

# ریشه یابی کاستی های موجود در تحلیل های عددی مدل های غیرخطی دینامیکی مربوط به سیستم های سازه ای

## جمشید فرجودی

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

## آرام سروشیان

دانشجوی دکتری گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۱/۴/۱۸، تاریخ تصویب ۸۲/۹/۱)

## چکیده

سال هاست که پاسخ های حاصل از انتگرال گیری گام به گام مدل های دینامیکی غیرخطی دچار مشکلات عدم همگرایی هستند. علت این معضل، در ادبیات فنی به دقت توضیح داده نشده است. در این مقاله به منظور توضیح هر چه بهتر علت بروز عدم همگرایی پاسخ های حاصل از انتگرال گیری گام به گام مدل های دینامیکی غیرخطی، طی انجام چندین اثبات ریاضی به بررسی دقیق این پدیده نامطلوب پرداخته شده است. نتیجه حاصل بیانگر این واقعیت است که با توجه به لحاظ کردن تقریبی رفتار غیرخطی مدل های دینامیکی در طی تحلیل های گام به گام، همواره امکان بروز مشکل عدم همگرایی وجود دارد. این معضل ذاتاً از نوعی ناسازگاری نتیجه می شود، و از نظر کمی ممکن است در حد ناپایداری باشد.

**واژه های کلیدی:** انتگرال گیری مستقیم، مدل های دینامیکی غیرخطی، همگرایی، رفتار تکه تکه خطی

## مقدمه

حاصل هستند [۴]. به عبارت دیگر باید نشان داده شود که می توان با تغییر تدریجی یکی از پارامترهای تحلیل، با روندی مشخص به صورت مجانبی به پاسخ دقیق دست یافت. در مورد اهمیت همگرایی اشاره به این نکته نیز لازم است که علاوه بر اینکه بدون همگرایی نمی توان به جواب تقریبی بهتری دست یافت، در صورت برقرار بودن همگرایی می توان با اعمال روش هایی چون برون یابی ریچاردسون<sup>[۵]</sup> به پاسخ هایی بسیار دقیق تر نائل آمد.

با وجود اینکه با در نظر گرفتن طول گام های زمانی به عنوان پارامتر<sup>۸</sup> تحلیل، همگرایی روش های انتگرال گیری مستقیم گام به گام، قبلاً مورد مطالعه قرار گرفته است [۶-۸]، ولی صرفاً در مسائل خطی نتایجی قابل توجه بدست آمده است. به بیانی بهتر، در حالیکه قبل از انتگرال گیری مستقیم از معادله حرکت مدل های خطی صرفاً با توجه به مشخصات دینامیکی مدل و تقریب بکار رفته در لحاظ کردن برانگیزش [۶] و شرایط اولیه (و مستقل از مقادیر برانگیزش و شرایط اولیه...) می توان اندازه گام های زمانی را چنان تعیین نمود که شرط همگرایی پاسخ های حاصل از انتگرال گیری

امروزه احداث ابنیه فنی با کیفیت و دوام زیاد و بهای ارزان از اساسی ترین اهداف مهندسی عمران است. در کشور لرزه خیزی چون ایران نیل به این هدف بدون منظور داشتن رفتار دینامیکی<sup>۱</sup> سازه ها میسر نیست. همچنین با توجه به جنبه های اقتصادی طراحی عموماً در نظر گرفتن رفتار غیرخطی سازه ها ضروری است.

هر چند روش هایی مانند آنالیز مودی<sup>۲</sup>، استفاده از حوزه فرکانس<sup>۳</sup> [۱]، آنالیز مودی غیرخطی [۲] و ... برای تحلیل مدل های<sup>۴</sup> دینامیکی ارائه شده اند، مجموعه روش های انتگرال گیری<sup>۵</sup> مستقیم گام به گام تنها ابزار کارآمد برای بررسی رفتار دینامیکی و دینامیکی غیرخطی در حالت کلی این مدل ها محسوب می شود [۱]. این دسته از روش ها که عمدتاً پس از انتشار مقالات پروفیسور نیومارک<sup>۶</sup> در سال ۱۹۵۹ [۳] به عنوان ابزار تحلیل دینامیکی سازه ها شناخته شدند، با وجود سادگی و کارایی در انواع مسائل دینامیکی، از تقریبی بودن پاسخ های محاسبه شده رنج می برند، و لذا به عنوان روش هایی تقریبی نیازمند کنترل همگرایی پاسخ های

تقسیمات نادرست گام های زمانی اشاره دارند و حتی متذکر می شوند که مشخص نیست که عدم همگرایی پاسخ ها از نوع ناسازگاری است یا ناپایداری [۷، ۱۸]. همین امر یعنی توجه ناکافی به دلایل معضلات همگرایی، عامل اصلی عدم موفقیت کامل در رفع این پدیده نسبتاً قدیمی به نظر می رسد.

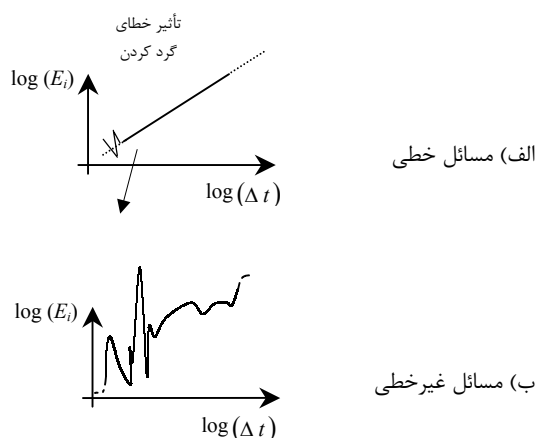
برای رفع این نقیصه، نویسندگان این مقاله که خود نیز با ارائه مقالاتی روش هایی را برای دست یابی به پاسخ های همگرایی مدل های دینامیکی غیرخطی پیشنهاد نموده اند [۱۹-۲۱]، با برداشتن قدمی به عقب، سعی دارند که در این مقاله به بررسی اصولی علل عدم همگرایی پاسخ های مدل های دینامیکی غیرخطی بپردازند. برای این منظور معادله نیم گسسته حرکت مربوط به مدل های غیرخطی تکه تکه خطی در حالتی فرضی که در آن خطاهای باقیمانده و کنترل شده توسط رواداری های رفتار غیرخطی صفر است، در نظر گرفته شده است، و در این حالت خاص عدم بروز معضل عدم همگرایی به تفصیل و به روشی صرفاً ریاضی اثبات شده است. سپس بحث انجام شده به مدل های غیرخطی غیر تکه تکه خطی تعمیم داده شده است. در مرحله بعد بر اساس اثبات انجام شده، علت بروز عدم همگرایی پاسخ های معادلات غیرخطی نیم گسسته حرکت توضیح داده شده است، و نهایتاً صحت بحث در مورد حالت کلی مدل های دینامیکی پیوسته در مکان و زمان ثابت شده است. در مورد جامعیت بحث ارائه شده نیز توجه به این امر لازم است که در بحث انجام شده هیچگونه محدودیتی برای نوع مدل غیرخطی، نوع برانگیزش، روش گام به گام و نحوه محاسبات تکراری مدل کردن رفتار غیرخطی در نظر گرفته نشده است، و لذا نتایج حاصل کلی ترین حالت ها را نیز شامل می شود.

در پایان امید است ماحصل این تحقیق راهگشای روش هایی هر چه کارا تر برای نیل به پاسخ های همگرا برای مدل های دینامیکی غیرخطی باشد.

