مقالات و بررسیها، دفتر ۷۵ (۲)، بهار و تابستان ۸۳، ص ۲۱ـ۳۸

طبیعت گرایی نظریهٔ مجموعه‌ای به عنوان پایهٔ ریاضیات

سهراب علوی نیا[۱]

چکیده

باورهای ما مبتنی بر دو پایهٔ شواهد تجربی و نظریه پردازیند ولی در ریاضیات اساس کار، برهان عقلی است. برهان عقلی نیز متکی به مقدمات و پیش فرض‌هاست. ولی نمی‌توان این فرآیند برهان را تا بی‌نهایت ادامه داد و بالاخره باید به اصول موضوعه رسید. معمولاً همین اصول موضوعه، معرف شاخه‌ای از ریاضیاتند. مثلاً حساب با اصول موضوعهٔ پئانو[۲] تعریف می‌شود. ریاضی دانان، در اواخر قرن ۱۹م و اوائل ۲۰م کشف کردند که اصول موضوعهٔ شاخه‌های مختلف ریاضیات را می‌توان به اصولی بنیادی‌تر، یعنی اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، فروکاست. مسأله این است که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها را ثابت نمی‌کنیم، به بداهت ذاتی آنها هم عقیده نداریم، پس چرا آنها را قبول می‌کنیم؟ آیا می‌توانیم این اصول را کم و زیاد کنیم یا آنها را به دلخواه خود تغییر دهیم؟ صدق یا کذب آنها را چگونه درمی‌یابیم؟ از کجا به تمامیت و سازگاری آنها پی می‌بریم؟ طبیعت گرایی، در حل این مشکلات می‌کوشد. در این پژوهش تلقی و برداشت نگارنده از طبیعت گرایی مطرح می‌شود و نظر پروفسور پنه لوپه مدی[۳]، نقد و رد می‌گردد.

کلید واژه‌ها اصول موضوعه، سازگاری، نظریهٔ مجموعه‌ها، بنیادگرایی، رئالیسم علمی، طبیعت گرایی، کل گرایی، مدی.

طرح مسأله

در قرن گذشته، گرایش به انتزاع و تجرد، مختص ریاضیات نبود و در هنرهای تجسمی،

---

۱. استادیار گروه فلسفه دانشگاه شهید بهشتی

2. Peano
3. Penelope Maddy

ادبیات و موسیقی نیز دیده می‌شد. با پیشرفت روش‌های اصل موضوعی و تأکید بر مفاهیم انتزاعی ریاضی، به تدریج، مسألهٔ ماهیت اعیان ریاضی بی‌اهمیت شد و ریاضیات، به عنوان علم ساختارهای مجرد مطرح گردید.[۱]

بررسی ساختارهای انتزاعی، از وجوه مشخص ریاضیات قرن ۲۰م است. مثلاً شاپیرو[۲] «دستگاه» ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از اشیاء دارای روابط خاص با یکدیگر، تعریف می‌نماید و «ساختار» را صورت انتزاعی این دستگاه می‌خواند. به نظر او ساختار مذکور، روابط متقابل آن اشیاء را روشن می‌کند و ما باید مشخصات دیگر آنها را که نقشی در روابطشان ندارند کنار بگذاریم (ص ۷۴).

«مجموعه»، یک اصطلاح فنی است که به دسته‌ای از اشیاء، از هر نوعی که باشند، اطلاق می‌شود. می‌توانیم عملیات معینی مثل جمع یا ضرب را روی این اشیاء انجام دهیم. مثلاً (به پیروی از فون نویمان[۳]) از نظریهٔ مجموعه‌ها برای پاسخ به یکی از اساسی‌ترین مسائل خود استفاده کنیم. «عدد چیست؟» عدد صفر را به عنوان مجموعه تهی تعریف می‌کنیم. عدد یک مجموعه‌ای است که فقط یک عضو دارد که همان عدد صفر است. همین طور عدد دو و بقیه اعداد را بر مبنای آن تعریف می‌نمائیم.

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\ldots$$

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots$$

تمام این روند از هیچ یعنی از مجموعهٔ تهی شروع می‌شود. پس اعداد را بر پایهٔ هیچ بنا می‌کنیم. تقریباً می‌توان همهٔ ریاضیات را از این مجموعه‌های تهی تأسیس نمود. بدین جهت امروزه بعضی از دانشوران، ریاضیات را علم الگو می‌خوانند.[۴] دستگاه‌های ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از اشیاء تعریف می‌کنیم و روی این اشیاء، عملیاتی بنابر اصول موضوعهٔ دستگاه انجام می‌دهیم. آنچه مهم است، روابط این اشیاء است، نه ماهیت آنها و بدین اعتبار می‌توان گفت که طرح مسألهٔ ماهیت اعیان ریاضی، بی‌مورد

---

۱. شاپیرو از واژه ساختار (structure) استفاده می‌کند ولی رسینک اصطلاح الگو (pattern) را به کار می‌برد.

2. S. Shapiro.　　3. Von Neumann

4. see: Resnik, M., *Mathematics as a Science of patterns,* clarendon press, Oxford, 1997.

است.

این مجموعه‌های تهی، پایهٔ همهٔ ریاضیاتند. حالا که نظریهٔ مجموعه‌ها اکسیوماتیزه شده است، اصول موضوعهٔ آن، بر چه مبنائی انتخاب می‌گردند؟ طبیعت‌گرایی ـ نه به تعبیر مدی ـ در اینجا مطرح می‌شود.

زمینهٔ تاریخی

نظریهٔ مجموعه‌ها، در ریاضیات معاصر دو نقش اساسی داشت. در ریاضیات محض به نقد و تحلیل دقیق مفهوم «بی‌نهایت» منجر شد و در ریاضیات کاربردی، ابزاری برای ساختن مدل‌های ریاضی پدیدارهای فیزیکی گردید.

