed. In order to develop the controller, flexible joint robot with structured and unstructured uncertainties is modelled and converted into a singular perturbation form. A robust linear control algorithm is proposed for the slow dynamics and its robust stability conditions are derived using Thikhonov`s theorem. Then, the robust stability of the total system considering the porposed composite controller is analyzed, and the sufficient conditions for robust stability of the overall system are determined. Finally the effectiveness of the proposed controller is verified through simulations. It is shown that not only the tracking performance of the proposed controller is very suitable, but also the actuator effort is much smaller than that in the previous result.

Key words: Flexible joint robots, Harmonic drive, Singular perturbation, Robust PID, Thikhonov's theorem, UUB stability, Lyapunov analysis, Simulations.

1- Singular Perturbation Theory

۱- مقدمه

انعطاف مفاصل اغلب از عوامل تاثیرگذار در پیچیدگی سیستم‌های رباتیک است. همانطور که در مرجع [۱] و طی نتایج عملی نشان داده شده است، برای دستیابی به عملکرد ردیابی بهتر، انعطاف مفاصل باید هم در مدلسازی و هم در طراحی کنترل کننده در نظر گرفته شود. مهمترین عامل موثر در انعطاف مفاصل ناشی از انعطاف سیستم انتقال قدرت می‌باشد. بازوهای مکانیکی نیاز به محرکهایی با قابلیت تولید گشتاور بالا در سرعتهای پایین دارند. بر عکس موتورهای الکتریکی گشتاور مورد نیاز رباتها را فقط در سرعتهای بالا تامین می‌کنند. بنابراین بسیاری از رباتها که با موتورهای الکتریکی تحریک می‌شوند، یک سیستم انتقال قدرت (جعبه دنده) را برای افزایش گشتاور و کاهش سرعت به کار می‌برند. در میان سیستم‌های انتقال قدرت نیز هارمونیک درایوها به علت دارا بودن خصوصیات ویژه، بیشتر مورد توجه طراحان قرار گرفته‌اند. هارمونیک درایو، جعبه دنده مخصوصی است که مکانیزم انتقال قدرت در آن توسط یک عنصر انعطاف‌پذیر صورت می‌گیرد.

استفاده از هارمونیک درایو در طراحی رباتها باعث می‌شود که صلب بودن مفاصل تحت الشعاع قرار گرفته و با مشکل انعطاف‌پذیری مفاصل مواجه شویم [۲]. انعطاف‌پذیری مفاصل ضمن اینکه باعث پیچیدگی مدلسازی بازوها می‌شود، یک عامل بالقوه نامعینی در سیستم است که می‌تواند مشخصات مطلوب سیستم را تحت تاثیر قرار داده و حتی در مواردی به ناپایداری آن منجر گردد.

به دلیل انعطاف موجود در مفصل، موقعیت محرک (مثل زاویه محور موتور) مستقیما به موقعیت محور درایو شده مربوط نیست و این در کاربردهای با دقت بالا، اصلا مناسب نیست. ضمن اینکه نوسانات ناخواسته در اثر انعطاف مفاصل، محدودیت پهنای باند را بر روی همهٔ الگوریتم‌های کنترلی که بر مبنای رباتهای صلب طراحی شده‌اند، تحمیل می‌کند و ممکن است مشکلات پایداری را برای قوانین کنترلی که تاثیر انعطاف مفاصل را ناچیز گرفته‌اند، به وجود آورد.

به منظور جبران انعطاف مفاصل، روشهای کنترلی زیادی پیشنهاد شده‌اند که ازجمله می‌توان استفاده از تئوری انحرافات استثنایی [۳]، خطی‌سازی با فیدبک [۱]، روشهای تطبیقی [۴]، کنترل مقاوم [۵، ۶ و ۷] و روشهای هوشمند [۸] را نام برد. با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری ضعیف مفاصل، تئوری انحرافات استثنایی به عنوان تئوری پایه برای مدل‌سازی این رباتها استفاده شده است. در این روش با استفاده از خاصیت تقسیم زمانی سیستم‌ها[1] این‌گونه سیستم‌ها به دو زیر سیستم کند و تند تجزیه گردیده و مورد استفاده سایر الگوریتم‌های کنترلی قرار گرفته‌اند. همانطور که در [۹] برای یک مدل سه محوره با مفاصل انعطاف‌پذیر نشان داده شده است، سیستم شرایط لازم و کافی برای اینکه قابلیت خطی‌سازی با فیدبک را داشته باشد، دارا نیست. بنابراین از روشهایی نظیر گشتاور محاسبه شده نمی‌توان استفاده کرد. در مرجع [۱]، با صرف نظر از تاثیر حرکت محور بر روی انرژی جنبشی روتور، یک مدل ریاضی از این رباتها به دست آمده است که با این ساده‌سازی، سیستم قابلیت خطی‌سازی با فیدبک را داراست. البته باید توجه داشت که برای پیاده‌سازی این روش نیاز به اندازه‌گیری شتاب و مشتق[2] آن است که عملا بسیار پر هزینه خواهد بود [۱].

اکثر روش‌های کنترلی که در زمینه کنترل فیدبک FJR ها انجام شده‌اند، در حیطه کنترل غیر خطی هستند و پیاده‌سازی آنها هزینه و پیچیدگیهای خاص خود را می‌طلبد. در این مقاله کنترل خطی صرف (PID به همراه ترم اصلاحی[3]) برای کنترل سیستم پیشنهاد شده است و شرایط پایداری مقاوم آن نسبت به نامعینی‌ها ساختاری و غیرساختاری طی دو قضیه معین شده است. بایستی توجه شود که بر خلاف طبیعت مشابه الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده توسط همین نویسندگان در [۶]، روش جدید، ساختار بسیار ساده‌تری را با وجود حفظ پایداری مقاوم، داراست [۱۶].