### چهارچوب نظری

لم ۱: اگر مجموعه مقادیر پاسخ واقعی (تغییر مکان یا سرعت در یک درجه آزادی دلخواه) با  $R$  مشخص شود،

مستقیم ارضا شود، در مسائل غیرخطی این امر هنوز به عنوان یک مسأله حل نشده باقی است [۹]. این مشکل که بصورت عدم همگرایی پاسخ های حاصل از انتگرال گیری مستقیم گام به گام مدل های دینامیکی غیرخطی جلوه گر می شود، حداقل از سه دهه قبل شناخته شده است [۱۰] و بارها در بررسی مدل های سیستم های دینامیکی ساده [۱۱-۱۳] و یا مدل های دینامیکی پیچیده مربوط به مسائل واقعی [۱۴] به آن اشاره شده است. حتی نشان داده شده است که در برخی مسائل خاص، رفتار غیرخطی مدل های دینامیکی می تواند روش های همواره پایدار را به روش هایی همواره ناپایدار مبدل کند [۱۵]. به بیان بهتر در حالیکه تغییرات خطای پاسخ تقریبی باید از روندی مشابه شکل (الف) تبعیت کند [۴]، در مسائل غیرخطی



شکل ۱: روند عمومی تغییرات خطای پاسخ حاصل از انتگرال گیری گام به گام مسائل خطی یا غیرخطی.

شکل (ب-۱) به دست می آید. شکل (۱) به وضوح بیانگر معضلات همگرایی پاسخ های تقریبی حاصل از تحلیل گام به گام مدل های دینامیکی غیرخطی است. متخصصین متعددی به خصوص در دهه اخیر روش هایی را برای برطرف کردن معضل عدم همگرایی پاسخ های مدل های دینامیکی غیرخطی پیشنهاد نموده اند [۱۶، ۱۷]، که متأسفانه هیچیک جوابگوی حالت کلی مسائل غیرخطی نیست [۹].

در مورد علت و نحوه بروز پدیده ناخواسته عدم همگرایی پاسخ های حاصل از تحلیل گام به گام مدل های دینامیکی غیرخطی، ادبیات فنی موجود صرفاً به

بالاخره  $\tau(t_{n-i})$  خطای موضعی گام زمانی آغاز شده در ایستگاه زمانی  $t_{n-i}$  است [۲۳،۲۲].  
با اعمال نرم <sup>۱۳</sup> دلخواه بر رابطه (۱) و توجه به ویژگی نرم ها [۲۴] نامساوی زیر:

$$\|e(t_{n+1})\| \leq \| [A]^{n+1} \| \cdot \|e(0)\| + \sum_{i=0}^n \| [A]^i \| \cdot \|\tau(t_{n-i})\| \quad (۳)$$

بدست می آید. از طرفی طبق قضیه لکس <sup>۱۴</sup> [۲۵] (به بیان ساده، قضیه لکس: همگرایی = پایداری + سازگاری)، فرضیات مندرج در صورت لم، پایداری عددی را برای مسائل خطی با شرایط اولیه ثابت ایجاب می کند. این نتیجه، با توجه به نحوه کنترل پایداری عددی در مسائل خطی [۲۲] و یا حتی تعریف پایداری عددی [۲۶،۹] و مستقل بودن این تعریف از خطای شرایط اولیه، به مدل های مورد بررسی در این لم نیز به وضوح قابل تعمیم است. با برقرار بودن شرط پایداری رابطه (۳) به نامساوی زیر:

$$\|e(t_{n+1})\| \leq \|e(0)\| + \sum_{i=0}^n \|\tau(t_{n-i})\| \quad (۴)$$

تحویل می شود. از طرفی طبق فرضیات لم، شرایط اولیه با نرخ برابر  $q$  به سمت شرایط اولیه واقعی همگرا هستند. این امر به معنی برقراری رابطه زیر:

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \|e(0)\| \approx C_1 \cdot (\Delta t)^q \quad (۵)$$

است. در رابطه فوق  $C_1$  ضریبی ثابت و تابع شرایط اولیه، و  $\Delta t$  بیانگر اندازه گام زمانی است. همچنین، خطای موضعی در هر گام زمانی که در طی کنترل سازگاری محاسبه می شود [۲۷]، بر اساس فرض صفر بودن خطا در آغاز گام زمانی تعریف می شود [۲۳]. در نتیجه جزء دوم در طرف راست رابطه (۴) که مجموع خطاهای موضعی است، مستقل از خطای شرایط اولیه و ثابت بودن آن ها است. بنابراین فرضیات ذکر شده در صورت لم و قضیه لکس رابطه زیر:

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n \|\tau(t_{n-i})\| \approx C_2 \cdot (\Delta t)^q \quad (۶)$$

پاسخ همگرای بدست آمده از تحلیل های گام به گام مدل های دینامیکی دارای این ویژگی است که زمان برابر شدن آن با مقدار دلخواهی مانند  $\gamma$  در  $R$  به سمت یکی از زمان های واقعی حدوث  $\gamma$  همگرا می شود.

**اثبات:** منحنی های تقریبی و دقیق پاسخ بر حسب زمان، همان منحنی های تقریبی و دقیق زمان بر حسب پاسخ هستند. در نتیجه، همگرایی پاسخ بدست آمده از تحلیل گام به گام که به معنای همگرایی منحنی تقریبی پاسخ-زمان به سمت منحنی دقیق پاسخ-زمان است، همگرایی منحنی تقریبی زمان-پاسخ به سمت منحنی دقیق زمان-پاسخ را ایجاب می کند. این توضیح با توجه به فرض همگرایی منظور شده در صورت لم عملاً به معنای همگرایی زمان حدوث پاسخ دلخواهی به سمت یکی از زمان های واقعی حدوث آن پاسخ، و به پایان رسیدن اثبات ادعای لم است.

**لم ۲:** اگر در حالتی فرضی شرایط اولیه یک مدل دینامیکی خطی با نرخ برابر  $q$  به سمت مقادیر واقعی خود همگرا شوند، پاسخ حاصل از تحلیل این مدل با روش گام به گامی که دارای نرخ همگرایی  $q$  برای مسائل خطی با شرایط اولیه ثابت است، با نرخ  $q$  به سمت مقادیر دقیق همگرا می شود.

**اثبات:** برای هر مود <sup>۱۱</sup> ارتعاشی دلخواه مدل های خطی چند درجه آزادی رابطه خطا در ایستگاه زمانی  $t_{n+1}$  بصورت زیر:

$$e(t_{n+1}) = [A]^{n+1} \cdot e(0) - \sum_{i=0}^n [A]^i \cdot \tau(t_{n-i}) \quad (۱)$$

است [۲۲]. در رابطه (۱)  $e(t_{n+1})$  بیانگر تفاوت مقادیر

پاسخ واقعی،  $\left\{ \begin{matrix} u(t_{n+1}) \\ \dot{u}(t_{n+1}) \end{matrix} \right\}$  و پاسخ محاسبه شده  $\left\{ \begin{matrix} u_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} \end{matrix} \right\}$

(در مدل یک درجه آزادی معادل مود ارتعاشی مورد مطالعه) بصورت:

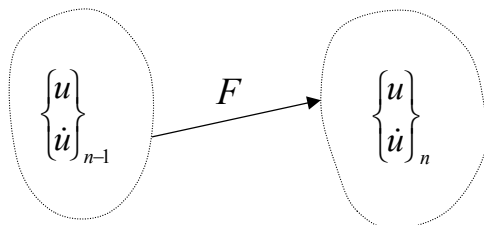
$$e(t_{n+1}) = \left\{ \begin{matrix} u(t_{n+1}) - u_{n+1} \\ \dot{u}(t_{n+1}) - \dot{u}_{n+1} \end{matrix} \right\} \quad (۲)$$

$[A]$  ماتریس <sup>۱۲</sup> بزرگنمایی [۲۲] و دارای ابعاد  $2 \times 2$  و

انجام می شود. در رابطه (۹) متغیرهای جدید  $\xi$ ،  $\omega$ ،  $P(t)$ ،  $m$ ،  $u_0$  و  $\dot{u}_0$  به ترتیب بر ضریب میرایی، فرکانس طبیعی دورانی، تاریخچه زمانی برانگیزش خارجی، جرم، تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه مدل یک درجه آزادی مورد مطالعه دلالت دارند. همچنین متناسب با رابطه فوق، می توان هر روش گام به گام را به شکل زیر:

$$\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_n = [A(\omega, \Delta t, \xi)] \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n-1} + [L(\omega, \Delta t, \xi)] \cdot \begin{Bmatrix} P_{n-1} \\ m \\ P_n \\ m \end{Bmatrix} \quad (10)$$

