

حل عددی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش فشرده

وحید اصفهانیان

دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

سرمد قادر

دانشجوی دکتری پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو

(تاریخ دریافت ۸۲/۱/۲۵، تاریخ تصویب ۸۲/۹/۲۲)

چکیده

در این مقاله حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق در صفحه β با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم ارائه می شود. معادلات آب کم عمق در واقع بیان کننده حرکت یک جو یا اقیانوس یک لایه ای همراه با تقریب هیدوستاتیک می باشند، که در آنها فرض می شود چگالی ثابت است و علاوه بر آن جو را خشک و هردو را بدون اصطکاک فرض می کنند. برای گسسته سازی زمانی معادلات از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ که نسبت به روابط پایه ای این روش از مزایای بیشتری برخوردار است، استفاده می شود. در ادامه پس از خطی سازی، معادلات حاصل با استفاده از روش ADI در دو راستای محورهای مختصات شکسته می شوند. سپس برای گسسته سازی مکانی معادلات از روش فشرده مرتبه چهارم استفاده می شود. به دلیل به وجود آمدن خطای دگرنامیدن ناشی از اندرکنش جمله های غیرخطی موجود در معادلات با استفاده از اضافه نمودن عبارات اتلافی به معادلات می توان بر این خطا غلبه نمود. آزمایش های عددی انجام گرفته نشان می دهند که نتایج بهتر برای غلبه بر این خطا هنگامی به دست می آیند که از یک پالاینده در طول مراحل انتگرال گیری به صورت متناوب استفاده شود. کمیت های ناوردای مدل مانند انستروپی و انرژی کل در طول انتگرال گیری عددی از معادلات به خوبی پایستگی خویش را حفظ می نمایند، این مطلب موید این حقیقت است که ماهیت غیرخطی معادلات با استفاده از روش عددی به کار رفته به خوبی مدل شده است. اعتبار حل عددی ارائه شده با مقایسه جواب های حاصل با نتایج محققان قبلی سنجیده می شود. نتایج پاره ای از آزمایش های عددی به منظور نشان دادن دقت بالاتر روش فشرده در مقایسه با روش های متداول نیز ارائه می شود.

واژه های کلیدی: تفاضل محدود، فشرده، روش بیم و وارمینگ، دقت عددی، معادلات آب کم عمق، جو

مقدمه

جمله یکی از تحقیقات مهم انجام گرفته در این زمینه مرجع [۵] می باشد.

در مقاله حاضر حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق در صفحه β با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم ارائه می گردد. میان این تحقیق و کار صورت گرفته در مرجع [۶] شباهت هایی وجود دارد. ولی در تحقیق حاضر برای گسسته سازی زمانی معادلات از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ [۷] به جای روش پایه ای به کار رفته در [۶،۸] استفاده شده است. معادلات نهایی به دست آمده با استفاده از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ نسبت به روابط به دست آمده در [۶] بسیار ساده تر بوده و همچنین شکستن آنها در دو راستای محورهای مختصات با استفاده از روش ADI^1 [۹] بسادگی امکان پذیر بوده و مشکلات مطرح شده (از جمله نگرانی در مورد نحوه اضافه کردن جمله های پریشیدگی) در [۶] را با خود ندارد. همچنین

در سال های اخیر توجه بسیاری از محققان به استفاده از روش های عددی با دقت بالا برای شبیه سازی دقیق مسائل دینامیک شاره ها، جلب شده است. روش های تفاضل محدود فشرده از جمله این روش ها می باشند که موضوع مقالات بسیاری را در این سال ها به خود اختصاص داده اند. از لحاظ تاریخی می توان رد پای این روش های را در کارهای انجام شده توسط نیومروف [۱] و همچنین فاکس و گودوین [۲] جستجو نمود. ولی در واقع پس از پیشنهاد کریس [۳] و مقاله کلیدی هرش [۴] این روش ها تبدیل به یک ابزار بسیار قوی برای شبیه سازی دقیق مسائل دینامیک شاره ها گردیدند. در طی سال های گذشته گروه های بسیار متنوعی از روش های فشرده با خواص تفکیک متفاوت توسط محققان مختلف معرفی شده اند، از

شمال-جنوب می‌باشد. مولفه‌های سرعت در دو راستای x و y به ترتیب با u و v نمایش داده شده‌اند. t معین‌کننده زمان، h بیان‌کننده عمق شاره و f پارامتر کوریولیس است که در صفحه β به صورت $f = f_0 + \beta y$ است که $\beta = \partial f / \partial y$ است، خواهد بود و g نیز شتاب گرانی (جاذبه) است.