در این مقاله پس از مروری مختصر بر دینامیک ربات صلب و کنترل PID آن، FJR نامعینی که دینامیک آن دارای نامعینی‌های ساختاری و غیرساختاری است، در نظر گرفته و مدل آن را به فرم تئوری انحرافات استثنایی در می‌آوریم. سپس با استفاده از قضیه تیخونوف و جداسازی متغیرهای کند و تند، الگوریتم پیشنهادی متشکل از کنترل کننده PID برای مدل صلب متناظر و ترم اصلاحی برای جبران‌سازی انعطاف مفاصل را ارائه می‌کنیم. در نهایت پایداری کلی سیستم، اثبات شده و شرایط کافی برای پایداری تعیین می‌شود و کارآئی الگوریتم با

1- Two-Time Scale Behavior
2- Jerk
3- Corrective Term

شبیه‌سازی یک بازوی تک مفصل نشان داده می‌شود.

۲- کنترل PID ربات صلب

مدل دینامیکی یک ربات n محوره صلب را در نظر بگیرید [۱۰]:

$$M_t(q)\ddot{q} + N_t(q,\dot{q}) = u_0 \qquad (1)$$

که در آن

$$\begin{cases} M_t(q) = M(q) + J \\ N_t(q,\dot{q}) = V_m(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + F_d\dot{q} + F_S(\dot{q}) + T_d \end{cases} \qquad (2)$$

$M(q)$ ماتریس $n\times n$ اینرسی، $V_m(q,\dot{q})$ ماتریس $n\times n$ شامل ترمهای کوریولیس و سانتریفوژ، $G(q)$ بردار $n\times 1$ ترمهای جاذبه، F_d ماتریس قطری $n\times n$ ثابتهای اصطکاک ویسکوز، $F_s(\dot{q})$ بردار $n\times 1$ ترمهای اصطکاک خشک (کولمب)، T_d بردار $n\times 1$ اغتشاش یا تاثیر دینامیک های مدل نشده ولی محدود و J ماتریس قطری $n\times n$ اینرسی محرکها می‌باشند. همانطور که در [۱۰ و ۱۱] نشان داده شده است، با وجود نامعینی در همه پارامترها داریم:

$$\begin{cases} \underline{m}_t I \le M_t(q) \le \overline{m}_t I \\ \|N_t\| \le \beta_0 + \beta_1\|L\| + \beta_2\|L\|^2 \\ \|V_m\| \le \beta_3 + \beta_4\|L\| \end{cases} \qquad (3)$$

که $\underline{m}_t, \overline{m}_t, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ثابت‌های مثبت حقیقی بوده و $L = [e^T \ \ \dot{e}^T]$ و $\|\cdot\|$ نمایانگر نرم اقلیدسی است. با انتخاب u_0 بصورت

$$u_0 = K_v\dot{e} + K_p e + K_I\int_0^t e(s)ds = Kx \qquad (4)$$

که در آن

$$\begin{cases} e = q_d - q \\ K = [K_I \ K_p \ K_V] \\ x = [\int_0^t e^T(s)ds \ \ e^T \ \ \dot{e}^T]^T \end{cases} \qquad (5)$$

و با اعمال آن به (۱) داریم:

$$\dot{x} = Ax + B\Delta A \qquad (6)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ -M_t^{-1}K_I & -M_t^{-1}K_P & -M_t^{-1}K_V \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_t^{-1} \end{bmatrix} \text{ و } \Delta A = N_t + M_t\ddot{q}_d \qquad (8)$$

۲-۱- انتخاب تابع لیاپانوف و اثبات پایداری

تابع لیاپانوفی را به صورت زیر کاندید می‌کنیم:

$$V(x) = x^T P x = \frac{1}{2}[\alpha_2\int_0^t e(s)ds + \alpha_1 e + \dot{e}]^T \cdot M_t \cdot [\alpha_2\int_0^t e(s)ds + \alpha_1 e + \dot{e}] + w^T P_1 w \qquad (9)$$

که در آن

$$w = \begin{bmatrix} \int_0^t e(s)ds \\ e \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha_2 K_P + \alpha_1 K_I & \alpha_2 K_V + K_I \\ \alpha_2 K_V + K_I & \alpha_1 K_V + K_P \end{bmatrix} \qquad (10)$$

و در نتیجه

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha_2 K_P + \alpha_1 K_I + \alpha_2^2 M_t & \alpha_2 K_V + K_I + \alpha_1\alpha_2 M_t & \alpha_2 M_t \\ \alpha_2 K_V + K_I + \alpha_1\alpha_2 M_t & \alpha_1 K_V + K_P + \alpha_1^2 M_t & \alpha_1 M_t \\ \alpha_2 M_t & \alpha_1 M_t & M_t \end{bmatrix}$$

از آنجا که M_t یک ماتریس معین مثبت است، P مثبت معین است اگر و فقط اگر ماتریس P_1 معین مثبت باشد. با انتخاب

$$\begin{cases} K_P = k_P I \\ K_V = k_V I \\ K_I = k_I I \end{cases} \qquad (۱۱)$$

لم زیر نشان می‌دهد که P با انتخاب مناسب می‌تواند معین مثبت و دارای مرزهای بالا و پایین باشد.