کـــــه در آن  $[A(\omega, \Delta t, \xi)]$  و  $[L(\omega, \Delta t, \xi)]$  ماتریس های  $2 \times 2$  خاص هر روش گام به گام هستند، تعریف نمود [۲۲]. طبق رابطه (۱۰) با در نظر گرفتن گام زمانی  $n$  ام در فاصله ایستگاه های زمانی  $t_n$  و  $t_{n-1}$ ، در هر روش گام به گام مقادیر پاسخ در انتهای گام زمانی بر حسب مقادیر پاسخ در آغاز گام زمانی، اندازه گام زمانی، مشخصات مدل (جرم، سختی و میرایی) و بالاخره مقادیر برانگیزش در آغاز و انتهای گام زمانی مشخص می شوند. در نتیجه با قبول روش گام به گام، مقادیر برانگیزش در آغاز و انتهای گام زمانی، اندازه گام زمانی و مشخصات مدل، به عنوان پارامترهای ثابت در گام زمانی  $n$  ام، رابطه بین پاسخ در دو انتهای گام زمانی  $n$  ام، بصورت شماتیک<sup>۱۵</sup> نشان داده شده در شکل (۲) قابل بیان خواهد بود. از طرفی چون



شکل ۲: نمایش روش انتگرال گیری به صورت تابعی از مجموعه پاسخ های لحظه  $n$  به سمت مجموعه پاسخ های لحظه  $n$ .

را برای مسائل مورد بررسی به مانند مسائل خطی با شرایط اولیه ثابت سبب می گردد. در این رابطه  $C_2$  ضریبی ثابت و تابع مقدار پاسخ است. نهایتاً نیز از روابط (۴) الی (۶) رابطه زیر:

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \|e(t_{n+1})\| \approx C_0 \cdot (\Delta t)^q \quad (7)$$

که در آن  $C_0$  ضریبی ثابت و تابع پاسخ و شرایط اولیه است، بدست می آید. رابطه اخیر مبین همگرایی با نرخ  $q$  پاسخ مسائل مورد بحث است و اثبات لم را به پایان می رساند.

**نتیجه ۱:** برای یک روش گام به گام همگرا در حالت خطی (مثلاً با نرخ  $q$ ):

اولاً: همگرایی پاسخ مسائل خطی منوط به همگرایی شرایط اولیه است،

ثانیاً: اگر پاسخ و شرایط اولیه به ترتیب با نرخ های  $q_0$  و  $q_1$  همگرا باشند، رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$q_0 = \text{Min}(q_1, q) \quad (8)$$

**اثبات:** با توجه به رابطه (۴) و تعریف همگرایی، صحت هر دو ادعای فوق کاملاً مشخص بوده نیازی به توضیح بیشتر ندارد.

**لم ۳:** در تحلیل گام به گام مدل های دینامیکی، در هر گام زمانی خاص، به ازای هر روش انتگرال گیری همگرا در حالت خطی، روش انتگرال گیری دیگری را می توان تعریف نمود که مقادیر پاسخ آغاز گام زمانی را بر حسب مقادیر پاسخ انتهای گام زمانی و مقادیر برانگیزش در آغاز و انتهای گام زمانی محاسبه نماید.

**اثبات:** چون طبق اصول اولیه قریب به اتفاق روش های گام به گام، در هر گام زمانی رفتار خطی فرض می شود و ضمناً در صورت این لم صرفاً یک گام زمانی در نظر گرفته شده است، در اثبات این لم، توجه به یک مود ارتعاشی دلخواه کفایت می کند. در نتیجه، ارائه اثبات، در حالت ساده و یک درجه آزادی زیر:

$$\ddot{u} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = \frac{P(t)}{m}$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \quad (9)$$

در این مرحله مدل سوم را با مشخصاتی مشابه با دو مدل بررسی شده، بدون برانگیزش خارجی، و صرفاً با شرایط اولیه زیر:

$$\begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^3 = \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^1 - \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^2 \neq 0 \quad (14)$$

تعریف نموده، مورد بررسی قرار می دهیم. با توجه به خطی بودن رفتار سه مدل در بازه زمانی  $t_{n-1} \leq t < t_{\infty}$ ، پاسخ واقعی مدل سوم را می توان حاصل تفریق پاسخ واقعی دو مدل قبلاً بررسی شده و دارای شرایط اولیه متفاوت و مشخصات مدل یکسان بدانیم. با توجه به نحوه تعریف مدل سوم، فرض همگرایی در صورت لم منجر به برقرار بودن رابطه زیر:

$$\forall m > n-1:$$

$$\begin{cases} u(t_m) \\ \dot{u}(t_m) \end{cases}^3 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_m^1 - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_m^2 \quad (15)$$

می شود. ساده سازی طرف راست رابطه (۱۵) با توجه به رابطه (۱۳) به رابطه زیر:

$$\forall m > n-1: \begin{cases} u(t_m) \\ \dot{u}(t_m) \end{cases}^3 = 0 \quad (16)$$

می انجامد. با توجه به مفهوم همگرایی، نتیجه بدست آمده به این معنی است که شرایط اولیه غیرصفر مطرح شده در رابطه (۱۴) هیچ پاسخی را ایجاد نمی کنند. این نتیجه با روابطی که برای مدل های خطی با شرایط اولیه غیرصفر و بدون برانگیزش خارجی در ادبیات فنی موجود است، در تناقض است [۲۹۰۱] و لذا نمی تواند صحیح باشد. بنابراین بر خلاف فرض انجام شده در طی بحث، و بکار رفته در رابطه (۱۴)، نتیجه بحث رابطه زیر:

$$\begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^1 = \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^2 \quad (17)$$

است. با مقایسه روابط (۱۱) و (۱۷) رابطه زیر:

روابط روش های گام به گام اصولاً باید به گونه ای تنظیم شوند که پاسخ بطور منحصر بفرد محاسبه شود، رابطه  $F$  در شکل (۲) از نظر ریاضی یک تابع را تعریف می کند [۲۸]. تابع  $F$  یک به یک نیز می باشد [۲۸]. برای اثبات این مطلب فرض کنید تابع  $F$  دو مقدار مختلف پاسخ در ایستگاه زمانی  $t_{n-1}$  و  $\begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^1$  را طی رابطه زیر:

$$\begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_n = F \left( \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^1 \right) = F \left( \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^2 \right) \quad (11)$$

به پاسخ مشترک  $\begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_n$  در انتهای گام زمانی مرتبط سازد. با توجه به رابطه (۱۰) تحلیل گام به گام را می توان از لحظه  $t_{n-1}$  مستقل از تاریخچه زمانی آن دانست. لذا بدون ضرورتی برای خطی بودن مشخصات مدل و صرفاً برای مقایسه، می توان رفتار مدل را بطور ثابت در امتداد محور زمان تعمیم داد و پاسخ حاصل را برای بازه زمانی بعد از لحظه  $t_{n-1}$  مطالعه نمود. در این حالت، با توجه به

تفاوت  $\begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^1$  و  $\begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_{n-1}^2$  عملاً دو مدل در بازه زمانی  $t_{n-1} \leq t < t_{\infty}$  در دست بررسی است. تفاوت دو مدل تنها در شرایط اولیه آنها است. روابط (۱۰) و (۱۱) موجب نیل به پاسخ های مشابه برای دو مدل طی رابطه زیر:

$$\forall \Delta t, m > n-1: \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_m^1 = \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_m^2 \quad (12)$$

می شوند. در نتیجه، با توجه به خطی بودن امتداد رفتار پس از لحظه  $t_n$  و در نظر گرفتن فرض همگرایی در صورت لم، پاسخ های محاسبه شده برای دو مدل بطور یکسان به سمت مقادیر واقعی مشترکی همگرا می شوند:

$$\forall \Delta t, m > n-1:$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_m^1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} u \\ \dot{u} \end{cases}_m^2 = \begin{cases} u(t_m) \\ \dot{u}(t_m) \end{cases}^{1,2} \quad (13)$$