با توجه به آنچه که در [۱۱] آمده می‌توان معادلات آب کم‌عمق را در شکل پایستار زیر بازنویسی نمود.

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} - fhu + gh \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} + fhv + gh \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0$$

معادلات بالا را می‌توان به شکل ماتریسی زیر خلاصه نمود.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} - \mathbf{fR} = 0 \quad (2)$$

با استفاده از قرارداد $\tilde{m} = hu$ و $\tilde{n} = hv$ ، در معادله بالا بردارهای \mathbf{U} ، \mathbf{P} ، \mathbf{Q} ، \mathbf{R} به صورت زیر خواهند بود.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{n} \\ h \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \tilde{m}^2 / h + gh^2 / 2 \\ \tilde{m}\tilde{n} / h \\ \tilde{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ -\tilde{m} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{m}\tilde{n} / h \\ \tilde{n}^2 / h + gh^2 / 2 \\ \tilde{n} \end{pmatrix}$$

شرایط مرزی مدل نیز به صورت زیر بیان می‌شوند. چون مدل در راستای محور x ‌ها پریودیک است بنابراین:

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{U}(x + L, y, t) \quad (3)$$

و در جهت محور y ‌ها از شرط مرز سخت به صورت زیر استفاده می‌گردد.

$$v(x, 0, t) = v(x, D, t) = 0 \quad (4)$$

شرایط اولیه به صورت زیر:

$$\mathbf{U}(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad (5)$$

انرژی کل نیز به صورت

استفاده از شکل دلتا باعث کاهش در مراحل حل عددی و در نتیجه صرفه‌جویی در زمان و حافظه مورد نیاز خواهد شد. بعلاوه در این تحقیق علاوه بر روش فشرده از روش مرتبه دوم مرکزی نیز برای حل معادلات استفاده شده که می‌توان با مقایسه نتایج حاصل از این دو روش، دقت بالاتر روش فشرده را در مقایسه با روش مرتبه دوم مرکزی مورد آزمایش قرار داد. همچنین روش فشرده مرتبه چهارم برای حل معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی نیز مورد استفاده قرار گرفته است. در این تحقیق از نتایج حاصل از اعمال روش فشرده به معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی برای نشان‌دادن این مطلب که روش فشرده واقعاً یک روش مرتبه چهارم است، استفاده شده‌است.

مدل فیزیکی و معادلات حاکم

در این بخش به مدلی که توسط آن فیزیک مساله مدل‌سازی می‌شود و همچنین معادلات حاکم بر این مدل، اشاره می‌گردد. در واقع مدلی که در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت از یک شاره تراکم‌ناپذیر، همگن، غیرلزج و همراه با تقریب هیدروستاتیک است که در یک کانال متناظر ناحیه با عرض جغرافیایی میانی بر روی کره زمین، محدود می‌گردد. سطح زیرین کانال مسطح و سخت بوده و سطح بالایی آن آزاد می‌باشد. مرزهای شمالی و جنوبی کانال را دیوارهای سخت تشکیل می‌دهند. همچنین فرض می‌شود که جریان شاره در جهت شرقی-غربی از شرط پریودیک بودن، پیروی می‌کند و از فرض صفحه β نیز استفاده می‌شود. معادلات حاکم بر این مدل فیزیکی معادلات آب کم‌عمق نامیده می‌شوند. شکل اوپلری این معادلات به صورت زیر [۱۰]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

برای یک ناحیه مستطیل شکل با طول L در راستای محور x ‌ها و عرض D در راستای محور y ‌ها می‌باشد. در معادلات بالا x نمایانگر محور مختصات در راستای شرق-غرب و y نشان‌دهنده راستای محور مختصات در جهت

با استفاده از رابطه زیر

$$f\Delta R^n = C\Delta U^n$$

که در آن داریم

$$C = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

می توان معادله (۱۰) را به صورت زیر نوشت.

$$\Delta U^n = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^n \Delta U^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}^n \Delta U^n}{\partial y} - C\Delta U^n \right) - \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{P}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}^n}{\partial y} - f\mathbf{R}^n \right) \quad (11)$$

