اعمال روش نیمه‌لاگرانژی- نیمه‌ضمنی برای حل معادلات آب کم عمق

وحید اصفهانیان
دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
خسرو اشرفی
دانشجوی دکتری پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو

(تاریخ دریافت ۸۱/۸/۲۹ ، تاریخ تصویب ۸۲/۹/۲۲)

چکیده

در این مقاله روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی برای حل معادلات آب کم عمق در مختصات کارتزین به‌کار برده شده‌است. برای حل معادلات آب کم عمق از شبکه C-آراکاوا استفاده شده‌است. روش نیمه‌لاگرانژی که به‌صورت نیمه‌ضمنی به معادلات آب کم عمق اعمال می‌شود به‌صورت نامشروط پایدار است، بنابراین یکی از مشکلات روش‌های اویلری که کوچک بودن گام زمانی می باشد، با به‌کار بردن این روش مرتفع می‌شود. دقت روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی با دقت میان‌یابی‌های انجام‌شده در این روش تعیین می‌شود، در اینجا از میانیابی درجه سوم که یکی از روش‌های دقیق میان‌یابی است، استفاده شده‌است. صحت این روش به‌وسیلهٔ حل کانال آب یک‌بعدی در مقایسه با حل تحلیلی مشخصه‌ها مورد تأیید قرار گرفته‌است. همچنین این روش در حالت دوبعدی به یک جریان کانال هوا که دارای شرایط مرزی دوره‌ای در مرزهای شرقی و غربی و شرایط مرزی سخت در مرزهای شمالی و جنوبی است، اعمال شده‌است. این روش در حالت یک‌بعدی و دوبعدی به لحاظ پایستگی کمیت‌هایی مانند انرژی کل، آنستروفی و عمق متوسط شاره بسیار خوب عمل می‌کند.

واژه‌های کلیدی: روش نیمه‌لاگرانژی- نیمه‌ضمنی، معادلات آب کم‌عمق، گام زمانی، میان‌یابی

مقدمه

روش‌های گسسته‌سازی که برپایهٔ رفتار نیمه‌لاگرانژی[۱] معادله فرارفت[۲] بنانهاده شدند برای انتگرال‌گیری زمانی کارا در پیش‌بینی‌های عددی وضع هوا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این روش گام‌های زمانی بزرگ‌تر از روش‌هایی است که اساس و پایهٔ آنها روش اویلر می‌باشد، در صورتی‌که از لحاظ دقت چیزی از دست نمی‌رود. مطالعاتی که برای کاربرد این روش در حل معادلات آب کم‌عمق انجام شده‌است به دهه ۸۰ میلادی برمی‌گردد که می‌توان به کارهای ربرت (۱۹۸۱،۱۹۸۲)، استینفرز و تمپرتن (۱۹۸۶)، پرسر و لسلی (۱۹۸۸)، مکدونالد و بتیز (۱۹۸۹) و کت و استینفرز (۱۹۹۰) اشاره نمود. همچنین این روش در مدل‌های کژفشار شبکه‌ای نیز مورد استفاده قرار گرفت. از جمله این کارها می‌توان به روش سه‌مرحله‌ای نیمه‌لاگرانژی که برای مختصهٔ سیگما توسط ربرت و همکارانش (۱۹۸۵) و تانگی و همکارانش (۱۹۸۹) و همچنین روش سه‌مرحله‌ای نیمه‌لاگرانژی که برای مختصات غیر هیدرواستاتیک به‌وسیله تانگـــــی و همکارانش (۱۹۹۰) مورد استفاده قرار گرفت، اشاره نمود [۱].

معادلات حاکم بر جریان بعد از اعمال روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی به یک معادلهٔ هلمهولتز برای ارتفاع ژئوپتانسیل و معادلات تکانه تبدیل می‌شوند. در کارهای انجام گرفته (که در بالا به‌طور مختصر به آنها اشاره شد)، در اعمال شرایط مرزی به معادله هلمهولتز حتماً باید مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیل در مرزها داده شده باشد. معمولاً در شبیه‌سازی‌های عددی وضع هوا در حرکت‌های میان مقیاس[۳] مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیل به‌راحتی در دسترس نیستند ولی دسترسی به مقادیر میدان باد آسانتر است. با استفاده از این مقادیر و همچنین بسط مناسب معادلات حاکم می‌توان به معادلاتی در مرزها دست پیدا کرد که تابعی از مولفه‌های سرعت باد باشند. چگونگی انجام این عمل به‌صورت مبسوط در قسمت‌های بعدی مقاله آمده‌است.

دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری

معادلات اساسی دینامیک شاره‌ها را می‌توان از

دو دیدگاه لاگرانژی و اویلری مورد بررسی قرار داد. معادلات در شکل لاگرانژی، تغییرات جریان را با دنبال کردن حرکت یک ذرهٔ منفرد از شاره، بیان می‌کنند. ولی معادلات در شکل اویلری بیان‌کنندهٔ تغییرات جریان از مشاهدات یک نقطهٔ ثابت در فضا می‌باشند (این نقطه می‌تواند یک نقطهٔ ثابت بر روی یک مختصات چرخان همانند زمین که حرکت آن تأثیری از حرکت شاره نمی‌گیرد، باشد). اگر ψ یک متغیر اسکالر وابسته و S چشمه یا چاهه این متغیر باشد، معادلات تغییرات زمانی ψ در دیدگاه لاگرانژی یک‌بعدی به شکل زیر نوشته می‌شود[۲].

$$\frac{d\psi}{dt}=S \tag{۱}$$

همین معادله در دیدگاه اویلری به‌شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\frac{\partial\psi}{\partial x}=S \tag{۲}$$

برای معادل سازی این دو دیدگاه از منظر ریاضی مشتق کلی به شکل زیر بیان می‌گردد:

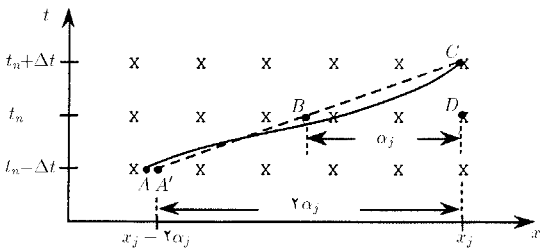
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}$$