**اثبات:** چون در حالت خاص ارتعاش آزاد، برانگیزش خارجی وجود ندارد، با توجه به لم (۳) و نتیجه (۲)، ماتریس  $[A]$  که مستقل از نوع بارگذاری است [۲۲] باید دارای معکوس باشد. بنابراین با پیش ضرب  $[A]^{-1}$  در طرفین رابطه (۱۰) می توان به رابطه زیر:

$$[A]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{u}{\Delta t} \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} \frac{u}{\Delta t} \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n-1} + [A]^{-1} \cdot [L] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{P_{n-1}}{m} \\ \frac{P_n}{m} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

دست یافت. در رابطه فوق، برای حفظ اختصار از درج پارامترهای مؤثر در ماتریس های  $[A]$  و  $[L]$  صرفنظر شده است. نهایتاً با اعمال دو تعریف زیر:

$$[A]^R = [A]^{-1} \quad (21)$$

$$[L]^R = -[A]^{-1} \cdot [L] \quad (22)$$

رابطه (۲۰) به رابطه (۱۹) تحویل شده، اثبات مورد نظر را تکمیل می نماید.

**نتیجه ۴:** اگر ماتریس های  $[A]$  و  $[L]$  بکار رفته در رابطه (۱۰) تعریف کننده یک روش انتگرال گیری گام به گام همگرا در حالت خطی باشند، ماتریس های  $[A]^R$  و  $[L]^R$  نیز تعریف کننده یک روش انتگرال گیری گام به گام همگرا در حالت خطی طی روابط (۲۱، ۲۲) و با همان نرخ همگرایی خواهند بود.

**اثبات:** با توجه به نتایج (۲) و (۳)، در مسائل خطی زوج های  $[A]^R$  و  $[L]^R$  و  $[A]$  و  $[L]$ ، پاسخ محاسبه شده مشترکی را در بازه زمانی مورد مطالعه تعریف می کنند. در نتیجه، بنا به تعریف همگرایی [۲۷، ۶] همانطور که ادعا شده است، هر دو زوج فوق الذکر الزاماً متناظر روش های انتگرال گیری با همگرایی مشابه در حالت خطی هستند، و لذا اثبات ادعای مطرح شده به اتمام می رسد.

$$F \left( \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n-1}^1 \right) = F \left( \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n-1}^2 \right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n-1}^1 = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n-1}^2 \quad (18)$$

عملاً ثابت شده است. رابطه اخیر با توجه به اصول اولیه حاکم بر توابع [۲۸]، بر معکوس دار بودن تابع  $F$  و لذا بر صحت ادعای این لم دلالت دارد.

**نتیجه ۲:** تغییر مکان و سرعت محاسبه شده در یک بازه زمانی با استفاده صرف از روش های گام به گام همگرا در حالت خطی را می توان از انتها به سمت آغاز بازه زمانی بازبایی نمود.

**اثبات:** چون در اثبات لم (۳) محدودیتی بر مقادیر برانگیزش در دو انتهای گام زمانی، مشخصات مدل و اندازه گام زمانی تحمیل نگردید، تابع معکوس دار  $F$  برای تمامی گام های زمانی بازه زمانی مورد مطالعه در این لم قابل تعریف است. از طرفی طبق فرضیات ذکر شده در صورت نتیجه (۲)، بین هر دو گام زمانی متوالی نیز هیچ عاملی محاسبات گام به گام را تحت تأثیر قرار نمی دهد. بنابراین صحت نتیجه (۲) محرز است.

**نتیجه ۳:** به ازای هر دو اپراتور  $[A]^{16}$  و  $[L]$  که متناظر یک روش گام به گام همگرا در حالت خطی باشند و پاسخ مدل مطرح شده طی رابطه (۹) را با استفاده از رابطه (۱۰) و به صورت گام به گام محاسبه نمایند، اپراتورهایی مانند  $[A]^R$  و  $[L]^R$  وجود دارند که طی رابطه زیر:

$$\begin{Bmatrix} \frac{u}{\Delta t} \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n-1} = [A(\omega, \Delta t, \xi)]^R \cdot \begin{Bmatrix} \frac{u}{\Delta t} \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_n + [L(\omega, \Delta t, \xi)]^R \cdot \begin{Bmatrix} \frac{P_{n-1}}{m} \\ \frac{P_n}{m} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

امکان محاسبه پاسخ ها در زمان های گذشته را بر اساس پاسخ زمان حاضر فراهم می آورند.

(۳ - الف) و (۳ - ب)). در شکل (۳) و کلیه اشکال بعدی لحظات تغییر رفتار با لوزی و لحظات دیگر با دایره مشخص شده اند.

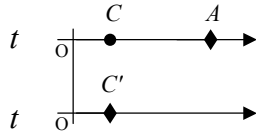
(الف)

اولین لحظه تغییر رفتار

محاسبه شده

اولین لحظه تغییر رفتار

واقعی



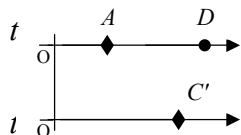
(ب)

اولین لحظه تغییر رفتار

محاسبه شده

اولین لحظه تغییر رفتار

واقعی



شکل ۳: دو حالت برای بازه زمانی مابین لحظه صفر و اولین لحظه تشخیص تغییر رفتار یا اولین لحظه واقعی تغییر رفتار هر یک که بزرگ تر باشد.

با این توضیح، در شکل (۳)  $A$  و  $C'$  به ترتیب مبین لحظات تغییر رفتار محاسبه شده (تشخیص داده شده) و لحظات تغییر رفتار واقعی هستند. ضمناً فرض شده است که صرفاً یک لحظه واقعی و یک لحظه تشخیص تغییر رفتار در بازه زمانی مورد بررسی موجود باشند. حالت های دیگر در ادامه بحث بررسی خواهند شد. به این ترتیب در شکل (۳) هر دو حالت تشخیص دیر هنگام و یا زود هنگام اولین لحظه تغییر رفتار در نظر گرفته شده اند. برای سهولت بررسی، این دو حالت بطور جداگانه و به ترتیب مورد بررسی قرار می گیرند.

در شکل (۳-الف) با مقایسه مدل اصلی با مدل جایگزین خطی که دارای مشخصاتی مشابه مشخصات اولیه (مشخصات قبل از تغییر رفتار) مدل اصلی است، پاسخ های محاسبه شده برای مدل ها اصلی و جایگزین، با استفاده از اندازه گام های زمانی مشابه، تا قبل از لحظه  $t_A$  مشابه است. در لحظه  $t_A$  نیز که بر یکی از ایستگاه های زمانی منطبق است [۳۰،۹] و طبق فرضیات ذکر شده در صورت قضیه خطاهای اضافی در تعیین آن

**قضیه ۱:** پاسخ های حاصل از تحلیل تقریبی و گام به گام مدل های دینامیکی با رفتار تکه تکه خطی، همگرا خواهند بود، اگر:

الف. اندازه گام های زمانی و فرمولاسیون<sup>۱۷</sup> روش گام به گام چنان انتخاب شوند که منجر به پاسخ های همگرا برای مدل های خطی گردد، و

ب. خطاهای باقیمانده در تشخیص و تعیین تقریبی لحظات تغییر رفتار صفر باشند.

ضمناً با برآورده شدن شروط فوق، نرخ همگرایی پاسخ به مانند مدل های خطی برابر عدد طبیعی  $q$  خواهد بود. (نرخ همگرایی در مسائل خطی  $q$  فرض شده است).