روش ADI

اگر در نظر باشد تا دستگاه معادلات (۱۱) به صورت مستقیم حل شود، یعنی مشتقات موجود در آن را با استفاده از روش فشرده در دو راستای محورهای مختصات گسسته نمود، به حجم زیادی از عملیات محاسباتی و حافظه نیاز است. به همین دلیل اگر معادلات در دو جهت محورهای مختصات شکسته شوند، در این صورت فرایند حل به حل دو سری معادله که هر کدام فقط شامل مشتقات مکانی در یکی از جهت های محورهای مختصات هستند، محدود خواهد شد. هنگام گسسته سازی این معادلات با استفاده از روش فشرده فقط می بایست در هر یک از راستاها یک ماتریس سه قطری بلوکی را معکوس نمود. برای شکستن معادلات در دو راستای محورهای مختصات روش ADI [۹] مورد استفاده قرار می گیرد. با توجه به شکل معادله (۱۱) روش ADI را می توان به آسانی برای شکستن این معادله به صورت زیر به کار برد.

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}^n) - C^{(1)} \right] \right\} \left\{ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{B}^n) - C^{(2)} \right] \right\} \Delta U^n = -\Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{P}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}^n}{\partial y} - f\mathbf{R}^n \right) \quad (12)$$

معادله (۱۲) را می توان به صورت دو معادله زیر در دو راستای محورهای مختصات نوشت:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^D (u^2 + v^2 + gh) h dx dy \quad (6)$$

تعریف می شوند. مقدار انستروپی را می توان از رابطه زیر پیدا نمود.

$$Z = \iint \frac{\zeta_a^2}{h} dx dy \quad (7)$$

مقدار ζ_a در رابطه بالا برابر با تاوایی مطلق است و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\zeta_a = \zeta + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \quad (8)$$

در مدل فیزیکی مقدار انرژی کل و انستروپی مستقل از زمان است.

شکل دلتای روش بیم و وارمینگ

از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ [۷] که یک روش مرتبه دوم یک مرحله ای است، برای گسسته سازی زمانی شکل پایستار معادلات آب کم عمق جهت پیمایش در زمان استفاده می شود. رابطه این روش به صورت زیر بیان می شود:

$$\Delta U^n = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \Delta U^n}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial t} \quad (9)$$

بالانویس n نشان دهنده مرحله زمانی به صورت $n\Delta t$ می باشد، در معادله (۹) $U^n = U(n\Delta t)$ و $\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$ است. با استفاده از معادله (۲) می توان رابطه (۹) را به صورت زیر دوباره نویسی نمود.

$$\Delta U^n = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{P}^n}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}^n}{\partial y} - f\mathbf{R}^n \right) - \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{P}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}^n}{\partial y} - f\mathbf{R}^n \right) \quad (10)$$

از آنجا که $\Delta \mathbf{P}^n$ و $\Delta \mathbf{Q}^n$ غیرخطی هستند، می بایست آنها را به صورت زیر خطی سازی نمود:

$$\Delta \mathbf{P}^n = \mathbf{A}^n \Delta U^n, \quad \Delta \mathbf{Q}^n = \mathbf{B}^n \Delta U^n$$

در روابط بالا \mathbf{A} و \mathbf{B} ماتریس های ژاکوبین هستند که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial U}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial U}$$

حال معادله بالا را با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم گسسته‌سازی می‌کنیم.

$$Q_y^{-1} D_{\circ y} Q^n = Y$$

با ضرب طرفین معادله بالا در Q_y و بازکردن معادلات نتیجه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\Delta y}{3} (Y_{i,j+1} + 4Y_{i,j} + Y_{i,j-1}) =$$

$$Q_{i,j+1} - Q_{i,j-1}, \quad j = 2, \dots, N_y - 1$$

در مرزها نیز از روابط پیش‌رو و پس‌رو که به صورت زیر تعریف می‌شوند، استفاده می‌کنیم [۱۳].

$$F'_i + 2F'_{i+1} = \frac{-5F_i + 4F_{i+1} + F_{i+2}}{2\Delta x} \quad (17)$$

$$F'_i + 2F'_{i-1} = \frac{5F_i - 4F_{i-1} - F_{i-2}}{2\Delta x} \quad (18)$$

اعمال روش فشرده به معادله (۱۳) در جهت x نتیجه زیر را به دست خواهد داد.