منشاء نظریهٔ مجموعه‌ها، تحقیقات فرگه[1] و کانتور[2] در سه دههٔ آخر قرن ۱۹م است. فرگه با مفهوم‌نگاشت، منطق جدید را ابداع کرد ولی انگیزه او در این کار حل معضلات موجود در مبانی حساب بود. او می‌خواست ثابت کند که نظر کانت دربارهٔ حساب اشتباه است. کانت گفته بود که قضایای حساب، ترکیبیند و فرگه می‌خواست نشان دهد که برخلاف نظر کانت این قضایا، تحلیلیند. توجه کانت به مضمون حکم بود و در یک قضیهٔ حساب، مفهوم محمول را در مفهوم موضوع مندرج می‌دانست. فرگه سعی کرد دقیقاً بیان کند که منظور از اصطلاحات «ترکیبی» و «تحلیلی» چیست. او مسأله را از قلمرو روانشناسی به حیطهٔ ریاضیات کشاند و توجه خود را از مضمون احکام ریاضی به توجیه نهایی آنها معطوف کرد و توضیح داد وقتی برهانی برای یک قضیهٔ ریاضی پیدا می‌کنیم، این برهان مبتنی بر مقدمات مفروض است. آن مقدمات را از مقدمات دیگری استنتاج می‌کنیم و در ادامهٔ این سیر، به حقایق اولیهٔ ریاضی می‌رسیم.

از طرف دیگر، کانتور در اواخر قرن ۱۹م نظریهٔ طبیعی مجموعه‌های مجرد را به میان آورد. فرگه نظریهٔ مجموعه‌های کانتور را صورت‌بندی و اصل موضوعی کرد. به نظر می‌رسید که چهارچوب بخش اعظم ریاضیات را می‌توان به وسیلهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه نمود، ولی راسل در ۱۹۰۲م ثابت کرد که دستگاه اصل موضوعی[3] فرگه، ناسازگار است.

1. G. Frege 2. G. Cantor 3. axiomatic

فرض کنید r مجموعه‌ایست که به موجب تعریف، اعضائش از مجموعه‌هایی تشکیل می‌شوند که عضو خودشان نیستند.

$$x \in r \Leftrightarrow x \notin x$$

اگر در این رابطه به جای x بگذاریم r، به پارادوکس راسل می‌رسیم.

استدلال راسل بسیار روشن و ساده بود، در نتیجه به نظر می‌رسید که در تعریف «مجموعه» اشتباهی رخ داده است. چاره‌ای نبود که نظریهٔ طبیعی مجموعه‌های کانتور را ترک کنیم و به نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌های زرملو ـ فرانکل[1] روی آوریم. نظریهٔ اخیر آن سادگی و جذابیت نظریهٔ کانتور را نداشت و مهمتر آن که، پایه‌ای عمل گرایانه[2] داشت.

از جهت دیگر، بسیاری از ریاضی دانان دو مفهوم صدق و اثبات پذیری را از یکدیگر جدا کردند. مسألهٔ ماهیت صدق را کنار گذاشتند و بر موضوع برهان یا اثبات پذیری تأکید نمودند. یعنی هر شاخه از ریاضیات را یک بازی صوری انگاشتند که از اصول موضوعه خاصی شروع می‌شود و مطابق قواعد منطق با نمادهائی بی‌معنی شکل می‌گیرد. بدین ترتیب مسألهٔ تمامیت و سازگاری این دستگاه‌های اصل موضوعی اهمیت خاصی پیدا کرد. اتخاذ این روش صوری و تلاش برای پیدا کردن یک دستگاه کامل و سازگار به برنامهٔ هیلبرت[3] معروف شد. رؤیای هیلبرت با مقالهٔ ۱۹۳۱م گودل نقش بر آب گردید. او اثبات کرد که هر دستگاه سازگاری که بخش عمده‌ای از ریاضیات را در برگیرد، ناقص است. همیشه در چنین دستگاهی قضایای صادقی یافت می‌شوند که از اصول موضوعهٔ آن قابل استنتاج نیستند.

وقتی تکنیک‌های نظریهٔ مدل‌ها در بررسی نظریهٔ مجموعه‌های زرملو ـ فرانکل (Z-F) به کار رفت، نظریهٔ مجموعه‌ها جان تازه‌ای گرفت. پل کوهن[4] در ۱۹۶۳م به اثبات رسانید که بعضی از گزاره‌های ریاضی، تصمیم ناپذیرند. یعنی نمی‌توان صدق یا کذب آنها را بر مبنای Z-F تعیین نمود. گودل قبلاً گفته بود که همیشه در یک دستگاه اصل موضوعی نظیر Z-F، گزاره‌هایی وجود دارند که تصمیم ناپذیرند. اکنون کوهن گزاره‌های

---

1. Zarmelo - Fraenkel　　2. pragmatic　　3. Hilbert

4. Paul Cohen

خاصی از ریاضیات را انتخاب و اثبات کرد که این گزاره‌های خاص، تصمیم ناپذیرند. او از این تکنیک برای مسألهٔ پیوستار کانتور استفاده کرد و تصمیم ناپذیری آن را نشان داد.

امروزه با آگاهی از پارادوکس راسل و دومین قضیهٔ ناتمامیت گودل، با نظریهٔ مجموعه‌ها محتاطانه برخورد می‌شود. هرگز نمی‌توان اطمینان داشت که در گوشه‌ای از ساختار هر نظریه‌ای، تناقضی در کمین نیست. چون می‌دانیم هیچ نظریه‌ای که حساب مقدماتی اعداد را در برگیرد، نمی‌تواند سازگاری خود را اثبات کند. دو راه در پیش است، یا باید به یک برهان سازگاری نسبی تن در داد یا از نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده کرد و منتظر پیدا شدن تناقضی در آینده بود.

بیشتر ریاضی دانان تلویحاً قبول دارند که نظریهٔ مجموعه‌ها، پایهٔ مطمئنی برای ریاضیات است، ولی به نظر آنها این پایه، صرفاً جنبهٔ عملی دارد. نظریهٔ مجموعه‌های زرملو که با اصل الحاقی فرانکل، اصلاح و توسط فون نویمان تکمیل شد، تا به حال به تناقضی برنخورده است ولی نباید فراموش کرد که «سازگاری این دستگاه اصل موضوعی اثبات نشده است.» به گفتهٔ پوانکاره[1]، «ما در اطراف گله خود حصاری کشیده‌ایم تا گوسفندان را از دست گرگ حفظ کنیم ولی نمی‌دانیم که آیا گرگی در داخل حصار مانده است یا نه» (کلاین[2]، ۱۹۷۲).