در معادله بالا برای سرعت داریم:

$$\frac{dx}{dt}=u \tag{۳}$$

روش نیمه‌لاگرانژی سه‌ترازهٔ زمانی

اولین روش حلی که در دیدگاه لاگرانژی به ذهن می‌رسد این است که در ابتدا چون شرایط اولیهٔ جریان معلوم است تعدادی از نقاط شاره به‌صورت منظم درنظر گرفته می‌شوند و از دو معادلهٔ (۱) و (۳) در زمان انتگرال‌گیری می‌کنیم. با توجه به‌اینکه مسیر ذرات شاره برای هر یک از آنها از معادله (۳) به‌دست می‌آید و این معادله برای نقاط مختلف با سرعت‌های متفاوت مسیرهای غیرموازی برای نقاط مختلف شاره ایجاد می‌کند، بنابراین نقاط جدید به‌دست آمده کاملاً غیریکنواخت هستند و هیچ ترتیب خاصی ندارند. دراکثر موارد خطوط مشخصه با یکدیگر موازی نیستند و نهایتاً به نقاط نامنظمی می‌رسند. روش نیمه‌لاگرانژی در واقع ایده‌ای است که این مشکل را برطرف می‌کند. در روش نیمه‌لاگرانژی یک‌سری نقاط منظم به‌عنوان نقاط شبکه انتخاب می‌شوند و در هر گام زمانی خطوط مشخصه‌ای که از این نقاط می‌گذرند مورد بررسی قرار می‌گرند، برخلاف حالت قبل که یک‌سری خطوط مشخصه معین از ابتدا تا انتهای زمان محاسبه مورد بررسی قرار می‌گرفتند، در روش نیمه‌لاگرانژی خطوط مشخصه عبوری از این نقاط با هر گام زمانی عوض می‌شوند. درواقع روش حل به‌این‌گونه است که خطوط مشخصه‌ای که اکنون در نقاط شبکه هستند دارای مشخصات نقاطی هستند که در گام زمانی قبلی در نقاط دیگری بوده‌اند و این نقاط لزوماً بر نقاط شبکه انطباق ندارند. آنچه که در بالا بیان گردید به‌طریق بسیار گویاتری در شکل (۱) آمده‌است.



شکل ۱: شکل شماتیکی از روش نیمه‌لاگرانژی سه ترازه زمانی. خط مشخصه واقعی (منحنی پر) و خط مشخصه تخمینی (خط چین). α_j فاصله‌ای است که ذره شاره در مدت Δt طی می‌کند (برگرفته از مرجع [۳])

در شکل (۱) سه گام زمانی $t_n-\Delta t$، t_n و $t_n+\Delta t$ مشخص شده‌اند که هدف تعیین کمیت ψ در زمان $t_n+\Delta t$ از داده‌های زمان قبل با یک تابع داده شده $u(x,t)$، می‌باشد. خط مشخصه‌ای که در زمان $t_n+\Delta t$ از نقطه C که یک نقطه شبکه است، می‌گذرد؛ در زمان $t_n-\Delta t$ از نقطهٔ A گذشته‌است که لزوماً بر روی نقاط شبکه نیست. پس کمیت ψ در زمان $t_n+\Delta t$ همان مقداری را خواهد داشت که این نقطه در زمان $t_n-\Delta t$ داشته‌است. ولی ازآنجاکه تابع u با مکان و زمان تغییر می‌کند پس خط مشخصه یک منحنی می‌باشد. برای حل مسأله، این منحنی با یک خط مستقیم با استفاده از مقدار u در زمان t_n بر روی خط مشخصه تقریب زده

می‌شود. نقطهٔ B در شکل (۱) این نقطه را نشان می‌دهد. نقطهٔ A' نقطهٔ تقریبی A می‌باشد که با تقریب ذکرشده به‌دست آمده‌است.

روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی سه‌ترازهٔ زمانی برای حل معادله فرارفت

معادله فرارفت واداشته[۴] به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d\psi}{dt}+G(x,t)=R(x,t)$$

(۴)

در رابطهٔ بالا G جمله‌های مربوط به موج‌های تند گرانی و R مربوط به مدهای کند راسبی و جمله‌های غیرخطی می‌باشند. روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی روشی است که در آن جمله‌های گرانی که به‌صورت خطی طراحی شده‌اند به‌صورت ضمنی با مقادیر ψ گسسته‌سازی شوند و جمله‌های غیرخطی و راسبی به‌صورت صریح به‌دست آیند. با این توضیح خواهیم داشت:

$$\frac{\psi^{+}-\psi^{-}}{2\Delta t}+\frac{1}{2}\left(G^{+}+G^{-}\right)=R^{\circ}$$

(۵)

در معادلهٔ (۵) "+"، "-" و "o" به‌ترتیب بیان کنندهٔ نقطهٔ مقصد $(x_j,t+\Delta t)$، نقطهٔ میانی خط مشخصه $(x_j-\alpha_j,t)$ و نقطهٔ مبدأ خط مشخصه یعنی $(x_j-2\alpha_j,t-\Delta t)$ می‌باشند. بنابراین برای تعیین مقدار R باید مقادیر آنرا در زمان t در نقاط $x_j-\alpha_j$ میان‌یابی نمود. می‌توان مقادیر R° را با متوسط‌گیری در مکان نیز به‌دست آورد.

$$R^{x}=\frac{1}{2}\left[R(x_j-2\alpha_j,t)+R(x_j,t)\right]$$

آنچه که هنوز نامشخص است مقدار α_j می‌باشد. با توجه به شکل (۱)، α_j را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\alpha_j=\Delta t u(x_j-\alpha_j,t_n)$$

(۶)

مشکل دیگری که معادلهٔ (۵) دارد تعیین مقادیر ψ در نقاط $(x_j-2\alpha_j,t-\Delta t)$ می‌باشد که در نقاط شبکه واقع نیستند. این مشکل با یک میان‌یابی از نقاط شبکه به این نقاط رفع می‌گردد.

میان‌یابی

در دیدگاه لاگرانژی پخش عددی[۵] هنگامی رخ می‌دهد که از میان‌یابی خطی استفاده شود. بنابراین روش‌های میان‌یابی که در الگوریتم‌های روش نیمه‌لاگرانژی به‌کار می‌روند دقت و کارایی روش را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در اکثر الگوریتم‌های روش نیمه‌لاگرانژی از مراتب بالاتر میان‌یابی برای دست‌یابی به دقت بالاتر استفاده می‌گردد. برای میان‌یابی می‌توان از میان‌یابی‌هایی از قبیل خطی، لاگرانژ درجهٔ دوم، لاگرانژ درجهٔ سوم، Spline درجهٔ سوم و ... استفاده نمود. تحقیقات نشان داده‌است که میان‌یابی درجهٔ سوم لاگرانژ یک انتخاب مناسب برای دقت مطلوب و هزینهٔ محاسباتی کمتر می‌باشد.