$$(I - \frac{\Delta t}{2} C^{(1)}) \Delta U^* + \frac{\Delta t}{2} Q_x^{-1} D_{\circ x} (A^n \Delta U^*)$$

$$= -\Delta t (Q_x^{-1} D_{\circ x} P^n + Y - fR^n)$$

پس از بازکردن اپراتورها و دسته‌بندی، معادله بالا به صورت زیر در خواهد آمد.

$$(\alpha I - \frac{\alpha \Delta t}{2} C_j^{(1)} - A_{i-1,j}^n) \Delta U_{i-1,j}^* +$$

$$(4\alpha I - 2\alpha \Delta t C_j^{(1)}) \Delta U_{i,j}^* +$$

$$(\alpha I - \frac{\alpha \Delta t}{2} C_j^{(1)} + A_{i+1,j}^n) \Delta U_{i+1,j}^*$$

$$= RHS_{i,j}^* \quad (19)$$

در معادله بالا داریم:

$$RHS_{i,j}^* = -\alpha \Delta t [\frac{3}{\Delta t} (P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n) +$$

$$(Y_{i+1,j} + 4Y_{i,j} + Y_{i-1,j}) -$$

$$f_j (R_{i+1,j} + 4R_{i,j} + R_{i-1,j})]$$

در معادلات بالا مقدار α به صورت زیر تعریف شده است.

$$\alpha = \frac{4\Delta x}{6\Delta t}$$

با حل معادله (۱۹) می‌توان متغیر ΔU^* را پیدا نمود. از آنجا که شرط مرزی مساله مورد نظر در کانال در جهت محور x به صورت پریودیک فرض شده است به همین دلیل

$$\begin{aligned} & \{I + \frac{\Delta t}{2} [\frac{\partial}{\partial x} (A^n) - C^{(1)}]\} \Delta U^* \\ & = -\Delta t (\frac{\partial P^n}{\partial x} + \frac{\partial Q^n}{\partial y} - fR^n) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\{I + \frac{\Delta t}{2} [\frac{\partial}{\partial y} (B^n) - C^{(2)}]\} \Delta U^n = \Delta U^* \quad (14)$$

در معادلات بالا I معرف ماتریس واحد و ماتریس‌های $C^{(1)}$ و $C^{(2)}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

گسسته‌سازی مکانی

برای گسسته‌سازی مکانی معادلات (۱۳) و (۱۴) از روش فشرده مرتبه چهارم [۴،۵] استفاده می‌شود. مشتق اول یک تابع دلخواه پیوسته مانند F با استفاده از این روش در یک راستای اختیاری (در اینجا x) به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\frac{1}{6} F'_{i+1} + \frac{2}{3} F'_i + \frac{1}{6} F'_{i-1} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \quad (15)$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود رابطه بالا یک رابطه ضمنی است و به همین دلیل برای آسانی کاربرد و راحتی اعمال به معادلات حاکم بر مساله می‌توان رابطه (۱۵) را به صورت زیر دوباره نویسی نمود [۱۲]:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i = Q_x^{-1} D_{\circ x} F_i \quad (16)$$

اپراتورهای موجود در رابطه بالا به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$Q_x^{-1} F_i = (F_{i+1} + 4F_i + F_{i-1})/6$$

$$D_{\circ x} F_i = (F_{i+1} - F_{i-1})/2\Delta x$$

مراحل حل عددی و اعمال شرایط مرزی

برای گسسته‌سازی مکانی معادله (۱۳) در ابتدا می‌بایست که جمله $\partial Q / \partial y$ را گسسته نمود، به همین دلیل از فرض زیر استفاده می‌کنیم:

$$Y = \partial Q / \partial y$$

می‌بایست از عبارات اتلافی مطابق با آنچه که در [۷] آمده استفاده نمود. در این تحقیق علاوه بر عبارت‌های اتلافی از یک پالاینده نیز برای حذف طول موج‌های مزاحم کوچکتر از یک حد معین نیز استفاده شده‌است. آزمایش‌های عددی نشان دادند که استفاده از پالاینده منجر به جواب‌های بهتری می‌شود. پالاینده در واقع نوعی هموارساز است که در طی مراحل انتگرال‌گیری عددی از معادلات به صورت متناوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولینگتون [۱۵] در سال ۱۹۶۲ در یک مقاله پالاینده‌هایی را که می‌توان در طول انتگرال‌گیری از آنها استفاده نمود، معرفی کرد. او در واقع با توجه به خصوصیتی که از پالاینده مورد انتظار است نحوه طراحی آنها را مورد مطالعه قرار داد. پالاینده‌ای که او مورد استفاده قرار داد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{F}_i = a\hat{F}_i + b(\hat{F}_{i+1} + \hat{F}_{i-1}) + c(\hat{F}_{i+2} + \hat{F}_{i-2})$$