بنیادگرایی[3] در ریاضیات

اهمیت بنیادگرایی نظریهٔ مجموعه‌ها بدین جهت است که تمام اشیاء و ساختارهای ریاضی را به فضای مجموعه‌ها می‌کشاند. آنگاه، عالم سخن، فقط عالم مجموعه‌هاست و می‌توانیم به روشنی روابط و کنش‌های متقابل آنها را ببینیم.

بنیادگرایی نظریهٔ مجموعه‌ها هیچ ادعائی در مورد جوهر یا ماهیت ذاتی اعیان ریاضی ندارد. این اعیان، مواضعی در درون یک ساختارند و نظریهٔ مجموعه‌ها فقط جانشین‌هایی برای آنها تهیه می‌کند. همان طور که بناسراف[4] در *آنچه اعداد نمی‌توانند*

1. H. Poincare ’
2. M. Kline
3. foundationalism
4. P. Brnacerraf

باشند[1] نشان داده است، ساختارهای نظریهٔ مجموعه‌ای متفاوتی را می‌توان جانشین این اعیان نمود.

فروکاهی ریاضیات کلاسیک به نظریهٔ مجموعه‌ها چه فایده‌ای دارد؟ با این فروکاهی، همهٔ ریاضیات کلاسیک، عمیقاً یکپارچه و متحد می‌شود و روابط متقابل شاخه‌های متفاوت آن روشن می‌گردد. بدین ترتیب روش‌های جدید را می‌توان از یک شاخه به شاخهٔ دیگر ریاضیات برد و تمام توان نظریهٔ مجموعه‌ها را در حل مسائلی که تاکنون حل نشده‌اند، به کار گرفت. موضوع این است که اکنون با توجه به مقاله گودل می‌دانیم که هیچ کس نمی‌تواند نظریه‌ای بنیادی را بپذیرد و سازگاری آن را در درون خود نظریه اثبات نماید. زرملو در ۱۹۰۸م از این امر آگاهی نداشت.

درست است که نظریهٔ مجموعه‌ها، به اعتباری، پایهٔ بقیهٔ ریاضیات است، بدین معنی که اعیان ریاضی را می‌توان به مجموعه‌ها فروکاست و قضایای ریاضیات کلاسیک را نیز می‌توان بر مبنای اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات نمود؛ ولی این فروکاهی فقط از جنبهٔ هستی شناختی مطرح است وگرنه همانگونه که فروکاهی همهٔ علوم طبیعی به فیزیک (فیزیکالیسم) حداقل از نظر روش شناختی، با دشواری‌های زیادی روبروست نمی‌توان تمام ریاضیات کلاسیک را نیز از جنبه روش شناختی به نظریهٔ مجموعه‌ها تبدیل نمود. ولی استقلال روش شناختی شاخه‌های مختلف ریاضیات، بدین معنی نیست که موجودات ریاضی در نهایت چیزی غیر از مجموعه‌ها هستند. همان طور که استقلال روش شناختی روانشناسی و بیولوژی از فیزیک نشان نمی‌دهد که روانشناس یا بیولوژیست، با موجوداتی غیر مادی سروکار دارد.

در مورد اعیان طبیعی، دیدگاه رئالیستی یعنی وجود اشیاء فیزیکی معمولی را به عنوان بهترین تبیین ارتسامات بی‌واسطهٔ حسی خود می‌پذیریم. ولی نباید فراموش کرد که وجود این اعیان فرضیهٔ ماست. خدایان هومر هم فرضیه‌ای بود که تجارب یونانیان قدیم را تبیین می‌نمود. بدان جهت اسطورهٔ اعیان طبیعی، به سایر اسطوره‌ها ترجیح داده می‌شود که کارآیی آن در تبیین و توضیح تجارب بی‌واسطه بیشتر است (کواین[2]، ۱۹۵۳،

1. *What numbers could not be.*
2. W.V. Quine

۴۴). در این جا روش علوم طبیعی یعنی روش فرض و استنتاج[1] به کار می‌رود. ولی ممکن است فیلسوفی این روش را مورد شک قرار دهد. دکارت پرسید: من از کجا می‌دانم که هم اکنون خواب نیستم؟ او در جستجوی شناختی پیشینی بود. شناختی که مافوق علوم طبیعی و ورای آنها باشد تا علوم طبیعی را بر پایهٔ آن بنا کند. ولی در معرفت شناسی طبیعی، علم برای توجیه علم به کار می‌رود. این دور باطل نیست چون نمی‌خواهیم آن را بر پایه‌ای محکم‌تر از خودش بنا کنیم. «هیچ نقطهٔ اتکاء ارشمیدسی در خارج از علوم طبیعی برای ما وجود ندارد» و به عبارت دیگر به نظرگاهی مقدم برعلوم طبیعی یا مافوق آن معتقد نیستیم.

از طرف دیگر اشیای مشاهده ناپذیر فیزیک مانند کوارک و الکترون را می‌پذیریم. در این جا نیز باور به این موجودات، مبتنی بر بهترین تبیین پدیدارهای فیزیکی است. «یعنی ما رئالیستیم و این رئالیسم در بطن معرفت شناسی طبیعی قرار دارد.» فیلسوفان ابزارگرا، اشیای مشاهده ناپذیر فیزیک نظری را فرض مفیدی برای توضیح و پیش‌بینی پدیدارهای مشاهده پذیر می‌دانند.