پالایش زمانی

برای جلوگیری از به‌وجود آمدن عدم جفت‌شدگی[۶] در گام‌های زمانی فرد و زوج از یک پالایندهٔ زمانی در هر گام زمانی استفاده می‌شود. ازآنجاکه هدف از به‌کارگیری پالایندهٔ زمانی ایجاد جفت‌شدگی بین گام‌های زمانی زوج و فرد است پس این پالایندهٔ زمانی در هر مرحله باید بر روی گام زمانی $t-\Delta t$ انجام شود. پالایندهٔ زمانی با استفاده از رابطهٔ زیر برای یک متغیر ψ در زمان $t-\Delta t$ به‌دست می‌آید.

$$\psi_f(x,t-\Delta t)=\psi(x,t-\Delta t)+$$
$$\alpha\left[\psi_f(x,t-2\Delta t)-2\psi(x-\Delta t)+\psi(x,t)\right]$$

(۷)

همهٔ مقادیر ψ باید در نقاط شبکه باشند. α پارامتری برای کنترل جفت‌شدگی می‌باشد.

حل معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی با استفاده از روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی

در ابتدا برای آشنایی با چگونگی اعمال روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی به یک دستهٔ معادلات، حالت سادهٔ معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی را درنظر می‌گیریم. برای ساده‌سازی بیشتر یک مختصات ساکن دکارتی درنظر

گرفته می‌شود. پس معادلات حاکم، یکی معادلهٔ تکانه در جهت x و دیگری معادلهٔ پیوستگی می‌باشد. این معادلات به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

(۸)

$$\frac{d\phi}{dt} = -\phi \frac{\partial u}{\partial x}$$

(۹)

که

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}$$

در معادلات بالا u سرعت و $\phi = gh$ می‌باشند. که g شتاب گرانی زمین و h عمق لایهٔ مورد مطالعه هستند. قبل از اینکه این معادلات به‌صورت اصلی خود از هم جدا شوند، لازم است که مقدار ϕ به یک مقدار متوسط ثابت به‌نام $\Phi_\circ$ و یک مقدار متغیر به‌نام $\hat{\phi}$ تقسیم شود.

$$\phi = \Phi_\circ + \hat{\phi}$$

با اعمال این تغییر به معادلات (۸) و (۹) و با اعمال روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی سه‌ترازهٔ زمانی و ترکیب دو معادله با یکدیگر به معادلات زیر دست پیدا می‌کنیم:

$$\hat{\phi}^+_{xx} - \frac{1}{\Delta t^2 \Phi_\circ}\hat{\phi}^+ = \frac{1}{\Delta t}P_{ux} - \frac{1}{\Delta t^2\Phi_\circ}P_\phi \Phi_\circ + \frac{2}{\Delta t \Phi_\circ}R_\phi$$

(۱۰)

$$u^+ + \Delta t \hat{\phi}^+_x = P_u$$

(۱۱)

که در معادلات بالا P_u، P_ϕ و R_ϕ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P_u = u^- - \Delta t \phi^-_x$$

$$P_\phi = \hat{\phi}^- - \Delta t \Phi_\circ u^-_x$$

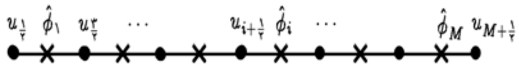
$$R_\phi = (\hat{\phi} u_x)^\circ$$

معادلهٔ به‌دست آمده یک معادلهٔ هلمهولتز است که باید با یک شرایط مرزی به روش‌های تکراری حل گردد.

الگوریتم حل

الگوریتم حـــــل برای حالتی که شرایط مرزی برای u داده شده باشد یا برای $\hat{\phi}$ کمی متفاوت خواهد بود، بنابراین الگوریتم حل برای این دو حالت به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

الگوریتم حل با شرایط داده‌شده برای u



شکل ۲: شبکه C -آراکاوا یک‌بعدی با شرایط مرزی u.

اگر شرایط مرزی برای u داده شده باشد یک شبکه مانند شکل (۲) بر روی ناحیهٔ حل درنظر می‌گیریم. با توجه به این نکته که شرایط مرزی برای u داده شده‌اند و با توجه به شکل ۲ الگوریتم حل به‌صورت زیر خلاصه می‌شود.

۱. پیدا کردن شرایط مرزی برای $\hat{\phi}$ با استفاده از معادلات حاکم و شرایط مرزی داده شده برای u.

۲. حل معادلهٔ (۱۰) و به‌دست آوردن مقادیر $\hat{\phi}^+_x$.

۳. محاسبهٔ معادلهٔ (۱۱) برای u^+.

برای دست‌یابی به شرط مرزی سمت چپ برای $\hat{\phi}$ دو معادلهٔ (۸) و (۹) را به‌صورت زیر گسسته می‌کنیم.

$$u^+_{i+1/2} + \Delta t \frac{\hat{\phi}^+_{i+1} - \hat{\phi}^+_i}{\Delta x} = P_{ui+1/2}$$

(۱۲)

$$\hat{\phi}^+_i + \Delta t \Phi_\circ \frac{u^+_{i+1/2} - u^+_{i-1/2}}{\Delta x} = P_{\phi i} - 2\Delta t R_{\phi i}$$

(۱۳)

با استفاده از معادلهٔ (۱۲) مقدار $u^+_{i+1/2}$ را برحسب بقیهٔ پارامترها محاسبه و در رابطهٔ (۱۳) جایگذاری می‌کنیم. بعد از انجام پاره‌ای محاسبات و قرار دادن $i=1$ به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{-\Delta x^2}{\Phi_\circ \Delta t^2} - 1\right)\phi^+_1 + \hat{\phi}^+_2 = \mathrm{RHS}_1$$

(۱۴)

که

$$\mathrm{RHS}_1 = -\frac{\Delta x}{\Delta t}u^+_{1/2} + \frac{\Delta x}{\Delta t}P_{u3/2} - \frac{\Delta x^2}{\Phi_\circ \Delta t^2}P_{\phi 1} + \frac{2\Delta x^2}{\Phi_\circ \Delta t^2}R_{\phi 1}$$

چون u به‌عنوان شرط مرزی داده شده‌است پس RHS_1 معلوم است و یک معادله برای نقطهٔ $i=1$ به‌دست می‌آید. برای دست‌یابی به شرط مرزی سمت راست برای $\hat{\phi}$ دو معادلهٔ (۸) و (۹) را به‌صورت زیر گسسته می‌کنیم.

$$u^{+}_{i-1/2}+\Delta t\frac{\hat{\phi}^{+}_{i}-\hat{\phi}^{+}_{i-1}}{\Delta x}=P_{ui-1/2} \tag{۱۵}$$

$$\hat{\phi}^{+}_{i}+\Delta t\Phi_{\circ}\frac{u^{+}_{i+1/2}-u^{+}_{i-1/2}}{\Delta x}=P_{\phi i}-2\Delta tR_{\phi i} \tag{۱۶}$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۵) مقدار $u^{+}_{i-1/2}$ را برحسب بقیهٔ پارامترها محاسبه و در رابطهٔ (۱۶) جایگذاری می‌کنیم. بعد از انجام پاره‌ای محاسبات و قرار دادن $i=M$ خواهیم داشت:

$$-\phi^{+}_{M-1}+\left(\frac{\Delta x^{2}}{\Phi_{\circ}\Delta t^{2}}+1\right)\phi^{+}_{M}=\mathrm{RHS}_{M} \tag{۱۷}$$

که

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}_{M}=&-\frac{\Delta x}{\Delta t}u^{+}_{M+1/2}+\frac{\Delta x}{\Delta t}P_{uM-1/2}\\&-\frac{\Delta x^{2}}{\Phi_{\circ}\Delta t^{2}}P_{\phi M}+\frac{2\Delta x^{2}}{\Phi_{\circ}\Delta t^{2}}R_{\phi M}\end{aligned}$$

چون u به‌عنوان شرط مرزی داده شده‌است پس RHS_M معلوم است و یک معادله برای نقطهٔ $i=M$ به‌دست می‌آید. بقیهٔ مراحل به‌سادگی انجام می‌شود [۵،۴].