**اثبات:** مورد "ب" در صورت قضیه یعنی استفاده از خطای باقیمانده صفر در لحاظ کردن تغییر رفتار مسائل غیرخطی در موارد عملی براحتی قابل تصور نیست [۳۰،۹]. با وجود این می توان پس از تحلیل گام به گام هر مدل غیرخطی، با تعریف مدلی فرضی حاصل از اعمال تغییراتی تابع زمان بر مشخصات مدل (نظیر تنش های تسلیم)، به جای مدل واقعی، به بررسی مدلی فرضی با پاسخ مشابه ولی خطاهای باقیمانده صفر اقدام نمود. به این وسیله مشخص می شود که تحلیل های غیرخطی با خطاهای باقیمانده صفر گرچه بسیار نادرند، در حالت کلی محتمل و قابل تصورند.

قبل از آغاز بحث اصلی، اشاره به دو مطلب ضروری است. اول آنکه در بررسی پاسخ، مطالعه تغییر مکان و سرعت کفایت می کند [۲۲] و لذا منظور از پاسخ در این قضیه، تغییر مکان و سرعت در لحظات و درجات آزادی مختلف است. دوم آن که در اثبات این قضیه، بارها از کاهش اندازه گام زمانی صحبت خواهد شد. در این گونه موارد باید توجه نمود، که حتی اگر اشاره ای به اندازه گام زمانی خاصی بشود، منظور از کاهش اندازه گام زمانی، کاهش به یک نسبت اندازه کلیه گام های زمانی در بازه زمانی مورد مطالعه است. به عبارت دیگر در این بحث هیچگونه ضرورتی به ثابت انگاشتن اندازه گام های زمانی در طی یک تحلیل گام به گام وجود ندارد.

برای اثبات قضیه ابتدا بازه زمانی آغاز شده از لحظه صفر و منتهی به اندک زمانی پس از اولین لحظه تشخیص تغییر رفتار و یا اولین لحظه واقعی تغییر رفتار، هر یک که بزرگ تر باشد، مورد مطالعه قرار می گیرد (اشکال

دخیل نبوده اند تشابه پاسخ ها برقرار است. این تشابه مستقل از اندازه گام زمانی است. در نتیجه به مانند مدل خطی جایگزین، پاسخ مدل اصلی برای لحظات واقع در بازه زمانی  $0 \leq t \leq t_A$  با نرخ  $q$  همگراست. به منظور ارائه استدلالی هر چه کامل تر به خصوص در مورد همگرایی به سمت پاسخ واقعی مدل غیرخطی قابل توجه است که طبق لم (۲) لحظه  $t_A$  و لحظات ماقبل آن نیز به تدریج به سمت لحظه  $t_C = t_C'$  و لحظات ماقبل آن همگرا می شوند. در نتیجه در بازه  $0 \leq t \leq t_A$ ، با کم شدن اندازه گام زمانی مورد استفاده در تحلیل، پاسخ دقیق مدل خطی جایگزین و غیرخطی اصلی به تدریج بر هم منطبق می گردند. به عبارت دیگر، در بازه زمانی  $0 \leq t \leq t_A$  همگرایی پاسخ محاسبه شده برای مدل غیرخطی به سمت پاسخ واقعی مدل خطی جایگزین، به همگرایی این پاسخ به پاسخ واقعی مدل غیرخطی منجر می شود. همچنین استفاده مقایسه ای از مدل خطی در بحث فوق نشان دهنده نرخ  $q$  برای همگرایی پاسخ در بازه  $0 \leq t \leq t_A$  است. با به نتیجه رسیدن اثبات همگرایی پاسخ با نرخ  $q$  در لحظه  $t_A$ ، چون در لحظات پس از  $t_A$  تغییر رفتاری تشخیص داده نشده است و واقعاً نیز موجود نیست، و رفتار واقعی نیز به درستی تشخیص داده شده است (شکل (۳-الف))، با توجه به لم (۲) و فرضیات این قضیه، همگرایی پاسخ محاسبه شده با نرخ  $q$  محرز است. بنابراین در کلیه لحظات بازه زمانی مورد مطالعه ( $0 \leq t < t_\infty$ ) در شکل (۳-الف) نیز پاسخ محاسبه شده با نرخ  $q$  همگرا خواهد بود.

در شکل (۳-ب) در بازه زمانی  $0 \leq t < t_A$  رفتار مدل (مشخصات مدل) به درستی تشخیص داده شده است. تغییر رفتاری نیز موجود نیست. بنابراین با توجه به فرض همگرایی با نرخ  $q$  پاسخ در مسائل خطی (اشاره شده در صورت قضیه)، همگرایی پاسخ در بازه زمانی  $0 \leq t < t_A$  محرز است. در لحظه  $t_A$  نیز با توجه به توضیحات فوق و صفر بودن خطاهای باقیمانده در روند تکراری تعیین لحظه  $t_A$  (طبق فرضیات قضیه) همگرایی با نرخ  $q$  برقرار است. در بازه زمانی  $t_A < t < t_\infty$  محاسبات گام به گام صرفاً با استفاده از روابط روش گام به گام انجام می شود و اگر لحظه دلخواهی چون  $t_D$  را با شرط

$$\bar{t} = t_D - t$$

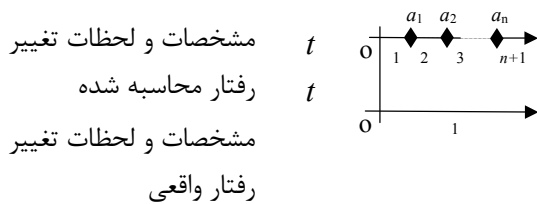
(۲۳)

مقدار پاسخ در ایستگاه های زمانی واقع در بازه زمانی  $t_A \leq t < t_D$  (یا به بیانی  $0 < \bar{t} \leq t_D - t_A$ ) مجدداً محاسبه می شود. چون فرض شده است که  $t_D > t_C'$  است، با توجه به شکل (۳-ب) مشخصات مدل در لحظه  $t_D$  به درستی تشخیص داده شده است. فرض کنید بر خلاف خواسته قضیه، در لحظه  $t_D$  همگرایی برقرار نباشد. با جایگزین نمودن مدل با مدلی دیگر بطوریکه در بازه زمانی  $0 < \bar{t} \leq t_D - t_A$  مشخصات دو مدل یکسان و در بازه زمانی  $t_D - t_A < \bar{t} < t_D$ ، مشخصات مدل جایگزین مشابه مشخصات مدل اصلی در بازه زمانی  $0 < \bar{t} \leq t_D - t_A$  باشد، مدل جایگزین عملاً مدلی خطی است. چون مستقل از اندازه گام زمانی پاسخ های محاسبه شده برای دو مدل در بازه زمانی  $0 < \bar{t} \leq t_D - t_A$  مشابه اند، نتایج حاصل از مطالعه مدل خطی جایگزین در این بازه زمانی را می توان به مدل اصلی تعمیم داد. در مدل خطی جایگزین، روش گام به گام بکار رفته در محاسبات از ایستگاه زمانی  $t_D$  به سمت  $t_A$  طبق فرضیات ذکر شده در صورت این قضیه و نتیجه (۴) با نرخ  $q$  همگراست. لذا طبق نتیجه (۱) اگر شرایط اولیه که همان پاسخ در لحظه  $t_D$  یا  $\bar{t} = 0$  است، همگرا نباشد (یا با نرخی کمتر از  $q$  همگرا باشد)، پاسخ بدست آمده در کلیه لحظات بازه زمانی  $\bar{t} > 0$  باید غیرهمگرا (و یا همگرا با نرخی کمتر از  $q$ ) باشد. ولی همگرایی با نرخ  $q$  در لحظه  $t_A$  (یا به بیانی  $\bar{t} = t - t_A$ ) قبلاً ثابت شده است. بنابراین همگرایی با نرخ  $q$  شرایط اولیه در  $\bar{t} = 0$  که همان پاسخ در لحظه  $t_D$  است، برقرار است. در این مرحله با انتخاب  $t_{D'}$  بطور دلخواه و در فاصله  $t_A$  و  $t_D$  با انتخاب  $t_{D'}$  بطور دلخواه و در فاصله  $t_A$  و  $t_D$  در

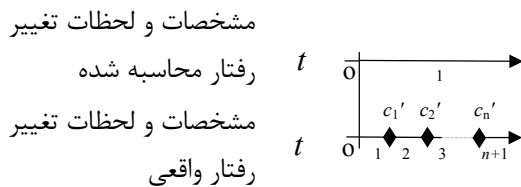


تشخیص داده شده (حاصل از محاسبه)، تاریخچه زمانی رفتار واقعی و تشخیص داده شده مدل به صورت ترکیبی چندگانه و دلخواه از اشکال (۳) و (۴) متجلی خواهد شد. با وجود این، با توجه به لم (۲) و بررسی انجام شده طی اشکال (۳ - الف) و (۳ - ب)، بررسی حالت های نمایش داده شده در شکل (۴) کفایت می کند. همچنین با نگاهی دیگر بر لم (۲) مطالعه حالت ساده تر  $n = 2$  در

(الف)



(ب)



شکل ۴: دو حالت بر هم زنده تناظر یک به یک بین لحظات تغییر رفتار واقعی و لحظات تغییر رفتار تشخیص داده شده .