قاطبهٔ مردان اندیشهٔ دوران ما، بنیادگرایی را در معرفت‌شناسی نقد و رد می‌کنند. برای نمونه، نقد ویتگنشتاین[2] مبتنی بر طرد زبان خصوصی است که در جای دیگر به آن پرداخته‌ام (علوی‌نیا، ۴۷-۵۷). از دیدگاه ویتگنشتاین، ریاضیات محض بی‌معنی است (۱۹۶۱، شماره‌های 6.234 و 6.24). البته منظور این نیست که قضایای ریاضی مانند «جینگ، جانگ، جونگ» مهملند، بلکه بنابر *رسالهٔ منطقی ـ فلسفی*[3]، این قضایا خبری از عالم نمی‌دهند، همانگوئی‌اند و بدین اعتبار بی‌معنی. در *تحقیقات فلسفی* و *ملاحظاتی دربارهٔ مبادی ریاضیات*[4] (ص ۳۷) آنها را قاعده یا معیار می‌انگارد و بنابراین آنها را مشمول صدق و کذب نمی‌داند. ولی ویتگنشتاین نمی‌گوید چرا این قواعد خاص ریاضی، کارایی دارند. به نظر می‌رسد که نمی‌توانیم فیزیک را از ریاضیات جدا کنیم. احکام ریاضی با معنی و صادقند چون در کشف حقایق طبیعت، نقشی اجتناب‌ناپذیر

---

1. hypothetico - deductive method.
2. L. Wittgenstein
3. *Tractatus Logico - philosophicus*
4. *Remarks an the Foundations of Mathematics*

دارند. کواین هر نوع دانش پیشینی بنیادی را منتفی می‌نماید. «در صورتی که ساده‌سازی تمام ساختار مفهومی ما ایجاب کند، حتی قوانین منطق و ریاضیات نیز از تجدیدنظر مصون نمی‌مانند. بر اثر تجربه‌های فیزیک جدید پیشنهاد شده است که منطق دوارزشی فعلی را به منطق سه یا چندارزشی تغییر دهیم. قوانین منطق، اساسی‌ترین گزاره‌های ساختار مفهومی ما هستند و بدین جهت برای تجدیدنظر در آنها، بسیار محافظه کاریم ولی از آنجا که قوانین مذکور بنیادیند، یک تجدیدنظر مناسب در آنها می‌تواند سبب ساده شدن تمام دستگاه معرفت ما شود. در نتیجه قوانین منطق و ریاضیات نیز ممکن است به رغم همهٔ ضرورتشان، ملغی شوند. با این وجود انکار نمی‌کنیم که قوانین مذکور به اعتبار معانی واژه‌هایی که در آنها به کار رفته یا به اعتبار ساختار مفهومی ما صادقند» (۱۹۸۲، ۳).

رئالیسم علمی

اصول موضوعهٔ یک دستگاه اصل موضوعی اثبات‌پذیر نیستند. پس چرا آنها را قبول می‌کنیم؟ چه دلیلی در اثبات یا رد آنها داریم؟ بعضی می‌گویند که ریاضیات، وصف یک عالم عینی از اشیاء ریاضی است و اصول موضوعهٔ دستگاه‌های ریاضی برحسب صدق یا کذبشان در این عالم پذیرفته یا رد می‌شوند. این دیدگاه را رئالیسم یا افلاطون گرایی در ریاضیات می‌خوانند. ممکن است مسأله بدین صورت مطرح شود: ریاضیات دربارهٔ چیست؟ گزاره‌ای چون «۴=۲+۲» دربارهٔ اعداد است. در هندسه به مطالعهٔ مثلث، کره و اشیائی نظیر آن می‌پردازیم. اما این اشیاء چه ماهیتی دارند؟ کجا هستند؟ شناخت ما از این اشیاء انتزاعی که در هیچ زمان و مکانی نیستند و رابطه‌ای علّی نیز با ما ندارند از کجا حاصل می‌شود؟ وقتی ریاضی‌دانان رئالیست در جواب این سؤال درمی‌مانند، عقب‌نشینی می‌کنند و فرمالیست می‌شوند و ریاضیات را ترکیبی از نمادهای بی‌معنی می‌انگارند. به اصطلاح در روزهای هفته رئالیستند و در تعطیلات آخر هفته، فرمالیست می‌شوند (دیویس[1]، ۳۲۱).

امروزه معرفت شناسی سنتی اصالت تجربیات، که بیان دیگری از یک حکمت برین

1. P.J. Davis

بود، کنار گذاشته شده است. آنها می‌خواستند نظریات علمی را بر پایهٔ فلسفه‌ای اولی استوار سازند، ولی ما معرفت‌شناسی را در درون نظریهٔ علمی مطرح می‌کنیم. منظور از معرفت شناسی، کاربرد علم دربارهٔ خودش است. فلاسفهٔ گذشته، شناخت را نتیجهٔ شک می‌خواندند. به نظر می‌رسد که شک هم نتیجهٔ شناخت است. توهمات در قیاس با آن چه توهم نیست، توهم خوانده می‌شوند. به عبارت دیگر، دفاع از علم در درون خود علم صورت می‌گیرد، نه از پایگاهی ارشمیدسی در خارج از آن. حقانیت علوم طبیعی را فرض می‌کنیم و شک خود را در بطن آنها ارائه می‌نمائیم.

ما برخلاف نظام سازان کلاسیک، دستگاه فلسفی منحصر به فردی بر پایهٔ آنچه آنها بدیهیات عقلی می‌خواندند، نمی‌سازیم. هیچ کدام از گزاره‌های نظام فکری، حکمی قطعی انگاشته نمی‌شود و آماده‌ایم که، در صورت لزوم، حتی اصول موضوعهٔ نظریه مجموعه‌ها را هم رد کنیم. وقتی در تجربه، مثال نقضی پیش می‌آید، در این که کدام یک از قضایای دستگاه، مورد تجدید نظر قرار گیرد، آزادی عمل داریم. یعنی مفاد و مضمون تجربی یک قضیه، نامتعین است. بدین ترتیب، رئالیسم ساده لوحانهٔ گذشتگان را رد می‌کنیم و به رئالیسم علمی روی می‌آوریم. به عالم از دریچه شبکهٔ معتقداتمان می‌نگریم چون هرگز نمی‌توانیم در موضعی خارج از تمام باورهایمان بایستیم و از آن جا به نقد آنها بپردازیم. واقعیت به اعتبار دستگاهی از مفاهیم و قضایای مفروض ما تعین و تشخص پیدا می‌کند. آنچه را که واقعیت عینی می‌انگاریم، مبتنی بر قالب‌های مفاهیم و شبکه باورهای ماست.