الگوریتم حل با شرایط داده شده برای $\hat{\phi}$

اگر شرایط مرزی به‌جای اینکه برحسب u داده شوند برحسب $\hat{\phi}$ داده شوند، همهٔ مراحل حل مانند قبل می‌باشند به‌جز موردی که در آن از معادلهٔ هلمهولتز مقادیر $\hat{\phi}^{+}$ به‌دست می‌آیند که دیگر نیازی به پیدا کردن رابطه‌هایی برای مرزها از مقادیر u نمی‌باشد. با توجه به شکل ۲ دیگر مقادیر $u_{1/2}$ و $u_{M+1/2}$ وجود ندارند و شبکه از $\hat{\phi}_1$ شروع و به $\hat{\phi}_M$ ختم می‌شود.

حل یک مثال

برای اطمینان از درستی برنامهٔ نوشته شده یک مثال حل شده درنظر می‌گیریم. این مثال از مرجع [۶] برداشته شده‌است. در این مثال یک کانال پر از آب درنظر گرفته می‌شود که در شرایط اولیه دارای سرعت صفر و ارتفاع ۵ متر می‌باشد. این کانال با شرایط مرزی زیر از طرف چپ تخلیه می‌شود.

- شرایط مرزی برای طرف چپ:

$$q(0,t)=\begin{cases}-\dfrac{t}{10}, & 0\le t\le 60\\ -6\left[6-\dfrac{t-60}{10}\right], & 60\le t\le 80\\ -4, & t>80\end{cases} \tag{۱۸}$$

- شرایط مرزی برای طرف راست:

$$q(l,t)=0,\quad t\ge 0,\qquad l=400\,(\mathrm{m}) \tag{۱۹}$$

در دو معادلهٔ بالا q دبی خروجی از دو طرف کانال می‌باشد که در واقع $q=uh$ است. این شرایط مرزی با شرایط اولیهٔ داده شده شرایط لازم برای حل مسأله را فراهم می‌کنند. با توجه به این نکته که مقدار دبی به‌عنوان شرایط مرزی داده شده‌است پس باید یک روش تکراری برای به‌دست آوردن شرایط مرزی به‌کار ببریم. ازآنجاکه مقدار q در $l=400\,(\mathrm{m})$ صفر می‌باشد پس:

$u=0$ در $l=400\,(\mathrm{m})$

بنابراین روش تکراری برای تعیین شرایط مرزی u در $l=0$ به‌کار برده می‌شود. با توجه به اینکه مقدار $u=0$ در مرز $l=400\,(\mathrm{m})$ داده شده‌است می‌توانیم از الگوریتمی که برای این‌گونه مسائل در بخش‌های قبل مطرح شد استفاده کنیم. برای شرط مرزی u در مرز $l=0$ از تکرار برای تصحیح آن استفاده می‌کنیم. با اعمال شرایط اولیه و مرزی داده شده و استفاده از الگوریتم توضیح داده شده برای حل معادلهٔ هلمهولتز با توجه به شرایط مرزی داده شده برای u می‌توان این مثال را حل نمود. با حل این معادلات با توجه به این نکته که از یک شبکهٔ C-آراکاوا استفاده شده‌است، مقادیر u و h در نقاط یکسانی به‌دست نمی‌آیند و لذا مقادیر $u(0,t)$ در مقایسه با مرجع [۶] به‌صورت جدول (۱) محاسبه می‌شوند. مقادیر $h(0,t)$ محاسبه نمی‌شوند و مقادیر $h(0.5,t)$ محاسبه می‌شوند که مقادیر آن در جدول (۱) داده شده‌اند. این

مثال با $\Delta x = 1\,(\mathrm{m})$، $\Delta t = 1\,(\mathrm{s})$ و $\alpha = 0.25$ (برای پالایندهٔ زمانی) برای زمان‌های مختلف اجرا شده‌است. در مرجع [۶] در زمان $t = 20\,(\mathrm{s})$ منطقه‌ای که از شرایط مرزی تأثیر نمی‌پذیرد $x > 140.1\,(\mathrm{m})$ می‌باشد که این مقدار به روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی نیز نزدیک $140\,(\mathrm{m})$ به‌دست آمده‌است.

جدول ۱: مقایسهٔ بین روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی با مرجع [٦]، در این جدول h برحسب متر، u برحسب متر بر ثانیه و زمان برحسب ثانیه می‌باشند. .

	T=10	t=20	t=30	t=40	t=50	t=60
[۶] $h(0,t)$	4.89	4.72	4.56	4.37	4.18	4.0
$h(0.5,t)$ روش نیمه‌لاگرانژی	4.86	4.70	4.54	4.37	4.18	3.98
[۶] $u(0,t)$	-0.204	-0.423	-0.658	-0.915	-1.20	-1.50
$u(0,t)$ روش نیمه‌لاگرانژی	-0.206	-0.425	-0.661	-0.916	-1.20	-1.51

حل معادلات آب کم‌عمق دوبعدی با استفاده از روش نیمه‌لاگرانژی–نیمه‌ضمنی

معادلات حاکم

معادلات آب کم‌عمق برای یک جریان دوبعدی در یک مختصات چرخان مانند زمین به شکل زیر می‌باشند.