لم۱: فرض کنید این نامساویها برقرار باشند:

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 < 1$$
$$s_1 = \alpha_2(k_P - k_V) - (1-\alpha_1)k_I - \alpha_2(1+\alpha_1-\alpha_2)\overline{m}_t > 0$$
$$s_2 = k_P + (\alpha_1 - \alpha_2)k_V - k_I - \alpha_1(1+\alpha_2-\alpha_1)\overline{m}_t > 0$$

آنگاه P معین مثبت بوده و بر شرط زیر صدق می‌کند (نامساوی Rayleigh-Ritz) [۱۲]:

$$\underline{\lambda}(P)\|x\|^2 \le V(x) \le \overline{\lambda}(P)\|x\|^2 \qquad (۱۲)$$

که در آن

$$\underline{\lambda}(P) = Min\{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{2}\underline{m}_t, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\}$$
$$\overline{\lambda}(P) = Max\{\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2}\overline{m}_t, \frac{s_3}{2}, \frac{s_4}{2}\}$$

و

$$s_3 = \alpha_2(k_P + k_V) + (1+\alpha_1)k_I + (1+\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2\overline{m}_t$$
$$s_4 = \alpha_1\overline{m}_t(1+\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_1+\alpha_2)k_V + k_P + k_I$$

اثبات این لم با استفاده از قضیه گرشگورین (شبیه آنچه در [۱۱] آمده است) می‌باشد.

با اثبات معین مثبت بودن P داریم:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA + \dot{P})x + 2x^T PB\Delta A$$

$$= -x^T Qx + \frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix}\alpha_2 I \\ \alpha_1 I \\ I\end{bmatrix}\dot{M}_t\begin{bmatrix}\alpha_2 I & \alpha_1 I & I\end{bmatrix}x +$$

$$\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2^2 I & \alpha_1\alpha_2 I \\ \alpha_2 I & 2\alpha_1\alpha_2 I & (\alpha_1^2+\alpha_2)I \\ \alpha_1\alpha_2 I & (\alpha_1^2+\alpha_2)I & \alpha_1 I \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} M_t & 0 & 0 \\ 0 & M_t & 0 \\ 0 & 0 & M_t \end{bmatrix}x + x^T\begin{bmatrix}\alpha_2 I \\ \alpha_1 I \\ I\end{bmatrix}\Delta A$$

با توجه به ویژگیهای حاکم بر معادله دینامیکی ربات داریم [۱۳]:

$$y^T \dot{M}_t y = 2y^T V_m y \qquad (۱۳)$$

بنابراین

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx + \frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix}\alpha_2 I \\ \alpha_1 I \\ I\end{bmatrix}(V_m + V_m^T)\begin{bmatrix}\alpha_2 I & \alpha_1 I & I\end{bmatrix}\cdot$$

$$x + \frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2^2 I & \alpha_1\alpha_2 I \\ \alpha_2 I & 2\alpha_1\alpha_2 I & (\alpha_1^2+\alpha_2)I \\ \alpha_1\alpha_2 I & (\alpha_1^2+\alpha_2)I & \alpha_1 I \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} M_t & 0 & 0 \\ 0 & M_t & 0 \\ 0 & 0 & M_t \end{bmatrix}x + x^T\begin{bmatrix}\alpha_2 I \\ \alpha_1 I \\ I\end{bmatrix}\Delta A$$

که در آن:

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_2 k_I I & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_1 k_P - \alpha_2 k_V - k_I)I & 0 \\ 0 & 0 & k_V I \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\dot{V}(x) \le -\gamma\|x\|^2 + \lambda_1\|V_m\|\|x\|^3 + \lambda_2\overline{m}_t\|x\|^2 + \alpha_2^{-1}\lambda_1\|x\|\|\Delta A\| \qquad (۱۵)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) \le \|x\|(\xi_0 - \xi_1\|x\| + \xi_2\|x\|^2) \qquad (۱۶)$$

$$\gamma = Min\{\alpha_2 k_I, \alpha_1 k_P - \alpha_2 k_V - k_I, k_V\} \qquad (۱۷)$$

حال با توجه به (۳)، (۸)، (۱۵)، (۱۶) و $\|L\| \le \|x\|$ داریم:

$$\xi_0 = \alpha_2^{-1}\lambda_1\beta_0 + \alpha_2^{-1}\lambda_1\lambda_3\overline{m}_t \qquad (۱۸)$$

$$\xi_1 = \gamma - \lambda_1\beta_3 - \lambda_2\overline{m}_r - \alpha_2^{-1}\lambda_1\beta_1 \qquad (۱۹)$$

$$\xi_2 = \lambda_1\beta_4 + \alpha_2^{-1}\lambda_1\beta_2 \qquad (۲۰)$$

که $\lambda_1 = \lambda_{Max}(R_1), \lambda_2 = \lambda_{Max}(R_2), \lambda_3 = sup\|\ddot{q}_d\|$ و λ_{Max} و λ_{Min} به ترتیب بیانگر بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه می‌باشند و

$$R_1 = \begin{bmatrix} \alpha_2^2 I & \alpha_1\alpha_2 I & \alpha_2 I \\ \alpha_1\alpha_2 I & \alpha_1^2 I & \alpha_1 I \\ \alpha_2 I & \alpha_1 I & I \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2^2 I & \alpha_1\alpha_2 I \\ \alpha_2 I & 2\alpha_1\alpha_2 I & (\alpha_1^2+\alpha_2)I \\ \alpha_1\alpha_2 I & (\alpha_1^2+\alpha_2)I & \alpha_1 I \end{bmatrix}$$

با توجه به نتایجی که تاکنون به دست آوردیم، می‌توان قضیه زیر را بیان کرد. این قضیه پایداری UUB سیستم خطا (۶) را نشان می‌دهد.

قضیه ۱: سیستم خطای (۶) پایدار از نوع UUB است اگر ξ_1 به قدر کافی بزرگ انتخاب شود.