برهان اجتناب ناپذیری

یکی از وجوه چشم‌گیر ریاضیات، کاربرد آن در علوم تجربی است. استفاده از زبان ریاضی در فیزیک، مانند استفاده از فضاهای هیلبرتی در مکانیک کوانتومی یا هندسهٔ دیفرانسیل در نسبیت عام، چنان مهم است که به نظر می‌رسد فهم مضامین این علوم بدون ریاضیات محال باشد. کواین در مقالهٔ «*صدقِ هستی شناختی از دیدگاه کارناپ*»[1]

1. *Carnap's ontological truth*

(۱۹۸۳، ۳۵۵-۳۷۶) و پاتنم [1] در *فلسفهٔ منطق* این مطلب را دلیل باورشان به اعیان ریاضی گرفته‌اند. بنابر استدلال آنها، استناد به اشیاء ریاضی مانند مجموعه‌ها در بهترین نظریات علمی اجتناب ناپذیر است، پس لازم است که عینیت این اشیاء را بپذیریم و اگر چنین نکنیم «صداقت علمی» نداریم (۱۹۷۱، ۲۷). اشیاء ریاضی از نظر معرفت شناختی هم ارز اعیان نظری فیزیکند، چون باور به هر کدام از آنها بر پایهٔ شواهدی است که کل نظریه را تأیید می‌کند. این را برهان اجتناب ناپذیری کواین ـ پاتنم در رئالیسم ریاضی می‌خوانند که خلاصه‌اش چنین است: احکام ریاضی صادقند چون در کشف حقایق علوم طبیعی کاربرد دارند و نمی‌توان آنها را از علوم طبیعی حذف کرد. بنابراین، صداقت علمی ایجاب می‌کند که عینیت اشیاء ریاضی را بپذیریم. به عبارت دیگر:

۱. به همه اشیائی که برای بهترین نظریهٔ علمی، اجتناب ناپذیرند، التزام هستی شناختی داریم.

۲. اشیاء ریاضی برای بهترین نظریه‌های علمی، اجتناب ناپذیرند.

نتیجهٔ این دو مقدمه آن است که ما به اعیان ریاضی، التزام هستی شناختی داریم.

استدلال یاد شده، نامگرایانی را که در مورد سایر اعیان نظری علم مانند کوارک، پایون و سیاهچال‌های سماوی رئالیستند در وضع دشواری قرار می‌دهد، چون آنان شبیه همین برهان کواین ـ پاتنم را در فیزیک می‌پذیرند یعنی در مورد کوارک و سیاهچال رئالیستند ولی عینیت اشیاء ریاضی را نمی‌پذیرند. این همان است که کواین «معیار دو گانه» [2] می‌خواند (هارت [3]، ۵۱).

اما از کجا می‌دانیم کاربرد ریاضیات در فیزیک اجتناب ناپذیر است. کواین مسأله را بدین صورت مطرح می‌کند که بهترین نظریات علمی خود را به زبان رسمی [4] ترجمه می‌کنیم، آن وقت سورهای وجودی و اشیائی راکه تسویر شده‌اند در نظر می‌گیریم. ما به این اشیاء التزام هستی شناختی داریم.

---

1. H. Putnam

فلسفهٔ منطق *(Philosophy of Logic)* از پاتنم بیانیهٔ کلاسیک رئالیسم علمی است اما معمولاً کواین را بنیانگذار این مکتب می‌دانند.

2. double standard

3. D.H. Hart

4. canonical

اولین مسأله این است که چه مقدار از ریاضیات اجتناب ناپذیر و در نتیجه دارای التزام هستی شناختی است. چنین به نظر می‌رسد که برهان اجتناب ناپذیری فقط باور ما را به بخش ریاضیات کاربردی در علوم طبیعی، توجیه می‌نماید. در همین راستاست که پاتنم از نیازهای نظریهٔ مجموعه‌ای فیزیک صحبت می‌کند (۱۹۷۱، ۲۳). و کواین، دامنه‌های دور دست نظریهٔ مجموعه‌ها را فاقد کاربرد فیزیکی و بنابراین سرگرمی ریاضی دانان می‌داند که بار هستی شناختی ندارد (شیلپ[1]، ۴۰۰). می‌توانیم ملایم‌تر با قضیه برخورد کنیم. درست است که دامنه‌های دور دست نظریهٔ مجموعه‌ها، کاربرد فیزیکی ندارند ولی چون در سایر شاخه‌های ریاضیات به کار می‌روند، باعث التزام هستی شناختی می‌گردند. وقتی زنجیرهٔ کاربردها به علوم طبیعی منتهی شود، تمام زنجیره، متضمن التزام هستی شناختی است. کواین نیز نظریهٔ مجموعه‌های ترانسفینی را در این راستا توجیه می‌کند (۱۹۸۴، ۷۸۳-۷۸۸). ولی هیچ دلیلی برای فراتر رفتن از مجموعه‌های ساختنی نمی‌بیند. رسینک نیز اشیاء نظری ریاضی و فیزیک را دارای یک ماهیت می‌داند. بحث دقیق و عمیق او مبتنی بر فیزیک ذرات بنیادی است (ص ۱۰۱-۱۱۱).

طبیعت گرایی و کل گرایی

معنی طبیعت گرایی این است که حکمتِ برینی وجود ندارد، فلسفه و علم تفکیک ناپذیرند و با هم یک پیوستار را تشکیل می‌دهند. به گفتهٔ کواین منشاء این جهان بینی «ذهن سالم دانشمندان علوم طبیعی است که هرگز غیر از تشکیک قابل بحثی که درون خود علوم طبیعی مطرح است، شک دیگری به خود راه نمی‌دهند» (۱۹۸۱، ۷۲). جان کلام این که طبیعت گرا، روش‌های غیر علمی را در هستی شناسی کنار می‌گذارد. برای دانستن این که چه اشیائی وجود دارند، داوری به جز علوم تجربی نداریم. ریاضیات بخشی از این جهان بینی علمی و جزء علوم تجربی است. بنابراین، می‌توانیم فقط به اشیاء مطرح در بهترین نظریات علمی، باور داشته باشیم. اما آیا باید وجود همهٔ این اشیاء را پذیرفت یا می‌توان تنها بعضی از آنها را قبول کرد؟ در اینجا کل‌گرایی، مسأله را حل می‌کند. وقتی یک نظریه با یافته‌های تجربی تأیید می‌شود، کل آن نظریه و از جمله

1. A. Schilpp

ریاضیاتی که در آن به کار رفته، مورد تأیید قرار می‌گیرد (۱۹۶۶، ۱۲۰-۱۲۲). پاتنم تأکید می‌کند که در توجیه باور خود به اجزاء ریاضی یک نظریه، به همان شواهدی متوسل می‌شویم که برای تبیین اعتقاد به بخش‌های تجربی آن مطرح می‌کنیم (۱۹۷۵، ۶۰-۷۸). نکتهٔ مهم این است که ما نمی‌توانیم این دو بخش را از هم جدا کنیم. پس طبیعت گرایی و کل گرایی هر دو با یکدیگر، مقدمهٔ نخست برهان اجتناب ناپذیری را توجیه می‌نمایند.