در معادله بالا \hat{F} نشان‌دهنده کمیتی است که مورد پالایش قرار می‌گیرد و ضرایب a ، b و c ضرایب ثابتی هستند که آنها را با توجه به آن‌که وظیفه پالاینده حذف چه طول موج‌هایی باشد، می‌توان پیدا نمود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود این یک رابطه یک‌بعدی است ولی این معادله را می‌توان برای حالت دوبعدی نیز بسط داد، در واقع کافی است که به صورت متناوب این رابطه را در دو جهت (برای مثال) x و y اعمال نمود. ولینگتون نشان داد که اگر در نظر باشد تا طول موج‌های کمتر از $3\Delta x$ را به صورت کامل حذف نمود می‌بایست از یک پالاینده به صورت زیر استفاده شود.

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= 4.28\hat{F}_i - 2.16(\hat{F}_{i+1} + \hat{F}_{i-1}) \\ &+ 0.52(\hat{F}_{i+2} + \hat{F}_{i-2}) \\ \tilde{F}_i &= 0.375\bar{F}_i + 0.25(\bar{F}_{i+1} + \bar{F}_{i-1}) \\ &+ 0.0625(\bar{F}_{i+2} + \bar{F}_{i-2}) \end{aligned} \quad (22)$$

خروجی این پالاینده \tilde{F} می‌باشد که در آن کلیه طول موج‌های کمتر از $3\Delta x$ حذف شده‌اند. اگر در نظر باشد که این پالاینده بر یک میدان دوبعدی اعمال گردد همان‌گونه که اشاره شد، می‌بایست این پالاینده را به صورت متناوب در دو جهت این میدان دوبعدی اعمال نمود. البته با توجه به روابط این پالاینده مشخص است که نمی‌توان آن را در

حل معادله (۱۹) منجر به حل یک دستگاه معادلات سه‌قطری بلوکی پربودیک با بلوک‌های 3×3 خواهد گردید. معادله (۱۴) را نیز می‌توان با استفاده از روش فشرده به صورت زیر گسسته نمود.

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}^{(2)}\right) \Delta \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} Q_y^{-1} D_{o,y} (\mathbf{B}^n \Delta \mathbf{U}^*) = \Delta \mathbf{U}^*$$

با استفاده از تعاریف مربوط به اپراتورها و اعمال آنها در معادلات بالا و در نهایت دسته‌بندی معادله نهایی به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\begin{aligned} &\left(r\mathbf{I} - \frac{r\Delta t}{2} \mathbf{C}_{j-1}^{(2)} - \mathbf{B}_{i,j-1}^n\right) \Delta \mathbf{U}_{i,j-1}^n + \\ &\left(4r\mathbf{I} - 2r\Delta t \mathbf{C}_j^{(2)}\right) \Delta \mathbf{U}_{i,j}^n + \\ &\left(r\mathbf{I} - \frac{r\Delta t}{2} \mathbf{C}_{j+1}^{(2)} + \mathbf{B}_{i,j+1}^n\right) \Delta \mathbf{U}_{i,j+1}^n \\ &= \mathbf{RHS}_{i,j}^n \end{aligned} \quad (20)$$

در معادله بالا داریم:

$$\mathbf{RHS}_{i,j}^n = r[\Delta \mathbf{U}_{i,j+1}^* + 4\Delta \mathbf{U}_{i,j}^* + \Delta \mathbf{U}_{i,j-1}^*]$$

در معادلات بالا مقدار r به صورت زیر تعریف شده‌است.