اثبات: با توجه به (۱۲)، (۱۶) و لم 5.3 از [۱۳]، در صورتیکه این شرایط ارضاء شوند، سیستم نسبت به B(0,d) که

$$d = \frac{2\xi_0}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2}}\sqrt{\frac{\overline{\lambda}(P)}{\underline{\lambda}(P)}} \qquad (۲۱)$$

پایدار به صورت UUB خواهد بود:

$$\xi_1 > 2\sqrt{\xi_0\xi_2} \qquad (۲۲)$$

$$\xi_1^2 + \xi_1\sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2} > 2\xi_0\xi_2\left(1 + \sqrt{\frac{\overline{\lambda}(P)}{\underline{\lambda}(P)}}\right) \qquad (۲۳)$$

$$\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2} > 2\xi_2\|x_0\|\sqrt{\frac{\overline{\lambda}(P)}{\underline{\lambda}(P)}} \qquad (۲۴)$$

این شرایط به سادگی با بزرگ نمودن ξ_1 ارضاء می‌شوند. ξ_1 نیز با افزایش گین‌های K_P, K_V, K_I بزرگ می‌شود.

۳- ربات با مفاصل انعطاف‌پذیر

تجربیات عملی به دست آمده از رباتهای صنعتی که هارمونیک درایو را به عنوان سیستم انتقال قدرت به کار می‌برند، نشان می‌دهد که انعطاف مفاصل تاثیرات قابل توجه‌ای بر دینامیک کل سیستم دارد. با فرض اینکه سختی مفصل را در مقایسه با سایر پارامترهای سیستم بزرگ و پارامتر استهلاک[1] مفصل را کوچک فرض کنیم، مدل دینامیکی ربات n محوره با مفاصل انعطاف‌پذیر را می‌توان بدین‌گونه نوشت [۱۴]:

$$\begin{cases} M(q_1)\ddot{q}_1 + N(q_1,\dot{q}_1) = K(q_2 - q_1) \\ J\ddot{q}_2 = K(q_1 - q_2) + u \end{cases} \qquad (۲۵)$$

$$N(q_1,\dot{q}_1) = V_m(q_1,\dot{q}_1)\dot{q}_1 + G(q_1) + F_d\dot{q}_1 + F_s(\dot{q}_1) + T_d$$

q_1 و q_2 به ترتیب نمایانگر زوایای محور و موتور بوده و K ماتریس $n\times n$ قطری است که سختی مفاصل را نشان می‌دهد. با فرض اینکه همه سختی‌های مفاصل دارای یک مقدار باشند (این فرض از عمومیت مسئله نمی‌کاهد زیرا با مقیاس کردن می‌توان به این نتیجه رسید) و با توجه به فرض بزرگ بودن آن در مقایسه با سایر پارامترهای سیستم، می‌توان آن را به صورت $K=O(1/\varepsilon^2)$ در نظر گرفت.

توجه کنید که با فرض وجود نامعینی وقتی همه مفاصل چرخشی باشند، خواهیم داشت [۱۰ و ۱۳]:

$$\begin{cases} m_1 I \le M(q_1) \le m_2 I \\ \| V_m(q_1,\dot{q}_1) \| \le \zeta_c \|\dot{q}_1\| \\ \| G(q_1) \| \le \zeta_g \end{cases} \qquad (۲۶)$$

و

$$\begin{cases} \| F_d\dot{q}_1 + F_s(\dot{q}_1) \| = \zeta_{f0} + \zeta_{f_1}\|q_1\| \\ j_1 I \le J \le j_2 I \end{cases} \qquad (۲۷)$$

همچنین با فرض محدود بودن اغتشاش داریم:

1- Damping

$$\| T_d \| \le \zeta_e \tag{۲۸}$$

که m_1، m_2، ζ_c، ζ_g، ζ_{f0}، ζ_{f1}، j_1، j_2، ζ_e ثابتهای مثبت حقیقی هستند. وقتی که همه مفاصل صلب باشند، مدل سیستم به این صورت خواهد بود:

$$M_t(q)\ddot{q} + N_t(q,\dot{q})=u_r \tag{۲۹}$$

که $q=q_1$ و M_t یک ماتریس اینرسی معین مثبت می‌باشد. این مدل حالت حدی مدل FJR وقتی $K \to \infty$ می‌باشد. این حقیقت ناشی از این مطلب مهم است که مدل با مفاصل انعطاف‌پذیر، یک انحراف استثنایی از مدل صلب می‌باشد [۱۵].

۳-۱- روش کنترل ترکیبی

در این قسمت نشان می‌دهیم که قانون کنترلی (۴) که تحت شرایط صلب بودن کامل سیستم، ردیابی مقاوم مسیر مرجع را نتیجه می‌دهد، می‌تواند به سادگی برای کنترل سیستم با مفاصل انعطاف‌پذیر اصلاح گردد. بدین منظور قانون کنترلی را به فرم

$$u = u_r + K_d(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \tag{۳۰}$$

انتخاب می‌کنیم. در این رابطه u_r کنترل PID بوده که با (۴) داده شده و K_d ماتریس قطری ثابتی است که المانهای آن از مرتبه $O(1/\varepsilon)$ می‌باشند. با قرار دادن قانون کنترلی (۳۰) در رابطه (۲۵) و تعریف متغیر z به صورت

$$z = K(q_2 - q_1) \tag{۳۱}$$

خواهیم داشت:

$$J\ddot{z} + K_d\dot{z} + Kz = K(u_r - J\ddot{q}_1) \tag{۳۲}$$

با توجه به فرض ما در مورد K و انتخاب K_d از مرتبه $O(1/\varepsilon)$ می‌توان نوشت:

$$K = \frac{K_1}{\varepsilon^2} \quad ; \quad K_d = \frac{K_2}{\varepsilon} \tag{۳۳}$$

K_1 و K_2 از مرتبه $O(1)$ می‌باشند. رابطه (۳۲) را می‌توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\varepsilon^2 J\ddot{z} + \varepsilon K_2 z + K_1 z = K_1(u_r - J\ddot{q}_1) \tag{۳۴}$$

حال می‌توان معادلات (۲۵) را بدین صورت نوشت:

$$\begin{cases} M(q_1)\ddot{q}_1 + N(q_1,\dot{q}_1) = z \\ \varepsilon^2 J\ddot{z} + \varepsilon K_2 z + K_1 z = K_1(u_r - J\ddot{q}_1) \end{cases} \tag{۳۵}$$

سیستم (۳۵) سیستمی با انحرافات استثنایی است که متغیرهای کند آن q_1، $\dot{q}_1$، پارامترهای محور بوده و پارامترهای تند آن، متغیرهای z، $\dot{z}$ می‌باشند.