کل گرایی مذکور، کل گرایی تأییدی خوانده می‌شود و در برابر کل گرایی معنی شناختی قرار دارد. منظور از کل گرایی معنی شناختی، این است که واحد معنی نه یک جملهٔ منفرد، بلکه یک دستگاه منسجم از جملات و در مواردی کل زبان است. این نوع کل گرایی به انکار وجه افتراق قضایای تألیفی و تحلیلی برمی‌گردد و به تز مشهور عدمِ تعینِ ترجمهٔ کواین مربوط می‌شود.[1] کل گرایی معنی شناختی، مورد مناقشهٔ فیلسوفان این دوران است ولی به نظر می‌رسد که قاطبهٔ آنها کل گرایی تأییدی را پذیرفته‌اند. علت طرح این موضوع، در اینجا، آن است که کواین از کل گرایی معنی شناختی برای اثبات برهان اجتناب ناپذیری استفاده می‌کند (هارت، ۵۰-۵۱).

مدی به مقدمهٔ اول برهان اجتناب ناپذیری ایراد می‌گیرد. انتقاد او متوجه مسائلی است که از اصول استاندارد نظریهٔ مجموعه‌ها (ZFC) مستقلند. برای حل این مسائل، اصل موضوع‌های جدیدی را در تکمیل ZFC پیشنهاد می‌کنیم. او می‌گوید برهان‌هایی که در تأیید این اصل موضوع‌ها ارائه می‌شوند، هیچ ربطی به فیزیک یا سایر علوم طبیعی ندارند. اینها، برهان‌هایی در درون خود ریاضیاتند. مطابق تز اجتناب ناپذیری، اصول موضوعه جدید باید برحسب توافقشان با بهترین نظریات علمی جاری ارزیابی شوند. یعنی ریاضی دانان باید اصل موضوع‌های جدید را با توجه به پیشرفت‌های اخیر فیزیک بررسی کنند. از آنجا که ریاضی‌دانان چنین نمی‌کنند، کل گرایی تأییدی، تجدیدنظر در پراتیک متداول آنان را ایجاب می‌کند و این به عقیده مدی با طبیعت گرایی در تعارض است (مدی، ۲۸۶-۲۸۹). بدین سان، از نظر مدی، طبیعت گرایی و کل گرایی تأییدی با هم ناسازگارند و او به ناچار، اولی را قبول و دومی را رد می‌کند. چون هم کل گرایی

---

۱. نظریهٔ عدم تعیّنِ ترجمه، اولین بار در کتابِ *Word and object* ارائه شد.

تأییدی و هم طبیعت گرایی، برای اولین مقدمهٔ برهان اجتناب ناپذیری لازمند، نقد مدی به طور غیر مستقیم این مقدمه را رد می‌کند.

ولی به نظر می‌رسد که آنچه مدی تحت عنوان «طبیعت گرایی» مطرح می‌کند، اصلاً طبیعت گرایی نیست (هندریچ[1]، ۶۰۴).

بعضی گمان می‌برند که برهان اجتناب ناپذیری تنها استدلال محکمی است که می‌توان در تأیید رئالیسم ریاضی ارائه نمود. اگر چنین باشد و برهان اجتناب ناپذیری نیز رد شود، رئالیسم در ریاضیات منتفی می‌شود. در این جا برهان‌های اثبات و رد کنندهٔ رئالیسم ریاضی مطرح می‌گردد. مهمترین استدلال‌هائی که علیه رئالیسم ریاضی آورده‌اند عبارتند از: ۱. معمای معرفت شناختی اعیان ریاضی. چگونه ممکن است ما از اشیائی شناخت داشته باشیم که متحیز در هیچ زمان و مکانی نیستند و رابطه‌ای علّی با ما ندارند؟ (بناسراف، ۱۹۸۳، ۴۰۳ـ۴۲۰).

۲. مشکل عدم تعین در فرو کاهی اعداد به مجموعه‌ها. اگر اعداد را می‌توان به مجموعه‌هایِ مختلف فروکاست، کدامیک از این مجموعه‌های متباین را باید انتخاب کنیم؟ مثلاً مجموعه‌های فون نویمان یا زرملو ـ فرانکل یا... (همان، ۲۷۲ـ۲۹۴).

افزون بر برهان اجتناب ناپذیری، استدلالی دیگر در تأیید رئالیسم ریاضی، این است که ما نیاز به یک دلالت شناسی یکنواخت در همهٔ عرصه‌های سخن داریم؛ چه ریاضی و چه غیر ریاضی که البته رئالیسم ریاضی با این معاوضه به سهولت برخورد می‌کند ولی نامگرایی از عهدهٔ چنین کاری برنمی‌آید.

طبیعت گرایی در ریاضیات

طی دهه‌های اول قرن گذشته سه مکتب معروف در فلسفهٔ ریاضیات مطرح شدند که هر یک به نوعی با مسألهٔ بی‌نهایت سروکار داشتند. شهودگرایی با قاطعیت، مفهوم بی‌نهایت را رد کرد. موضع براور[2] شبیه ایده‌آلیسم بارکلی بود، او اشیاء ریاضی را ساختمان‌های ذهنی می‌دانست نه موجودات عینی. شهودگرایی مدرن نیز که دامت[3] مطرح نمود،