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - fv = 0$$

(۲۰)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + fu = 0$$

(۲۱)

$$\frac{d\phi}{dt} + \phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

(۲۲)

که

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{x} + v\frac{\partial}{y}$$

در معادلات بالا $f = 2\Omega \sin\Theta$ پارامتر کوریولیس، u مؤلفهٔ سرعت در جهت مختصهٔ محلی x که در امتداد طول جغرافیایی قرار دارد، v مؤلفهٔ سرعت در جهت مخصهٔ محلی y که در امتداد عرض جغرافیایی قرار دارد و $\phi = gh$ می‌باشند. Ω سرعت زاویه‌ای زمین، Θ عرض جغرافیایی، g شتاب گرانی زمین و h عمق لایهٔ مورد مطالعه هستند. برای به‌کار بردن این معادلات در یک منطقهٔ محدود باید این معادلات به یک مختصات مسطح مانند نقشهٔ استروگرافیک تبدیل شوند. برای دست‌یابی به این هدف داریم:

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

X و Y یک دستگاه مختصات دکارتی می‌باشد و λ معرف طول جغرافیایی می‌باشد. در رابطهٔ بالا $m = \frac{1+\sin\Theta_\circ}{1+\sin\Theta}$ پارامتر تبدیل نقشه می‌باشد. $\Theta_\circ$ عرض جغرافیایی است که صفحهٔ تصویر آنرا قطع می‌کند. با اعمال این تغییر مختصات به معادلات (۲۰) تا (۲۲) و تقسیم ϕ به دو قسمت به‌صورت $\phi = \Phi_\circ + \hat{\phi}$ معادلات آب کم‌عمق در مختصات کارتزین X و Y به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial X} + fV - K\frac{\partial S}{\partial X}$$

(۲۳)

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial Y} - fU - K\frac{\partial S}{\partial Y}$$

(۲۴)

$$\frac{D\hat{\phi}}{Dt} = -S\Phi_\circ\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\right) - S\hat{\phi}_\circ\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\right)$$

(۲۵)

که

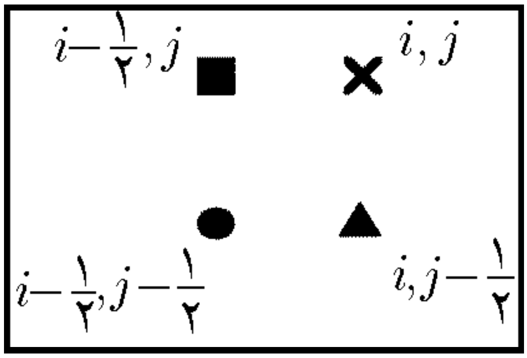
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + S\left(U\frac{\partial}{\partial X} + V\frac{\partial}{\partial Y}\right)$$

در روابط بالا $S = m^2$ و $K = \frac{U^2+V^2}{2}$ می‌باشند. معادلات بالا شکل مناسب و مطلوب برای اعمال روش نیمه‌لاگرانژی–نیمه‌ضمنی را دارند.

گسسته‌سازی زمانی معادلات

برای اعمال روش نیمه‌لاگرانژی–نیمه‌ضمنی در

ابتدا لازم است که یک شبکهٔ مناسب انتخاب گردد. شبکهٔ C-آراکاوا یکی از مناسب‌ترین شبکه‌ها برای معادلات آب کم‌عمق و معادلات حاکم بر جو زمین می‌باشد.



شکل ۳: چگونگی اندیس‌گذاری انواع نقاط در شبکهٔ C-آراکاوا .

در اینجا نیز این شبکه انتخاب می‌شود. شبکهٔ C-آراکاوا مطابق شکل (۳) می‌باشد. در این شکل، دایرهٔ توپر نقاط نوع f نامیده می‌شوند و در آن نقاط مقادیر f و S معلومند. نقاط مربع توپر نقاط نوع U نامیده می‌شوند و مقادیر U در این نقاط تعیین می‌شوند. مثلث توپر نقاط نوع V نامیده می‌شوند و مقادیر V در این نقاط مشخص می‌شوند. علامت ضربدر نقاط نوع ϕ نامیده می‌شوند و مشخص کنندهٔ مقادیر ϕ می‌باشند. از اندیس i برای گسسته‌سازی در جهت X و از اندیس j برای گسسته‌سازی در جهت Y استفاده می‌شود. از اندیس صحیح i و j برای نقاط نوع ϕ استفاده می‌شود. بنابراین نقاط دیگر در همسایگی یک نقطه مانند (i, j) مطابق شکل (۳) نامگذاری می‌شوند. به این ترتیب نقاط نوع U با مقادیر کسری در i، نقاط نوع V با مقادیر کسری در j و نقاط نوع f با مقادیر کسری در هر دو اندیس i و j بیان می‌شوند. با توجه به این شبکه معادلهٔ تکانهٔ U در نقاط نوع U، معادلهٔ تکانهٔ V در نقاط نوع V و معادلهٔ ϕ در نقاط نوع ϕ در زمان گسسته‌سازی می‌شوند. با اعمال روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی داریم:

$$\frac{U^+ - U^-}{2\Delta t} = -\frac{(1+\varepsilon)\hat{\phi}_X^+ + (1-\varepsilon)\hat{\phi}_X^-}{2} + \left(fV - K\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{\text{traj}}$$

(۲۶)

$$\frac{V^+ - V^-}{2\Delta t} = -\frac{(1+\varepsilon)\hat{\phi}_Y^+ + (1-\varepsilon)\hat{\phi}_Y^-}{2} + \left(-fU - K\frac{\partial S}{\partial Y}\right)^{\text{traj}}$$

(۲۷)

$$\frac{\hat{\phi}^+ - \hat{\phi}^-}{2\Delta t} = -S\Phi_\circ\left(\frac{(1+\varepsilon)U_X^+ + (1-\varepsilon)U_X^-}{2} + \frac{(1+\varepsilon)V_Y^+ + (1-\varepsilon)V_Y^-}{2}\right) - \left[S\hat{\phi}\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\right)\right]^{\text{traj}}$$

(۲۸)

ε پارامتری است که برای کاهش مسأله تشدیدهای به‌وجود آمده از نیروهای ایستور از قبیل توپوگرافی به‌کار می‌رود. از معادلهٔ (۲۶) نسبت به X و از معادلهٔ (۲۷) نسبت به Y مشتق می‌گیریم و مقادیر U_X^+ و V_Y^+ را محاسبه نموده در معادلهٔ (۲۸) جایگذاری می‌کنیم. با این جایگذاری و مرتب‌سازی، درنهایت معادلات برای حل به شکل زیر آماده می‌شوند:

$$\nabla^2\hat{\phi}^+ - \frac{\hat{\phi}^+}{S\Phi_\circ(1+\varepsilon)^2\Delta t^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)\Delta t}\left(\frac{\partial Q_U}{\partial X} + \frac{\partial Q_V}{\partial Y}\right) - \frac{1}{S\Phi_\circ(1+\varepsilon)^2\Delta t^2}Q_\phi$$

(۲۹)

$$U^+ + \Delta t(1+\varepsilon)\hat{\phi}_X^+ = P_U + 2\Delta t R_U^{\text{traj}}$$

(۳۰)

$$V^+ + \Delta t(1+\varepsilon)\hat{\phi}_Y^+ = P_V + 2\Delta t R_V^{\text{traj}}$$

(۳۱)