با استفاده از نتایج تئوری انحرافات استثنایی می‌توان سیستم انعطاف‌پذیر (۳۵) را به دو سیستم شبه-حالت ماندگار[1] و سیستم لایه مرزی[2] تقریب زد. با $\varepsilon = 0$ برای معادله (۳۴) خواهیم داشت:

$$\bar{z} = \bar{u}_r - J\ddot{\bar{q}}_1 \tag{۳۶}$$

که $(\bar{\cdot})$ نمایانگر تعریف متغیرها در $\varepsilon=0$ می‌باشد. با قرار دادن (۳۶) در (۳۵) خواهیم داشت:

$$(M(\bar{q}_1)+J)\ddot{\bar{q}}_1 + N(\bar{q}_1,\dot{\bar{q}}_1) = \bar{u}_r \tag{۳۷}$$

این معادله که شبیه مدل ربات صلب با متغیر $\bar{q}_1$ می‌باشد، سیستم شبه-حالت ماندگار خوانده می‌شود.

با استفاده از قضیه تیخونوف [۳]، نیروی الاستیک مفاصل $z(t)$ و زاویه محور $q(t)$ برای $t>0$، این شرایط را برآورده می‌سازند:

$$\begin{cases} z(t) = \bar{z}(t) + \eta(\tau) + O(\varepsilon) \\ q_1(t) = \bar{q}_1(t) + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{۳۸}$$

که در آن $\tau = t/\varepsilon$، مقیاس زمانی سریع بوده و η در معادله لایه مرزی صدق می‌کند:

1- Quasi-steady state
2- Boundary Layer

$$J\frac{d^2\eta}{d\tau^2}+K_2\frac{d\eta}{d\tau}+K_1\eta=0 \qquad (۳۹)$$

با توجه به این نتایج می‌توان سیستم با مفاصل انعطاف پذیر (۲۵) را تا مرتبه $O(\varepsilon)$ بدین صورت تقریب زد:

$$\begin{cases}(M(q_1)+J)\ddot q_1+N(q_1,\dot q_1)=u_r+\eta(t/\varepsilon)\\ J\dfrac{d^2\eta}{d\tau^2}+K_2\dfrac{d\eta}{d\tau}+K_1\eta=0\end{cases} \qquad (۴۰)$$

از آنجا که گین K_2 می‌تواند به صورت مناسبی چنان انتخاب شود که سیستم لایه مرزی (۳۹) پایدار مجانبی گردد، پس برای مقادیر به‌قدر کافی کوچک ε، پاسخ سیستم انعطاف‌پذیر با کنترل صلب u_r (PID) به اضافه ترم اصلاحی $K_d(\dot q_1-\dot q_2)$ می‌تواند پس از زوال اولیه پاسخ‌گذاری متغیرهای سریع نشان داده شده با $\eta(\tau)$، به پاسخ سیستم صلب کنترل شده با u_r به تنهایی، نزدیک شود.

۴- تحلیل پایداری مقاوم سیستم کامل

در بخش‌های قبل کنترل PID مدل صلب و پایداری آن مورد بررسی قرارگرفت و نشان داده شد که سیستم لایه مرزی نیز تحت تاثیر ترم اصلاحی، به صورت مجانبی پایدار می‌گردد. همان‌طور که می‌دانیم در حالت کلی بر مبنای پایداری دو سیستم لایه مرزی و شبه-حالت ماندگار، نمی‌توان در مورد پایداری سیستم کامل قضاوت کرد [۳]. در این بخش با توجه به نتایجی که در بخش‌های قبل به دست آمده است، پایداری سیستم کامل را مورد بحث قرارداده و پایداری آن را که از نوع UUB است، اثبات خواهیم نمود. برای این منظور یک بار دیگر معادلات دینامیکی حاکم بر FJR را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}(M(q_1)+J)\ddot q_1+N(q_1,\dot q_1)=u_r+\eta(t/\varepsilon)\\ J\dfrac{d^2\eta}{d\tau^2}+K_2\dfrac{d\eta}{d\tau}+K_1\eta=0\end{cases} \qquad (۴۱)$$

با قرار دادن u_r از (۴) و با توجه به $e=q_d-q_1$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}e\\ \dot e\\ \ddot e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\\ -M_l^{-1}K_I & -M_l^{-1}K_P & -M_l^{-1}K_V\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_0^t e(s)ds\\ e\\ \dot e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\M_l^{-1}\end{bmatrix}(N_l+M_l\ddot q_d)+\begin{bmatrix}0\\0\\-M_l^{-1}\end{bmatrix}\eta$$

و به همین صورت:

$$\begin{bmatrix}\dot\eta\\ \ddot\eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -J^{-1}K & -J^{-1}K_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta\\ \dot\eta\end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

با در نظر گرفتن $x=\left[\int_0^t e(s)^T ds \;\; e^T \;\; \dot e^T\right]^T$ و $y=\left[\eta^T \;\; \dot\eta^T\right]^T$ خواهیم داشت:

$$\dot x=Ax+B\Delta A+C[I \quad 0]y \qquad (۴۳)$$

$$\dot y=\tilde A y \qquad (۴۴)$$

که

$$A=\begin{bmatrix}0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\\ -M_l^{-1}K_I & -M_l^{-1}K_P & -M_l^{-1}K_V\end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

$$\Delta A=N_l+M_l\ddot q_d \;\;,\;\; B=\begin{bmatrix}0\\0\\M_l^{-1}\end{bmatrix} \qquad (۴۶)$$

$$C=\begin{bmatrix}0\\0\\-M_l^{-1}\end{bmatrix},\tilde A=\begin{bmatrix}0 & I\\ -J^{-1}K & -J^{-1}K_d\end{bmatrix} \qquad (۴۷)$$

قضیه ۲: ماتریس قطری و معین مثبت K_d وجود دارد به طوری که سیستم حلقه بسته توصیف شده با (۴۴) به صورت مجانبی پایدار جامع باشد.