1. T. Handrich 2. L. Brouwer 3. M. Dummett

نوعی «اصالت تحقیق پذیری»[1] بود. از این دیدگاه، یک گزارهٔ ریاضی فقط وقتی صادق است که به صورت ساختی اثبات پذیر باشد. بر عکس، از نظر صورت‌گرایان، ریاضیات مانند بازی شطرنج، یک بازی با نمادهای بی‌معنی است. مسألهٔ مهم برای فرگه این بود که چرا استنتاج منطقی یک قضیه از قضایای دیگر، در جهان فیزیکی کاربرد دارد؟ فرگه در رد صورت گرایی هیلبرت می‌گوید: چه امری کاربرد این رشته بی‌معنی نمادها را مفید می‌گرداند؟ (گیچ[2]، ۱۹۷۰). فرض کنید فیزیک دانی می‌خواهد فرضیه‌اش را امتحان کند. او از مقدمات مفروض خود با استفاده از ریاضیات یک پیش بینی تجربی می‌کند. اگر ریاضیات، رشته بی‌معنایی از نمادها است، چرا پیش‌بینی تجربی او را نتیجه فرضیه‌اش می‌دانیم؟ اگر پیش بینی، نتیجهٔ فرضیه نیست؛ پس نمی‌توانیم بگوییم پیش بینی او محکی است که فرضیه را با آن می‌سنجیم.

هیلبرت مانند براور فقط ریاضیات محدود را با معنی می‌دانست و ریاضیات ترانسفینی را ابزار مفیدی برای استنتاج قضایای با معنی در مورد ریاضیاتِ محدود می‌انگاشت. هیلبرت می‌خواست یک برهان فرا ریاضی ارائه نماید که بتوان با آن از گزاره‌های بی‌معنی ریاضیات ترانسفینی، گزاره‌های معنی دار ریاضیات محدود را استخراج کرد. اگر موفق می‌شد، همین روش استدلال را می‌توانست در جواب فرگه در مورد کاربرد ریاضیات در فیزیک به‌کار برد. ولی گودل اثبات کرد، محال است هیلبرت به این هدف برسد.

رئالیسم فرگه و گودل در فلسفهٔ ریاضی به دست کواین تکامل یافت و با طبیعت گرایی تلفیق شد. بسیاری از فیزیک دانان نیز پس از سال‌ها تلاش، بهترین راه حل معضلات مفهومی مکانیک کوانتومی را در آن دانستند که قوانین منطق را تغییر دهند، نه فرضیات فیزیکی را. یعنی موضع ریاضیات، به عنوان بخشی از بهترین نظریه دربارهٔ عالم نشان می‌دهد که قضایای ریاضی یقینی نیستند. در نتیجه می‌توانیم آنها را عوض کنیم. در این رئالیسم علمی است که شبح هر نوع دانش پیشینی - از جمله ریاضیاتِ پیشینی - از عرصهٔ جهان بینی حذف می‌شود.

---

1. verificationism
2. P. Geach

طبیعت‌گرا، بر خلاف رئالیست سنتی به ملاحظات متافیزیکی صدق و کذب عینی نمی‌پردازد بلکه به ملاحظات عملی، در درون یک جهان بینی علمی، توجه می‌کند. مدی اخیراً در *طبیعت‌گرایی در ریاضیات*، نظر تازه‌ای در مورد هستی‌شناسی ریاضی پیش می‌کشد و رئالیسم سنتی در ریاضیات[1] را به سود طبیعت‌گرایی رد می‌کند. ولی عیب کار وی آن است که طبیعت‌گرایی را فقط در درون ریاضیات مطرح می‌کند و مسأله رابطهٔ فیزیک و ریاضیات را مهمل می‌گذارد.

ما در طبیعت‌گرایِی نظریهٔ مجموعه‌ای به پیروی از گودل، حقایق اولیه ریاضی را شهودی می‌انگاریم و فرضیات خود را به واسطهٔ گزاره‌هایی که از آنها استنتاج می‌شوند و براساس قدرت تبیین و پیش بینی آنها ارزیابی می‌کنیم. به عبارت دیگر، اصول موضوعه را به صورت شهودی می‌پذیریم، منتها آنها را قطعی نمی‌انگاریم، بلکه نتایجی را که از آنها استنتاج می‌شود، و نیز تطابق آنها با تجربه را بررسی می‌کنیم. بدین ترتیب ریاضیات از علوم طبیعی جدا نمی‌شود.

نتیجه

بررسی‌های اخیر ریاضی دانان در مبانی ریاضیات، مفهوم «بداهت ذاتی» را به بایگانی تاریخ سپرده است. زمانی می‌گفتند، «از دو نقطه فقط یک خط مستقیم می‌گذرد» یا «زمین مرکز عالم است». ما عرف عامه یا بدیهیاتی عقلی را به موزهٔ تاریخ سپردیم که به گفتهٔ راسل «متافیزیک عصر حجر» بود (نکـ: مگی[2]، ۱۶۷) و پیشینیان ما نظام‌های فلسفی خود را بر پایهٔ آنها استوار می‌کردند. حالا می‌بینیم که اصول موضوعهٔ یک دستگاه ریاضی اثبات پذیر نیستند، بداهت ذاتی هم ندارند؛ پس چه دلیلی برای رد یا قبول آنها داریم؟ آیا می‌توانیم آنها را به میل خود تغییر دهیم یا کم و زیاد کنیم؟ فرض کنید که اصول موضوعهٔ فعلی نظریهٔ مجموعه‌ها، در دانش جبر کارآیی نداشته باشد و سؤالات طبیعی را بی‌جواب بگذارد. اگر چند اصل جدید بدان‌ها اضافه کنیم تا مشکل حل شود، صرفاً جنبهٔ مصلحت عملی را در نظر گرفته‌ایم و توجیه دیگری برای اصول

۱. منظور رئالیسم فرگه و گودل است.

2. B. Magee

موضوعهٔ خود نداریم.