که در آنها

$$P_U = U^- - \Delta t(1-\varepsilon)\hat{\phi}_X^-$$

$$R_U^{\text{traj}} = \left(fV - K\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{\text{traj}}$$

$$P_V = V^- - \Delta t(1-\varepsilon)\hat{\phi}_Y^-$$

$$P_\phi = \hat{\phi}^- - S\Phi_\circ\Delta t(1-\varepsilon)(U_X^- + V_Y^-)$$

$$R_V^{\text{traj}} = \left(fV - K\frac{\partial S}{\partial X} \right)^{\text{traj}}$$

$$R_\phi^{\text{traj}} = \left[-S\hat{\phi}(U_X + V_Y) \right]^{\text{traj}}$$

همچنین Q_ψ برای یک کمیت مانند ψ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q_\psi = P_\psi + 2\Delta t R_\psi^{\text{traj}}$$

با توجه به معادلهٔ هلمهولتز به‌دست آمده مشاهده می‌شود که این معادله کاملاً از دو معادلهٔ (۳۰) و (۳۱) مستقل است و با یک شرایط مرزی داده شده به روش‌های تکراری تخفیفی قابل حل می‌باشد. در معادلات بالا مقدار R^{traj} برای یک کمیت مانند ψ به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$R_\psi^{\text{traj}} = \frac{(1+\varepsilon)R_\psi(X,Y,t)}{2} + \frac{(1-\varepsilon)R_\psi(X-2\alpha, Y-2\gamma, t)}{2}$$

(۳۲)

در معادلهٔ بالا α و γ مقادیر جابه‌جایی خطوط مشخصه در دو جهت X و Y می‌باشند که از روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\alpha = \Delta t U(X-\alpha, Y-\gamma, t)$$

(۳۳)

$$\gamma = \Delta t V(X-\alpha, Y-\gamma, t)$$

(۳۴)

مقادیر α و γ از روش تکراری به‌دست می‌آیندکه در بخش‌های قبل توضیح داده شد. برای به‌دست آوردن مقادیر طرف راست که در نقاط شبکه نیستند، از میان‌یابی دوبعدی درجهٔ سوم استفاده می‌شود. برای حل این معادلات مراحل ذیل انجام می‌گیرد:

۱. طرف راست این معادلات با توجه به این نکته که همه در زمان t و $t-\Delta t$ هستند محاسبه می‌شوند.

۲. معادلهٔ (۲۹) با شرایط مرزی داده شده یا محاسبه شده، به روش‌های تکراری برای $\hat{\phi}^+$ حل می‌شود.

۳. با استفاده از مقادیر $\hat{\phi}^+$ که از مرحلهٔ قبل حاصل شدند مقادیر $\hat{\phi}_X^+$ و $\hat{\phi}_Y^+$ محاسبه می‌شوند.

۴. مقادیر $\hat{\phi}_X^+$ در معادلهٔ (۳۰) قرار داده می‌شوند و مقادیر U^+ به‌دست می‌آیند.

۵. مقادیر $\hat{\phi}_Y^+$ درمعادلهٔ (۳۱) قرار داده می‌شوند و مقادیر V^+ به‌دست می‌آیند.

۶. با توجه به در دسترس بودن $\hat{\phi}^+$، U^+ و V^+ یک گام زمانی تکمیل می‌شود و برای شروع گام بعدی مقادیر $\hat{\phi}^+$، U^+ و V^+ با مقادیر $\hat{\phi}^\circ$، U° و V° و مقادیر $\hat{\phi}^\circ$، U° و V° با مقادیر $\hat{\phi}^-$، U^- و V^- جایگزین می‌شوند.

همان‌طور که در قسمت‌های قبل بیان گردید گسسته‌سازی‌ها در شبکهٔ C-آراکاوا انجام می‌گیرد پس گسسته‌سازی‌ها شامل مشتق‌گیری‌ها و متوسط‌گیری‌ها در نقاط شبکه خواهد بود[۷].

گسسته‌سازی مکانی معادلات

معادلات نهایی یک معادلهٔ هلمهولتز برای ϕ، معادلهٔ تکانه در جهت X و معادلهٔ تکانه در جهت Y می‌باشند. با توجه به توزیع این مقادیر در شبکهٔ C-آراکاوا این معادلات به‌ترتیب در نقاط (i,j)، $(i-1/2,j)$ و $(i,j-1/2)$ گسسته‌سازی می‌شوند. بنابراین داریم:

$$(\nabla^2\hat{\phi})_{i,j}^+ - \frac{\hat{\phi}_{i,j}^+}{\overline{S}_{i,j}^{XY}\Phi_\circ(1+\varepsilon)^2(\Delta t)^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)\Delta t}\left[(\delta_X Q_U)_{i,j} + (\delta_Y Q_V)_{i,j}\right] - \frac{1}{\overline{S}_{i,j}^{XY}\Phi_\circ(1+\varepsilon)^2(\Delta t)^2}(Q_\phi)_{i,j}$$

(۳۵)

$$(U)_{i-1/2,j}^+ + \Delta t(1+\varepsilon)(\delta_X\hat{\phi})_{i-1/2,j}^+ = (Q_U)_{i-1/2,j}$$

(۳۶)

$$(V)_{i,j-1/2}^+ + \Delta t(1+\varepsilon)(\delta_Y\hat{\phi})_{i,j-1/2}^+ = (Q_V)_{i,j-1/2}$$

(۳۷)

شرایط مرزی برای معادلهٔ هلمهولتز

اگر شرایط مرزی برای $\hat{\phi}$ داده شوند حل مسألهٔ هلمهولتز به‌سادگی با اعمال این شرایط مرزی امکان‌پذیر است. در این‌صورت شبکه طوری درنظر گرفته می‌شود که

نقاط نوع $\hat{\phi}$ در مرزها قرار بگیرند، با این عمل دیگر نیازی به شرایط مرزی معادلات U و V نیست [۸]. در صورتی‌که به‌جای $\hat{\phi}$ در مرزهای شرقی-غربی مقادیر U یا در مرزهای جنوبی-شمالی مقادیر V داده شوند، چگونه باید عمل کرد؟

۱.اگر مقادیر U در مرزهای شرقی-غربی داده شوند.

با معلوم بودن مقادیر U در مرزهای شرقی-غربی به‌جای $\hat{\phi}$، باید از این مقادیر داده شده و معادلات حاکم دو معادله برای $\hat{\phi}$ استخراج نماییم. برای این کار شبکه را طوری درنظر می‌گیریم که نقاط نوع U در مرزهای مورد نظر قرار گیرند و معادلات مرزی مشابه حالت یک‌بعدی با کمی محاسبات بیشتر به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

(الف) شرط مرزی برحسب U داده شده در مرز غربی

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\Delta X^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}+\frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2}+1\right)\hat{\phi}^+_{1,j}\\&-\hat{\phi}^+_{2,j}-\frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2}\left(\hat{\phi}^+_{1,j-1}+\hat{\phi}^+_{1,j+1}\right)\\&=\frac{\Delta X^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}(Q_\phi)_{1,j}\\&-\frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_U)_{3/2,j}\\&-\frac{\Delta X^2}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_{VY})_{1,j}\\&+\frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)}(U^+)_{1/2,j}\end{aligned} \tag{۳۸}$$

(ب) شرط مرزی برحسب U داده شده در مرز شرقی

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\Delta X^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}+\frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2}+1\right)\hat{\phi}^+_{M,j}\\&-\hat{\phi}^+_{M-1,j}-\frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2}\left(\hat{\phi}^+_{M,j-1}+\hat{\phi}^+_{M,j+1}\right)\\&=\frac{\Delta X^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}(Q_\phi)_{M,j}\\&+\frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_U)_{M-1/2,j}\\&-\frac{\Delta X^2}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_{VY})_{M,j}\\&-\frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)}(U^+)_{M+1/2,j}\end{aligned} \tag{۳۹}$$

۲. اگر مقادیر V در مرزهای جنوبی-شمالی داده شوند.