شکل (۴) از کلیت بحث نمی کاهد، و به سادگی می توان استدلال انجام شده برای حالت  $n = 2$  را برای  $n$  های بیشتر تعمیم داد. بنابراین با توجه به شکل (۴) به بررسی حالات نشان داده شده در شکل (۵) بسنده می شود. در شکل (۵ - الف)، در بازه زمانی  $t_0 \leq t \leq t_{a_1}$  رفتار خطی است و مشخصات مدل به درستی تشخیص داده شده است. در نتیجه در این بازه زمانی طبق لم (۲) و فرضیات مطرح شده در صورت قضیه، همگرایی با نرخ  $q$  برقرار است. اگر از تغییر مشخصات مدل در طی تحلیل گام به گام پس از لحظه  $t_{a_1}$  صرفنظر شود، یک مدل جایگزین خطی در بازه زمانی  $t_0 < t < t_{a_2}$  تعریف می شود. پاسخ این مدل جایگزین با توجه به فرضیات ذکر شده در صورت قضیه با نرخ  $q$  بطوری همگراست که پاسخ دقیق آن در بازه زمانی  $t_0 < t \leq t_{a_1}$  با پاسخ دقیق مدل

بازه زمانی  $0 < \bar{t} < t_D - t_A$ ، با توجه به خطی بودن رفتار در این بازه زمانی و فرضیات قضیه با نرخ  $q$  همگرا خواهند بود. به این ترتیب عملاً اثبات همگرایی با نرخ  $q$  برای پاسخ در کلیه لحظات واقع در بازه زمانی  $0 \leq t \leq t_D$  به اتمام رسیده است. اما لحظه  $t_D$  صرفاً با رعایت شرط  $t_D > t_C$  انتخاب شده است، لذا با انتخاب مقادیر به میزان کافی بزرگ برای  $t_D$  همگرایی پاسخ در کلیه لحظات در بازه مورد بررسی در شکل (۳-ب) عملاً به اثبات رسیده است.

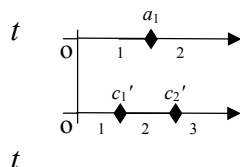
در قسمتی از آغاز بازه های زمانی در هر دو مورد مطرح شده طی اشکال (۳ - الف) و (۳ - ب)، بازه های زمانی با رفتار خطی که به درستی نیز تشخیص داده شده اند، موجودند. لذا طبق لم (۲) اگر در لحظه های آغازین این بازه های زمانی، مؤلفه های پاسخ به جای ثابت بودن، با نرخ  $q$  همگرا شوند، تغییری در نتیجه حاصل و همگرایی با نرخ  $q$  پاسخ ایجاد نمی شود. به بیان بهتر در حالت جدیدی نیز که تفاوت آن با موارد مطالعه شده طی اشکال (۳ - الف) و (۳ - ب) ثابت نبودن و همگرایی با نرخ  $q$  شرایط اولیه است، ادعای قضیه صحیح است. بنابراین اگر در طی تحلیل گام به گام به ازای هر لحظه تغییر رفتار در تاریخچه زمانی رفتار واقعی، یک لحظه تغییر رفتار در تاریخچه زمانی رفتار محاسبه شده تشخیص داده شود، صحت ادعای عنوان شده در صورت قضیه محرز است. به بیان بهتر اگر تعداد متناهی حالت مشابه اشکال (۳ - الف) و (۳ - ب) زنجیره وار به دنبال هم قرار بگیرند و تناظری یک به یک را بین لحظات تغییر رفتار واقعی و محاسبه شده بوجود آورند، ادعای قضیه صحیح است.

اما ممکن است تناظری یک به یک بین لحظات تغییر رفتار واقعی و لحظات تغییر رفتار تشخیص داده شده در طی تحلیل گام به گام موجود نباشد. در چنین حالتی عملاً یکی از دو وضعیت نشان داده شده در شکل (۴)، باید در آغاز یا انتها و یا بین دو یا چند عضو از زنجیره تشکیل شده از اشکال (۳ - الف) و (۳ - ب) موجود باشد. در شکل (۴) شرایط اولیه غیرثابت و دارای نرخ همگرایی  $q$  است. به این ترتیب در حالت عدم وجود تناظر یک به یک بین لحظات تغییر رفتار واقعی و لحظات تغییر رفتار

شکل خارج شده، همگرایی با نرخ  $q$  پاسخ در کلیه لحظات در شکل (۵ - الف) را ثابت می کنند.

در شکل (۵ - ب)، ابتدا به بررسی بازه زمانی  $t_o < t < t_{c_2}$  می پردازیم. با توجه به تشخیص صحیح مشخصات و خطی بودن رفتار مدل، همگرایی پاسخ در بازه زمانی  $t_o \leq t \leq t_{c_1}$  برقرار است. اینک اگر به منظور مقایسه، مشخصات واقعی در بازه زمانی  $t_{c_1} \leq t \leq t_{c_2}$  به مشخصات مدل در بازه زمانی  $t_o \leq t \leq t_{c_1}$  تبدیل شوند، طبق لم (۱) زمان حدوث پاسخ واقعی در  $t_{c_1}$  به سمت  $t_{c_1}$  همگراست. با توجه به اینکه تغییر اعمال گشته در مشخصات مدل، در پاسخ واقعی لحظه  $t_{c_1}$  و در پاسخ های تقریبی محاسبه شده برای این لحظه بی تأثیر است، صحت همگرایی فوق الذکر، برای مسأله اصلی به قوت خود باقی است. در نتیجه با تکرار تحلیل با اندازه گام زمانی کوچک تر، ناچاراً به ازای یک اندازه خاص گام زمانی لحظه تشخیص رفتاری مانند  $t_{a_1}$  در شکل (۵ - ب) ظاهر شده، با کوچک کردن اندازه گام زمانی به سمت  $t_{c_1}$  همگرا می شود. به عبارت دیگر در بررسی همگرایی می توان، با استناد به لم (۱) شکل (۶) را جایگزین شکل (۵ - ب) نمود. با مقایسه

مشخصات و لحظات تغییر رفتار محاسبه شده  
مشخصات و لحظات تغییر رفتار واقعی

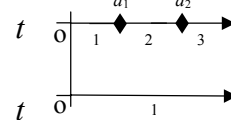


شکل ۶: شکل (۵ - ب) به ازای گام های زمانی به میزان کافی کوچک.

اشکال (۶) و (۳) مشخص می شود که در شکل (۶) در اندک زمانی پس از  $t_{a_1}$  یا  $t_{c_1}$  (هر یک که بزرگ تر باشد) پاسخ با نرخ  $q$  همگراست. با استفاده از لم (۲) این همگرایی دلیلی است برای همگرایی پاسخ در بازه زمانی منتهی به  $t_{c_2}$ . در این مرحله به منظور اثبات همگرایی در لحظه دلخواه  $t_e$  ( $t_e > t_{c_2}$ ) می توان استدلال قبل را در مورد بازه زمانی  $t_{c_1} < t \leq t_e$  تکرار نمود. نتیجه،

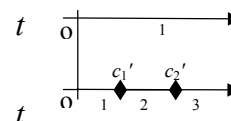
(الف)

مشخصات و لحظات تغییر رفتار محاسبه شده  
مشخصات و لحظات تغییر رفتار واقعی



(ب)

مشخصات و لحظات تغییر رفتار محاسبه شده  
مشخصات و لحظات تغییر رفتار واقعی



شکل ۵: شکل (۴) در حالت  $n = 2$ .