اثبات: تابع لیاپانوف انتخابی را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$V_F = y^T S y \ , \ S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} K_d + K & J \\ J & J \end{bmatrix} \qquad (۴۸)$$

برای معین مثبت بودن S، کافی است که $K_d > J$، حال با مشتق‌گیری از V_F در امتداد پاسخ (۴۴) داریم:

$$\dot{V}_F = \dot{y}^T S y + y^T S \dot{y} = -\eta^T K \eta - \dot{\eta}^T (K_d - J)\dot{\eta} < 0 \qquad (۴۹)$$

با توجه به معین مثبت و قطری بودن ماتریسهای K، K_d، J، $\dot{V}_F$ منفی بوده و می‌توان نوشت:

$$\dot{V}_F = -y^T W y \, , W = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K_d - J \end{bmatrix} \qquad (۵۰)$$

قضیه ۳: سیستم حلقه بسته (۴۳) و (۴۴) پایدار از نوع UUB است، اگر K_d و ξ_1 به اندازه کافی بزرگ انتخاب شوند.
اثبات: برای اثبات تابع لیاپانوف مرکب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$V(x, y) = x^T P x + y^T S y \qquad (۵۱)$$

$x^T P x$ تابع لیاپانوف انتخابی برای سیستم صلب بوده و $y^T S y$ تابع لیاپانوف انتخاب شده در قضیه (۲) می‌باشد. طبق نامساوی Rayleigh-Ritz می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \underline{\lambda}(P) \| x \|^2 \le x^T P x \le \overline{\lambda}(P) \| x \|^2 \\ \underline{\lambda}(S) \| y \|^2 \le y^T S y \le \overline{\lambda}(S) \| y \|^2 \end{cases} \qquad (۵۲)$$

که $\overline{\lambda}, \underline{\lambda}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه را نشان می‌دهند. با جمع این نامساویها داریم:

$$\begin{aligned} &\underline{\lambda}(S) \| y \|^2 + \underline{\lambda}(P) \| x \|^2 \le V(x, y) \\ &\le \overline{\lambda}(S) \| y \|^2 + \overline{\lambda}(P) \| x \|^2 \end{aligned} \qquad (۵۳)$$

با تعریف

$$Z_t = [\| x \| \ \ \| y \|]^T \qquad (۵۴)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &[\| x \| \ \| y \|] \begin{bmatrix} \underline{\lambda}(P) & 0 \\ 0 & \underline{\lambda}(S) \end{bmatrix} [\| x \| \ \ \| y \|] \le V(x, y) \\ &\le [\| x \| \ \ \| y \|] \begin{bmatrix} \overline{\lambda}(P) & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}(S) \end{bmatrix} [\| x \| \ \ \| y \|] \end{aligned} \qquad (۵۵)$$

دوباره با اعمال نامساوی Rayleigh-Ritz می‌توان نوشت:

$$\underline{\lambda} \| Z_t \| \le V(Z_t) \le \overline{\lambda} \| Z_t \| \qquad (۵۶)$$

که

$$\underline{\lambda} = Min\{\underline{\lambda}(P), \underline{\lambda}(S)\} \qquad (۵۷)$$

$$\overline{\lambda} = Max\{\overline{\lambda}(P), \overline{\lambda}(S)\} \qquad (۵۸)$$

حال با مشتق‌گیری از (۵۱) در امتداد مسیرهای (۴۳) و (۴۴) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x + 2y^T S \dot{y} \\ &= [2x^T P(Ax + B\Delta A) + x^T \dot{P} x] \\ &\quad + 2x^T PC[I \quad 0] y + 2y^T S \dot{y} \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

با توجه به (۱۶) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &2x^T P(Ax + B\Delta A) + x^T \dot{P} x \le \\ &\qquad \| x \| (\xi_0 - \xi_1 \| x \| + \xi_2 \| x \|^2) \end{aligned} \qquad (۶۰)$$

همچنین با تعریف $\gamma_1 = \lambda_{max}(M_t)$ داریم:

$$2x^T PC[I \quad 0] y \le 2\gamma_1 \overline{\lambda}(P) \| x \| \| y \| \qquad (۶۱)$$

همانطور که در قضیه ۲ دیدیم:

$$2y^T S \dot{y} \le -\lambda_{min}(W) \| y \|^2 \qquad (۶۲)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\dot{V} \leq \begin{bmatrix} \|x\| & \|y\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & -\gamma_1 \bar{\lambda}(P) \\ -\gamma_1 \bar{\lambda}(P) & \lambda_{min}(W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|x\| \\ \|y\| \end{bmatrix} + \xi_0 \|x\| + \xi_2 \|x\|^3 \tag{۶۳}$$

با توجه به (۵۴) داریم:

$$\dot{V} \leq -Z_t^T R Z_t + \xi_0 \| Z_t \| + \xi_2 \| Z_t \|^3 \tag{۶۴}$$

که

$$R = \begin{bmatrix} \xi_1 & -\gamma_1 \bar{\lambda}(P) \\ -\gamma_1 \bar{\lambda}(P) & \lambda_{min}(W) \end{bmatrix} \tag{۶۵}$$