به نظر می‌رسد که قضایای ریاضیات و فیزیک دارای یک ماهیتند یعنی ریاضیات بخشی از علوم تجربی است و نمی‌توان ریاضیات را از فیزیک جدا کرد. ولی مدی طبیعت‌گرایی را صرفاً در ریاضیات مطرح می‌کند. به عقیدهٔ او معیار پذیرش یک نظریهٔ ریاضی، معیاری درونی در پراتیک ریاضیات است و ربطی به فیزیک یا سایر علوم طبیعی ندارد. جان کلام مدی این است که عمل‌گرایی جاری ریاضی‌دانان حرفه‌ای، اساساً درست است و تنها انتقاد وارد، انتقادی درونی است. ما می‌توانیم با مطالعهٔ مسائل اصلی در تاریخ تکامل ریاضیات، قواعدی عمومی از عمل‌گرایی موفق ریاضی‌دانان حرفه‌ای را استخراج کنیم و مطابق آن قواعد به‌کار خود ادامه دهیم. ولی مسأله این است که هر نوع عمل‌گرایی منسجم پیچیده‌ای می‌تواند نسبت به معیارهای درونی خود درست باشد. مانند کف بینی، رمالی، ستاره شناسی[1] یا نظامهای متعارض الهیات جزمی. باید اثبات کرد که عمل‌گرایی ریاضی، بیش از یک عمل‌گرایی در درون یک نظام منسجم است. نمی‌توان معیار پراتیک ریاضی را در درون خود آن جستجو کرد. به گفتهٔ ویتگنشتاین «ما نمی‌توانیم برای قضاوت دربارهٔ درستی مطالب یک روزنامه به نسخهٔ دیگری از همان روزنامه استناد کنیم».

ریاضیات در علوم طبیعی کاربردی اجتناب ناپذیر دارد که مدی آن را فراموش می‌کند. دلیل او این است که روش ما در پذیرش اشیاء نظری ریاضی با اعیان نظری فیزیک متفاوت است. مدی می‌گوید که در فیزیک هسته‌ای مسائل هستی شناختی با توجه به سورهای وجودی در زبان رسمی حل و فصل نمی‌شوند. موضوع این است که در علوم طبیعی و حتی در شاخه‌های گوناگون ریاضی، روش‌های متفاوتی به‌کار می‌رود. این که فیزیک و بیولوژی روش‌های متفاوتی دارند، نشان نمی‌دهد که اعیان مورد بررسی در این دو رشته متفاوتند و از ماده‌ای جز اتم‌ها و مولکولها تشکیل شده‌اند. استقلال روش شناختی شاخه‌های مختلف ریاضیات نیز تائیدی بر این مطلب است. از طرف دیگر، نقش محوری ریاضیات در جهان بینی ما، تفکیک ناپذیری ریاضیات را از علوم

---

1. astrology

طبیعی نشان می‌دهد. ما هیچ نقطهٔ اتکاء ارشمیدسی در ورای جهان بینی علمی خود نداریم یعنی نمی‌توانیم فلسفه را از علم جدا کنیم؛ ابتدا یک حکمتِ برین تأسیس کنیم و بعد علوم ـ از جمله ریاضیات ـ را براساس آن بنا نماییم. این معنی «طبیعت گرایی» است. مدی «طبیعت گرایی ریاضی» را تواضع فلسفی می‌خواند (مدی، ۱۶۱) و رویکرد درست را توجه به مسائل درونی و پراتیک موفق ریاضی دانان می‌انگارد و در این زمینه برای مسائل بیرونی که انگیزهٔ فلسفی دارند نقشی قائل نیست. موضوع این است که ریاضیات بدون فیزیک توخالی است. کاربرد ریاضیات در فیزیک است که بدان معنا و مضمون می‌دهد. ریاضیات نمی‌تواند قاضی خود باشد. به اصطلاح ویتگنشتاین «هیچ معیاری را نمی‌توان با خودش سنجید» مدی می‌گوید «هیچ فلسفه‌ای نمی‌تواند در ریاضیات رسمی تجدید نظر کند» (همان، ۱۵۹).

این دیدگاه اولاً مبتنی بر این فرض است که ریاضیات، قطعی و مورد پذیرش همهٔ ریاضیدانان است در حالی که مثلاً براور و پیروان او بخش اعظم ریاضیات کلاسیک را رد می‌کنند. ثانیاً مدی چنین می‌انگارد که فلسفه از فیزیک و ریاضیات جداست، در حالی که فلسفه جز نقد و تحلیل معنی شناختی و معرفت شناختی قضایای عرف عامه و علوم ـ از جمله ریاضیات ـ نیست.

کتابشناسی

علوی نیا، سهراب، *معرفت شناسی ریاضی*، تهران، نیلوفر، ۱۳۸۰ش.

Benacerraf, P., "*Mathematical Truth*", Benacerraf, P. and Putnam, H., Philosophy of Mathematics, CUP, 1983.

__________, "*What numbers could not be*?", Benacerraf P. and Putnam, H., Philosophy of Mathematice, CUP, 1983.

Davis, P.J.& Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Birkhauser, 1981.

Geach, P. and Black, M. (eds)., *Translations from the philosophical Writings of Gottlob Frege*, Blackwell, 1970, sec.91 of Grundgezetze.

Gödel, Kurt, "On Formally undecidable propositions of principia Mathematical and related systems", *Collected works*, vol 1., (ed.) S. feterman et al., oxford univ. press., 1986, pp. 95-144.

Hart, D.H. (ed.), *The Philosophy of Mathematics,* OUP. 1996.

Hondrich, Ted. (ed.), *The Oxford Companion to Philosophy*, OUP, 1995.

Kline, M., *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times,* OUP,1972.

Maddy, p., "Indispensability and practice", *Journal of Philosophy,* 89, 1992.

Magee, B., *Modern British Philosophy,* OUP, 1986.

Putnam, H., *Philosophy of Logic*, George Allen and Unwin, 1971.

_________, "what is Mathematical Truth", *Philosophical Papers,* Vol.1. CUP, 1975.

Quine, W.V., "*Carnap's ontological truth*", Benacerraf and Putnam (eds.) Philosophy of Mathematics, HUP, 1983.

_________, *From a Logical Point of View*, HUP, 1953.

_________," Review of parsons", *Journal of Philosophy*, 1984.

_________, *Methods of Logic,* fourth edition, HUP, 1982.

_________, *Theories and Things,* HUP, 1981.

_________, *The ways of Paradox,* revised edition, HUP, 1966.

Resnik, M., *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press Oxford, 1997.

Schilpp, A. (ed.), *The Philosophy of Quine,* Prentice Hall, 1986.

Shapiro, S., *Philosophy of Mathematics,* OUP.1997.

Wittgenstein, L., *Remarks on the Foundations of Mathematics,* Blackwell, third edition, 1978.

____________, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge, 1961, Secs.6.234, and 6.24.