اصلی مشترک است. اینک اگر در مدل جایگزین پاسخ دقیق لحظه  $t_{a_1}$  مورد توجه قرار گیرد، طبق لم (۱) زمان لازم برای حدوث این مقدار پاسخ نیز به سمت زمان دقیق حدوث آن همگراست. این نتیجه به بازه زمانی  $t_o < t < t_{a_1}$  مربوط است، لذا برای مدل اصلی نیز صحت دارد. این امر به این معنی است که با کاهش اندازه گام زمانی بکار رفته در تحلیل گام به گام مدل اصلی، می توان زمان محاسبه شده برای حدوث مقدار پاسخ دقیق در  $t_{a_1}$  را به مقدار دلخواه به  $t_{a_1}$  نزدیک نمود. این استدلال و نتیجه حاصل برای کلیه لحظات بازه زمانی  $t_o < t \leq t_{a_1}$  برقرار است. از طرفی با توجه به شکل (۵ - الف) پاسخ واقعی در این بازه زمانی معیار تغییر رفتار را ارضا نمی کند. بنابراین با کوچک کردن اندازه گام زمانی، توجه به همگرایی پاسخ در بازه زمانی  $t_o < t \leq t_{a_1}$  و همچنین لم (۱)، فاصله گرفتن هر گونه لحظه تشخیص تغییر رفتار از لحظات واقع در این بازه زمانی مشخص می شود. لذا در صورت تکرار تحلیل با گام های زمانی کوچک تر، لحظه تشخیص تغییر رفتار اول ( $t_{a_1}$ ) به سمت راست منتقل می شود. با تکرار استدلال برای اولین لحظه ( $t_{a_1}$ ) تشخیص تغییر رفتار جدید، این لحظه و به تبع آن لحظه تشخیص تغییر رفتار دوم ( $t_{a_2}$ ) به سمت راست منتقل می شوند و نهایتاً از

باشد [۹، ۱۲، ۱۵] و یا نتوان با کوچک کردن اندازه گام زمانی دقت پاسخ را افزایش داد [۱۳، ۲۱، ۲۰، ۱۱].

برای توضیح این پدیده، مدل غیرخطی دلخواهی را در نظر می گیریم. با توجه به مقدمه بیان شده در اثبات قضیه (۱) و این واقعیت که با توجه به روش های موجود تشخیص تغییر رفتار، اعمال خطای باقیمانده صفر هنوز غیرعملی است [۹، ۳۰]، مدل مورد بررسی را با مدلی با پاسخ مشابه ولی با خطای باقیمانده صفر جایگزین می کنیم. برای تحقق این جایگزینی می توان پس از تحلیل گام به گام مدل، برخی از مشخصات مدل را متناسب با خطاهای باقیمانده حاصل از روند تکراری تشخیص تغییر رفتار، برخی از مشخصات مدل، و بصورت تابع زمان تغییر داد. این تغییر می تواند و باید به گونه ای انجام شود که اگر مدل جایگزین با همان مشخصات محاسباتی (روش گام به گام، اندازه گام زمانی و روش تشخیص تغییر رفتار) مورد انتگرال گیری گام به گام قرار گیرد، خطاهای باقیمانده حاصل در کلیه لحظات تشخیص تغییر رفتار صفر و پاسخ بدست آمده مشابه پاسخ مدل اصلی باشد. مستقل از نحوه محاسبه چنین تغییراتی، این تغییرات طبق توضیح فوق تابع خطاهای باقیمانده بدست آمده در طی تحلیل گام به گام مدل اصلی خواهند بود.

با این مقدمه و با توجه به مفهوم همگرایی، پاسخ حاصل از چندین تحلیل گام به گام با اندازه گام های زمانی متفاوت و در حد صفر (در نظر گرفتن گام های زمانی کوچک در بررسی همگرایی طبق تعریف لازم است [۲۷]) را برای مدل مورد بررسی در نظر می گیریم. پس از هر تحلیل نیز، مدل مورد بررسی را با توجه به توضیح پاراگراف قبل، با مدلی با خطاهای باقیمانده صفر جایگزین می نماییم. آنچه در اختیار خواهد بود چندین پاسخ حاصل از تحلیل با گام های مختلف و خطاهای باقیمانده صفر است. طبق نتیجه (۵) پاسخ های حاصل که طبق تعریف مدل جایگزین پاسخ های مدل اصلی نیز می باشند همگرا به نظر می رسند. ولی قابل توجه است که مشخصات هر مدل جایگزین بر اساس خطاهای باقیمانده در مدل اصلی تحلیل شده با گام های زمانی مشابه تعریف می شوند. از طرفی خطاهای باقیمانده ماحصل ارضای رابطه ای به شکل نامساوی هستند. در

ظهور لحظه تشخیص تغییر رفتار جدید  $t_{d_2}$  متناظر با  $t_{c_2}$  به ازای گام های زمانی به اندازه کافی کوچک و نهایتاً همگرایی با نرخ  $q$  برای پاسخ در لحظه  $t_e$  است. به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می رسد.

**نتیجه ۵:** قضیه (۱) در مورد مدل های با رفتار غیرخطی غیر تکه تکه خطی صادق است.

**اثبات:** پاسخ های مدل های با رفتار غیرخطی غیر تکه تکه خطی را می توان با هر دقت دلخواه معادل پاسخ مدل های غیرخطی با رفتار تکه تکه خطی دانست. (از این معادل سازی عملاً در تحلیل های مدل های غیرخطی نیز استفاده می شود.) با این توضیح پاسخ های دقیق مدل های غیرخطی غیر تکه تکه خطی حد پاسخ مدل های غیرخطی تکه تکه خطی در حالتی است که فاصله لحظات تغییر رفتار به سمت صفر میل کند. از طرفی در صورت قضیه (۱) محدودیتی برای فاصله لحظات تغییر رفتار در نظر گرفته نشده است. بنابراین نتیجه بدست آمده در قضیه (۱) را می توان برای مدل های غیر خطی غیر تکه تکه خطی نیز صحیح دانست، و به این ترتیب اثبات ادعای انجام شده را به پایان رساند.

**نتیجه ۶:** علت عدم همگرایی پاسخ های حاصل از تحلیل گام به گام مدل های دینامیکی غیرخطی بصورت زیر توضیح داده می شود:

معضل موجود عبارت است از اینکه پس از انتخاب،

۱. یکی از روش های انتگرال گیری گام به گام به عنوان روش تحلیل،

۲. محل اولیه ایستگاه های زمانی (اندازه گام های زمانی مورد استفاده در یک تحلیل)

۳. روشی تکراری برای مشخص کردن لحظات تغییر رفتار،

۴. رواداری ها یا به بیانی حداکثر مقادیر مجاز و قابل قبول خطاهای باقیمانده در روند تعیین لحظات تغییر رفتار (احیاناً متغیر در طول زمان)

و انجام تحلیل گام به گام مدل غیرخطی، حتی اگر واجبات همگرایی در حالت خطی ارضا شده باشند، لزوماً نمی توان همگرایی پاسخ های غیر خطی را مشاهده کرد و همانطور که در ادبیات فنی آمده است، پاسخ بدست آمده ممکن است در حد ناپایداری از پاسخ صحیح دور

تعریف می شوند. با توجه به قضیه (۱)  $u_I(t)$  و با توجه به فرضیات نتیجه (۷)  $N_I(X)$  همگرا هستند. بنابراین، طبق روش کلی مطالعه همگرایی [۲۷] حاصل ضرب و اجتماع این توابع نیز همگرا بوده، اثبات لم را به پایان می رساند.