برای اینکه R معین مثبت باشد باید داشته باشیم:

$$\lambda_{min}(W) > \frac{\gamma_1^2 \bar{\lambda}^2(P)}{\xi_1} \tag{۶۶}$$

با برآورده شدن شرط (۶۶) که با انتخاب مناسب K_d برای زیرسیستم سریع صورت می‌گیرد، داریم:

$$\dot{V} \leq \| Z_t \| (\xi_0 - \lambda_{min}(R) \| Z_t \| + \xi_2 \| Z_t \|^2) \tag{۶۷}$$

حال با توجه به (۵۶) و (۶۷) و لم ۵-۳ از [۱۳]، در صورتی که این شرایط ارضاء شوند سیستم نسبت به $Y(0, d')$ که

$$d' = \frac{2\xi_0}{\lambda_{min}(R) + \sqrt{\lambda_{min}^2(R) - 4\xi_0\xi_2}} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}} \tag{۶۸}$$

پایدار به صورت UUB خواهد بود:

$$\lambda_{min}(R) > 2\sqrt{\xi_0\xi_2}$$

$$\lambda_{min}^2(R) + \lambda_{min}(R)\sqrt{\lambda_{min}^2(R) - 4\xi_0\xi_2} > 2\xi_0\xi_2\left(1 + \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}}\right)$$

$$\lambda_{min}(R) + \sqrt{\lambda_{min}^2(R) - 4\xi_0\xi_2} > 2\xi_2 \| Z_{t0} \| \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}}$$

این شرایط به سادگی با بزرگ نمودن $\lambda_{min}(R)$ ارضاء می‌شوند. $\lambda_{min}(R)$ نیز با افزایش ξ_1 (که خود تابعی از K_V, K_p, K_I است) و بزرگ نمودن $\lambda_{min}(W)$ (که از K_d تاثیر می‌پذیرد)، می‌تواند به اندازه کافی به منظور ارضاء شرایط، بزرگ انتخاب شود.

۵- شبیه‌سازی

برای نشان دادن کارآئی الگوریتم پیشنهادی، این روش را بر روی یک بازوی تک محوره با مفصل انعطاف‌پذیر شبیه‌سازی می‌کنیم. معادلات حرکت حاکم بر این سیستم در فضای حالت به این صورت می‌باشد [۱]:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{-MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u
\end{aligned}$$

که با انتخاب ضرایب $x_3 = q_2$ ، $x_1 = q_1$، $q_1 = q$, $z = k(q_1 - q_2)$، معادلات حرکت سیستم که به فرم استاندارد تئوری انحرافات استثنایی در می‌آیند عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\ddot{q} &= \frac{-MgL}{I}\sin(q) - \frac{1}{I}z \\
\varepsilon\ddot{z} &= \frac{-MgL}{I}\sin(q) - \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{J}\right)z - \frac{1}{J}u
\end{aligned}$$

با این توصیف، کنترل ترکیبی طراحی شده با پارامترهای نشان داده شده در جدول (۱) عبارت است از:

$$u = u_s + K_d(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

که

$$u_s = 50\dot{e} + 60e + 30\int_0^t e(s)ds$$
$$K_d = 50$$

ضرایب کنترل کننده به قدر کافی بزرگ انتخاب می‌شوند تا شرایط پایداری با توجه به قضیه‌های گفته شده ارضا گردند.

جدول ۱- پارامترهای بازو

پارامتر	مقدارنامی
جرم	M=2
سختی مفصل	K=100
طول (2L)	L=1
جاذبه	g=9.8
اینرسی	I=1.5
لختی موتور	J=1.5

به منظور مقایسه نتایج حاصله از الگوریتم پیشنهادی با سایر الگوریتم‌ها، فرض کنید مسیر مرجع به فرم زیر باشد:

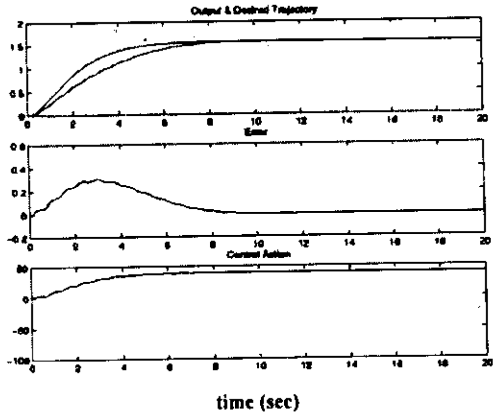
$$\theta = 1.57 + 7.8539\exp(-t) - 9.428\exp(-t/1.2)$$

در این منحنی زاویه مفصل به نرمی از مقدار اولیه $\theta = 0$ به مقدار نهایی $\theta = \pi/2$ می‌رسد.

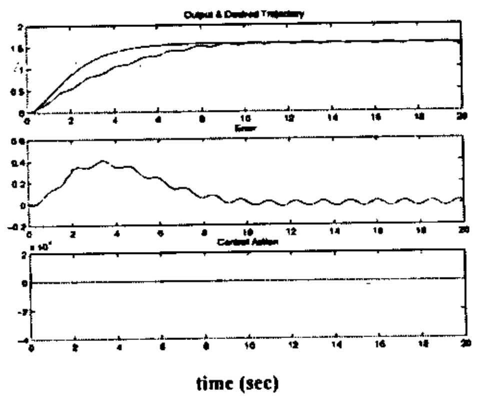
با اعمال کنترل صلب u_s سیستم به ناپایداری می‌رود. دلیل عمده عدم کارآئی کنترل صلب، در نظر نگرفتن تاثیرات انعطاف در سیستم است. در حالی که با اعمال راهبرد کنترلی پیشنهادی، سیستم به خوبی پایدار شده و با توجه به شکل (۱)، محور مسیر مرجع را به خوبی دنبال می‌کند.