با معلوم بودن مقادیر V در مرزهای جنوبی-شمالی به‌جای مقادیر $\hat{\phi}$، باید با استفاده از این مقادیر داده شده و معادلات حاکم دو معادله برای $\hat{\phi}$ استخراج نماییم. در اینجا نیز مانند حالت قبل شبکه را طوری درنظر می‌گیریم که نقاط نوع V در مرزهای مورد نظر قرار گیرند و داریم

(الف) اعمال شرایط مرزی برحسب V داده شده در مرز جنوبی

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\Delta Y^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}+\frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2}+1\right)\hat{\phi}^+_{i,1}\\&-\hat{\phi}^+_{i,2}-\frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2}\left(\hat{\phi}^+_{i-1,1}+\hat{\phi}^+_{i+1,1}\right)\\&=\frac{\Delta Y^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}(Q_\phi)_{i,1}\\&-\frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_V)_{i,3/2}\\&-\frac{\Delta Y^2}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_{UX})_{i,1}\\&+\frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)}(V^+)_{i,1/2}\end{aligned} \tag{۴۰}$$

(ب) شرط مرزی داده شده برحسب V در مرز شمالی

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\Delta Y^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}+\frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2}+1\right)\hat{\phi}^+_{i,N}\\&-\hat{\phi}^+_{i,N-1}-\frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2}\left(\hat{\phi}^+_{i-1,N}+\hat{\phi}^+_{i+1,N}\right)\\&=\frac{\Delta Y^2}{\overline{S}^{XY}\Phi_\circ \Delta t^2(1+\varepsilon)^2}(Q_\phi)_{i,N}\\&+\frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_V)_{i,N-1/2}\\&-\frac{\Delta Y^2}{\Delta t(1+\varepsilon)}(Q_{UX})_{i,N}\\&-\frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)}(V^+)_{i,N+1/2}\end{aligned} \tag{۴۱}$$

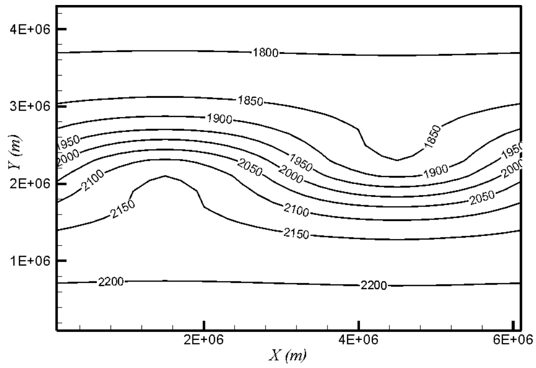
نتایج حل عددی

برای بررسی چگونگی عملکرد روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی این روش را به یک شرط اولیهٔ داده شده با شرایط مرزی مشخص اعمال می‌کنیم. شرط اولیه برای $h=\phi/g$ داده شده‌است و مقادیر U و V از تقریب زمینگرد به‌دست می‌آیند. شرط اولیهٔ h به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۹].

$$h(X,Y) = H_\circ + H_1 \tanh\frac{9(D/2-Y)}{2D} + H_2\,\mathrm{sech}^2\frac{9(D/2-Y)}{2D}\sin\left(\frac{2\pi X}{L}\right)$$

(۴۲)

این شرط اولیه در شکل (۴) نشان داده شده‌است.



شکل ٤: میدان h اولیهٔ ورودی به کد کامپیوتری، معادلهٔ (٤٢).

مؤلفه‌های میدان سرعت اولیه یعنی U و V از تقریب زمینگرد به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$U=\left(\frac{-g}{f}\right)\frac{\partial h}{\partial Y},\qquad V=\left(\frac{g}{f}\right)\frac{\partial h}{\partial X}$$

(۴۳)

ناحیهٔ مورد نظر یک مستطیل به طول $L=6000\,(\mathrm{km})$ و عرض $D=4400\,(\mathrm{km})$ می‌باشد که ثوابت زیر در آن تعریف شده‌اند.

$$H_\circ = 2000\,(\mathrm{m}),\qquad H_1 = 220\,(\mathrm{m})$$
$$H_2 = 133\,(\mathrm{m}),\qquad g = 10\,(\mathrm{ms^{-2}})$$

پارامتر کوریولیس یعنی f با رابطهٔ زیر بیان می‌شود.

$$f=\hat{f}+\beta\,(Y-D/2)$$

(۴۴)

که $\beta = 1.5\times10^{-11}\ \mathrm{m^{-1}s^{-1}}$ و $\hat{f}=10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$. در این مسأله شرط مرزی دوره‌ای[۷] بر مرزهای غربی و شرقی حاکم است. بنابراین برای یک کمیت وابسته مانند ψ داریم:

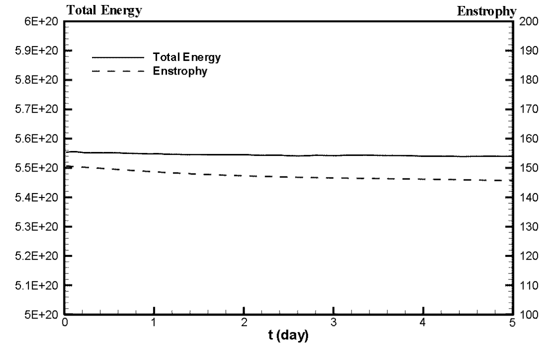
$$\psi(X,Y,t)=\psi(X+L,Y,t)$$

(۴۵)

ولی در مرزهای شمالی و جنوبی هیچ‌گونه جرمی از شاره از ناحیه خارج نمی‌شود، یعنی داریم:

$$V(X,0,t)=V(X,D,t)=0$$

(۴۶)



شکل ۵: کمیت‌های پایستار انرژی کل بخش بر چگالی با واحد $\mathrm{Jm^3/kg}$ و آنستروفی برحسب $\mathrm{m/s^2}$.