### نتیجه گیری

در این مقاله علت عدم همگرایی پاسخ های حاصل از انتگرال گیری مستقیم مدل های دینامیکی غیرخطی به دقت بررسی گردید و مشخص شد که عامل اصلی معضل عدم همگرایی در خطای باقیمانده غیرصفر در مدل کردن رفتار غیرخطی نهفته است، و ماهیت آن نوعی ناسازگاری است.

### تشکر و قدر دانی

این پژوهش مستخرج از طرح "ریشه یابی کاستی های موجود در تحلیل های عددی مدل های دینامیکی غیرخطی" به شماره ۶۱۴/۲/۶۹۶ می باشد که با حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه تهران انجام شده است. بدینوسیله از کلیه مسئولین امر صمیمانه تشکر و قدردانی می شود. ضمناً با غنیمت شمردن فرصت، نهایت امتنان مؤلفین از جناب آقای دکتر هاشم مهرآذین برای مرور متن نهایی اعلام می گردد.

نتیجه در هر تحلیل تابع اندازه گام زمانی بکار رفته در آن تحلیل نیز هستند. لذا مشخصات مدل های جایگزین تحلیل شده با گام های زمانی مختلف با هم متفاوتند. بنابراین پاسخ های مقایسه شده اصولاً نتیجه تحلیل مدل جایگزین شده واحدی نیستند. به عبارت دیگر همگرایی پاسخ ها به سمت پاسخ واقعی واحدی نبوده، از نظر عددی می تواند باعث ایجاد عدم همگرایی گردد.

**نتیجه ۷:** در صورت استفاده از یک روش اجزاء محدود همگرا برای گسسته سازی محیط پیوسته در فضا، برقرار بودن شرایط مطرح شده در قضیه (۱) موجبات همگرایی پاسخ حاصل از تحلیل گام به گام و اجزاء محدود مدل های دینامیکی پیوسته در فضا و زمان را فراهم می آورد.

**اثبات:** اصول اولیه روش اجزاء محدود برقراری رابطه زیر:

$$u(X, t) = \sum_{I=1}^{n_N} N_I(X) \cdot u_I(t) \quad (24)$$

را ایجاب می کند [۹]. در رابطه فوق  $u(X, t)$  تابع تغییرمکان پیوسته،  $n_N$  تعداد گره ها،  $u_I$ ،  $I = 1, \dots, n_N$  تغییرمکان های گرهی، و  $N_I(X)$  توابع انترپولاسیون<sup>۱۸</sup> پیوسته ای هستند که به توجه به مفهوم دلتای کرونیگر<sup>۱۹</sup> به صورت زیر:

$$N_I(X_J) = \delta_{IJ} \quad (25)$$

### مراجع

- 1 - Chopra, A. K. (1995). *Dynamics of structures: theory and application to earthquake engineering*. Prentice-Hall Inc., USA.
- 2 - Mohraz, B., Elghadamsi, F. E. and Chang C. J. (1991). "An incremental mode superposition for nonlinear dynamic analysis." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.20, No.5, PP. 471-481.
- 3 - Newmark, N. M. (1959). "A method for computation for structural dynamics." *ASCE, J. of Engineering Mechanics*, Vol.85, No.3, PP. 67-94.
- 4 - Henrici, P. (1962). *Discrete variable methods in ordinary differential equations*. Prentice-Hall Inc., USA.
- 5 - Bismarck-Nasr, M. N. and De Oliveira A. M. (1991). "On enhancement of accuracy in direct time integration dynamic response problems." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.20, No.7, PP. 699-703.
- 6 - Wood, W. L. (1990). *Practical time stepping schemes*. Oxford, USA.
- 7 - Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall Inc., USA.
- 8 - Humar, J. L. (1990). *Dynamics of structures*. Prentice-Hall Inc., USA.
- 9 - Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B. (2001). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons Inc., USA.

- 10 - Belytschko, T. and Schoeberle, D. F. (1975). "On the unconditional stability of an implicit algorithm for structural dynamics." *J. Appl. Mech.*, Vol.42(E), No.4, PP. 865-869.
- 11 - Low, K. H. (1991). "Convergence of the numerical methods for problems of structural dynamics." *J. Sound & Vibration*, Vol.150, No.2, PP. 342-349.
- 12 - Xie, Y. M. and Steven, G. P. (1994). "Instability, chaos, and growth and decay of energy of time stepping-schemes for nonlinear dynamic equations." *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol.105, No.5, PP. 393-401.
- 13 - Xie, Y. M. (1996). "An assessment of time integration schemes for nonlinear dynamic equations." *J. Sound & Vibration*, Vol.192, No.1, PP. 321-331.
- 14 - Rashidi, S. and Saadeghvaziri, M. A. (1997). "Seismic modeling of multispan simply-supported bridges using adina." *International Journal Computers and Structures*, Vol.64, No.5/6, PP. 1025-1039.
- 15 - Cardona, A. and Geradin, M. (1989). "Time integration of the equations of motion in mechanism analysis." *International Journal Computers and Structures*, Vol.33, No.3, PP. 801-820.
- 16 - Laursen, T. A. and Chawla, V. (1997). "Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, No.5, PP. 863-886.
- 17 - Kuhl, D. and Criesfield, M. A. (1999). "Energy-conserving and decaying algorithms in nonlinear structural dynamics." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, No.5, PP. 569-599.
- 18 - Kardestuncer, H. (1987). *Finite element handbook*. McGraw-Hill, USA.
- 19 - Farjoodi, J. and Soroushian, A. (2000). "More accuracy in step-by-step analysis of nonlinear dynamic systems." *Proc., 5<sup>th</sup> Int. Conf. On Civil Eng.*, E. Ayati, ed., Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, PP. 222-229. (In Persian).
- 20 - Farjoodi, J. and Soroushian, A. (2001). "Efficient automatic selection of tolerances in nonlinear dynamic analysis." *SEMC2001 Int. Conf.*, A. Zingoni, ed., Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, PP. 853-859.
- 21 - Farjoodi, J. and Soroushian, A. (2001). "Robust convergence for the dynamic analysis of mdof elastoplastic systems." *SEMC2001 Int. Conf.*, A. Zingoni, ed., Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, PP. 867-874.
- 22 - Belytschko, T. and Hughes, T. J. R. (1983). *Computational methods for transient analysis*. North-Holland, Netherlands.
- 23 - Zienkiewicz, O. C. and Xie, Y. M. (1991). "A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.20, No.9, PP. 871-887.
- 24 - Noble, B. and Daniel, J. W. (1977). *Applied linear algebra*. Prentice-Hall Inc., USA.
- 25 - Richtmyer, R. D. and Morton, K. W. (1967). *Difference methods for initial value problems*. John Wiley & Sons Inc., USA.
- 26 - Bathe, K. J. (1966). *Finite element procedures*. Prentice-Hall Inc., USA.
- 27 - Lambert, J. D. (1983). *Computational methods in ordinary differential equations*. John Wiley & Sons Inc., UK.
- 28 - Apostol, T. M. (1966). *Calculus*. Blaisdell Publishing Company, USA.
- 29 - Clough, R. W. and Penzien, J. (1993). *Dynamic of structures*. McGraw-Hill Company Inc., Singapore.
- 30 - Cheney, W. and Kincaid, D. (1999). *Numerical mathematics and computing*. Brooks/Cole Publishing Company, USA.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |                      |                    |                       |
|----------------------|--------------------|-----------------------|
| 1 – Dynamic          | 2 - Modal Analysis | 3 - Frequency Domain  |
| 4 – Models           | 5 – Integration    | 6 - Professor Newmark |
| 7 – Richardson       | 8 – Parameter      | 9 - System            |
| 10 – Lemma           | 11 – Mode          | 12 - Matrix           |
| 13 – Norm            | 14 – Lax           | 15 - Schematic        |
| 16 – Operator        | 17 – Formulaton    | 18 - Interpolation    |
| 19 - Kronecker Delta |                    |                       |