شکل (۲) خروجی سیستم را با کنترل ترکیبی پیشنهادی در [۶] با ضرایب یکسان PID نشان می‌دهد. این کنترل کننده که شامل سه قسمت است از مدل کاهش یافته مبتنی بر رویه انتگرالی و کنترل سریع برای پایدارسازی زیر سیستم سریع استفاده می‌کند. همان گونه که در شکلهای (۱) و (۲) دیده می‌شود، با وجود سادگی ساختار کنترل کننده پیشنهادی و ردیابی مناسب، میزان سیگنال کنترلی بسیار کمتر از [۶] است.

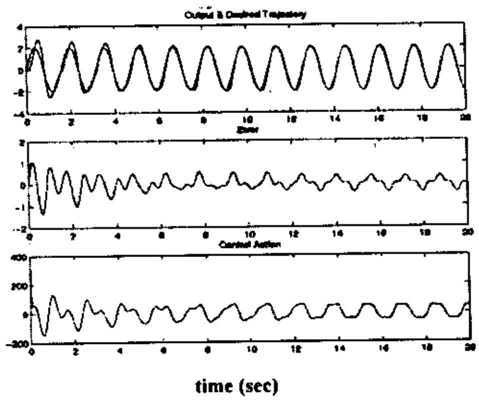
به منظور بررسی سرعت سیستم، $\phi = sin(4t)$ را به عنوان مسیر مرجع در نظر می‌گیریم. همان گونه که در شکل (۳) نشان داده شده است، سیستم ردیابی مناسبی را دارا بوده و مقدار سیگنال کنترلی نیز قابل قبول است. در این مثال نیز سیگنال کنترلی خیلی کمتر از مقداری است که در [۶] گزارش شده است.



شکل ۱- مشخصه ردیابی سیستم حلقه بسته به یک منحنی نرم: الگوریتم پیشنهادی



شکل ۲- مشخصه ردیابی سیستم حلقه بسته به یک منحنی نرم: الگوریتم پیشنهادی در [۶]



شکل ۳- مشخصه ردیابی سیستم به یک منحنی سینوسی

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش کنترلی جدیدی برای رباتها با مفاصل انعطاف‌پذیر FJR پیشنهاد شده است. در این راستا، پس از مروری بر دینامیک رباتهای صلب و کنترل PID این نوع رباتها، رباتها با مفاصل انعطاف‌پذیر توسط تئوری انحرافات استثنای مدل‌سازی شده‌اند. در این روش کنترلی پیشنهادی از یک قانون کنترل ترکیبی استفاده شده است، که در آن از یک کنترل‌کننده PID برای زیر سیستم کند و یک ترم اصلاحی برای پایدارسازی زیر سیستم تند استفاده می‌شود. آنگاه با استفاده از قضیه تیخونوف متغیرهای کند و تند جداسازی شده و اثبات پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با الگوریتم پیشنهادی ارائه گردیده است. متد ارائه شده دارای این ویژگی است که علاوه بر اینکه یک ربات با مفاصل انعطاف‌پذیر را در حضور نامعینی‌های ساختاری و غیرساختاری بصورت مقاوم پایدار می‌سازد و مشکلات کنترل‌کننده‌های طراحی شده بر اساس مدل صلب را ندارد، در پیاده‌سازی عملی، از سادگی غیرقابل وصفی در مقایسه با سایر الگوریتم‌های پیشنهادی برای کنترل این‌گونه رباتها، برخوردارست.

مراجع

[1] M. W. Spong, Modeling and control of elastic joint robots, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 109:310-319, 1987.

[2] H. D. Taghirad and P. R. Belanger, Modelling and parameter identification of harmonic drive systems, Journal of Dynamic systems, Measurements and Control, ASME Pub., 120(4):439-444, Dec. 1998.

[3] J. O'Reilly P. V. Kokotovic and H. Khalil, Singular Perturbation Methods In Control: Analysis and Design, Academic Press., 1986.

[4] F. Ghorbel and M. W. Spong, Adaptive integral manifold control of flexible joint robot manipulators, Int. Conf. on Robotics and Automation, 1:707-714, 1992.

[5] Y. H. Chen and M. C. Han, Robust Control Design For Uncertain Flexible-Joint Manipulators: A Singular Perturbation Approach, In Int. Conf. on Decision and Control, pages 611-16, 1993.

[6] H. D. Taghirad and M. A. Khosravi, Design and simulation of robust composite controllers for flexible joint robots, in the proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 3:3108-3113, Sep. 2003.

[7] H. D. Taghirad and M. A. Khosravi, Stability analysis and robust composite controller synthesis for flexible joint robots, IEEE International Conference on Intelligent and Robotic Systems, IROS'02, pp2067-2072, Lausanne, Switzerland, 2002.

[8] V. Zeman, R. V. Patel and K. Khorasani, A neural net controller for flexible-joint manipulators. American Control Conference, 4:3025--3027, 1990.

[9] G. Cesareo and R. Marino, On the Controllability properties of Elastic Robotics. INRIA, 1984.

[10] J. J. Craig, Adaptive Control of Mechanical Manipulators. Addison-Wesely, 1988.

[11] Z. Qu and J. Dorsey, Robust PID Control of Robots. Int. Journal of Robotics and Automation, 6(4):228-35, 1991.

[12] Z. Qu, Nonlinear Robust Control of Uncertain systems. John Wiley & Sons., 1998.

[13] Z. Qu and D. M. Dawson, Robust Tracking Control of Robot Manipulators. IEEE Press., 1996.

[14] F. Ghorbel and M. W. Spong, Stability Analysis of Adaptively Controlled Flexible Joint Manipulators. In Int. Conf. on Decision and Control, pages 2538-44, 1990.

[15] M. W. Spong, K. Khorasani, and P. V. Kokotovic, Integral manifold approach to the feedback control of flexible joint robots. JRA, RA-3(4):291-300, Aug. 1987.

[16] H. D. Taghirad and M. A. Khosravi, A Robust Linear Controller for Flexible Joint Manipulators, IEEE IROS'04, 3: 2936-2941, Oct. 2004, Japan.