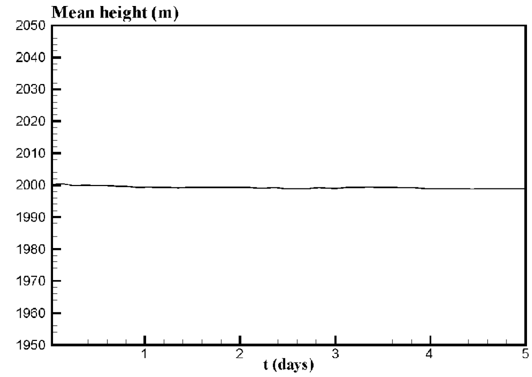
دو نکته در اعمال شرایط مرزی قابل ذکر است اول آنکه، در مرزهای غربی و شرقی در حل معادلهٔ هلمهولتز از شرایط مرزی دوره‌ای استفاده می‌شود و دیگر نیازی به محاسبهٔ $\hat{\phi}$ در مرزها نیست و دوم اینکه در مرزهای شمالی و جنوبی مقادیر $V=0$ داده شده‌اندکه باید این مقادیر به دو معادلهٔ (۴۰) و (۴۱) اعمال شوند تا معادلات لازم برای $\hat{\phi}$ در مرزهای شمالی و جنوبی به‌دست آیند. روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی به‌خوبی کمیت‌هایی مانند انرژی کل، ارتفاع متوسط و آنستروفی را پایسته نگه می‌دارد. این مطلب برای انرژی کل و آنستروفی در شکل (۵) و برای ارتفاع متوسط در شکل (۶) نشان داده شده‌است. نتایج اجرای کد نوشته شده برای حل مسألهٔ ذکرشده برای پیش‌بینی یک و دو روزهٔ ارتفاع ژئوپتانسیل به‌ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸) آمده‌اند. این نتایج با شرایط $\varepsilon = 0$، $\Delta t = 1000\,\mathrm{s}$، $\Delta X = \Delta Y = 200\,\mathrm{km}$ و ضریب پالایندهٔ زمانی $\alpha = 0.05$ به‌دست آمده‌اند.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

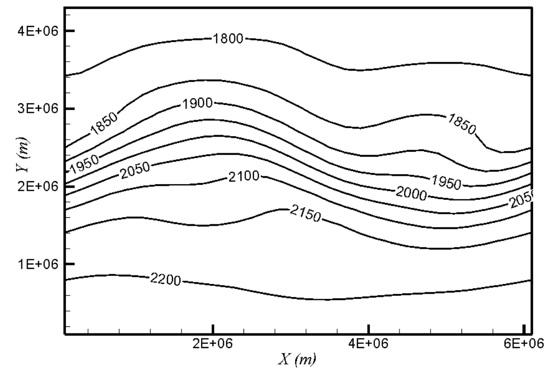
روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی برای حل معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی و دوبعدی به‌کار برده شد. دو نوع از شرایط مرزی یکی برحسب مؤلفه‌های سرعت و دیگری برحسب مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیل، بررسی شدند. در حالتی که مؤلفه‌های سرعت به‌عنوان شرایط مرزی داده می‌شوند روابط جدیدی برای اعمال این شرایط به معادلهٔ هلمهولتز به‌دست آمدند. از میان‌یابی درجهٔ سوم برای به‌دست آوردن مقادیر مربوط به نقاط بین شبکه‌ای استفاده شده‌است که یک انتخاب مناسب با توجه به هزینه‌های محاسباتی و دقت می‌باشد. روش مذکور شرط پایستاری کمیت‌هایی از قبیل انرژی کل، آنستروفی و ارتفاع میانگین را به‌خوبی ارضا می‌کند که بیانگر مدل‌سازی درست جمله‌های غیرخطی و مناسب بودن این روش برای این‌گونه معادلات می‌باشد.

تشکر و قدردانی

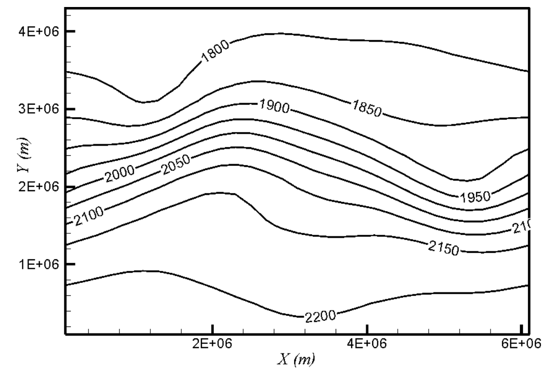
نویسندگان این مقاله کمال تشکر و قدردانی خود را از دانشگاه تهران و پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو، به‌خاطر حمایت‌هایشان در انجام این تحقیق، ابراز می‌دارند.



شکل ٦: کمیت پایستار ارتفاع متوسط h (m).



شکل ۷: پیش‌بینی ۲٤ ساعتهٔ میدان h.



شکل ۸: پیش‌بینی ٤۸ ساعتهٔ میدان h.

مراجع

1 - Ritchie, H. (1995). "Implementation of the semi-Lagrangian method in a high-resolation version of ECMWF forcast model." *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 123, PP. 489-514.

2 - Duran, dale R. (1999). *Numerical methods for wave equation in geophysical fluid dynamics.* Springer-Verlag, New York, Inc.

3 - Staniforth, A. and Cote, J. (1991). "Semi-Lagrangian integration schemes for atmosphric models--A review." *Mon. Wea. Rev.,* Vol. 119, PP. 2206-2223.

4 - McDonald, A. (1999). "Well-posed boundary conditions for semi--Lagrangian schemes: the one-dimensional case. Part I." *HIRLAM Technical Report 43*.

5 - McDonald, A. (1999). "Well-posed boundary conditions for semi--Lagrangian schemes: the one-dimensional case. Part II." *HIRLAM Technical Report 44*.

6 - Abbott, M. B. and Basco, D. R. (1989). *Computational fluid dynamics an introduction for engineers.* John Wiley and Sons, Inc., New York.

7 - Bergeron, G., Laprise, R. and Caya, D. with the participation of Robert, A., Giguere, M., Benoit, R. and Chartier, Y. (1994). *Formulation of the mesoscale compressible community, (MC2) model.* Report of Cooperative Center for Research in Mesometorology.

8 - McDonald, A. (1999). "Well-posed boundary conditions for semi--Lagrangian schemes: the tow-dimensional case." *HIRLAM Technical Report 45*.

9 - Navon, I. M., and Riphagen, H. A., (1979). "An implicit compact fourth--order algorithm for solving the shallow water equations in conservation-law form." *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 107, PP. 1107-1127.

واژه‌های انگلیسی به‌ترتیب استفاده در متن

1 - Semi Lagrangian
2 - Semi Implicit
3 - Advection
4 - Forced Advection
5 - Numerical Diffusion
6 - Coupling
7 - Periodic