$$r = \frac{4\Delta y}{6\Delta t}$$

حل معادله (۲۰) برای رسیدن به جواب نهایی منجر به حل یک ماتریس سه‌قطری بلوکی با بلوک‌های 3×3 خواهد گردید. از آنجا که درمساله مورد نظر درجهت y دیواره‌های کانال به صورت مرز سخت در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین می‌بایست که این شرط مرزی را در حل معادله (۲۰) به کار برد. به همین دلیل شرط صفر بودن مولفه عمودی سرعت را به صورت مستقیم درمرزها اعمال کرده و برای دو متغیر دیگر نیز از میان‌یابی مکانی از زمان قبل به صورت [۱۴]

$$\Delta \mathbf{U}_b^{n+1} = 2\Delta \mathbf{U}_{b-1}^n - \Delta \mathbf{U}_{b-2}^n \quad (21)$$

استفاده می‌شود، که در آن b نمایانگر نقطه مرزی می‌باشد.

استفاده از عبارت‌های اتلافی و پالاینده

برای آن‌که بتوان بر خطای دگرنامیدن به وجود آمده از اندرکنش بخش‌های غیرخطی معادلات غلبه نمود

مولفه‌های میدان سرعت اولیه یعنی u و v با استفاده از تقریب زمینگرد به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$u = \frac{-g}{f} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}$$

ناحیه موردنظر یک مستطیل به طول $L = 6000$ km و عرض $D = 4400$ km می‌باشد که ثابت زیر در آن تعریف شده‌اند:

$$H_0 = 2000 \text{ m}, \quad H_1 = 220 \text{ m}$$

$$H_2 = 133 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

در صفحه β پارامتر کوریولیس یعنی f با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$f = f_0 + \beta(y - D/2)$$

که $\beta = 1.5 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ و $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ در این مساله شرط مرزی پرریودیک بر مرزهای غربی و شرقی حاکم است. بنابراین برای یک کمیت وابسته مانند Ψ داریم:

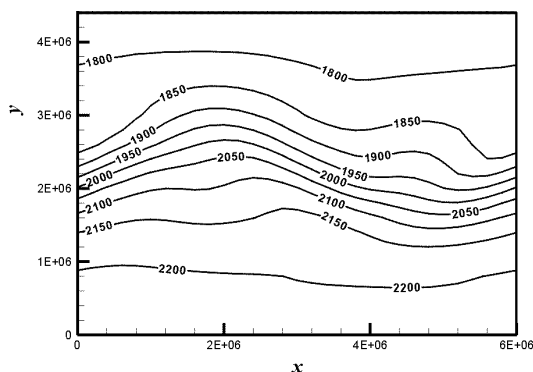
$$\Psi(x, y, t) = \Psi(x + L, y, t)$$

ولی در مرزهای شمالی و جنوبی هیچ گونه جرمی از ناحیه خارج نمی‌شود، یعنی داریم [معادله (۵)]:

$$v(x, 0, t) = v(x, D, t) = 0$$

تشریح نتایج حل عددی

شکل‌های (۲) و (۳) به ترتیب نشان‌دهنده تغییرات میدان اولیه ارتفاع نشان‌داده شده در شکل (۱) پس از انتگرال‌گیری ۲۴ و ۴۸ ساعته از معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم می‌باشند.



شکل ۲: پیش‌بینی ۲۴ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش فشرده. واحدها برحسب متر هستند.

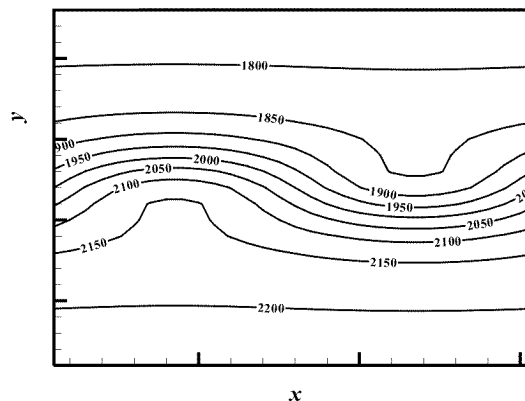
نقاط مرزی اعمال نمود و به همین دلیل از این پالاینده فقط در نقاط داخلی شبکه استفاده می‌شود. در مطالعه حاضر نیز برای حل معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم از این پالاینده برای حذف امواج مزاحم استفاده شده‌است. بهترین نتیجه هنگامی که این پالاینده در هر دو گام زمانی به صورت متناوب اعمال شد، به دست آمد.

نتایج

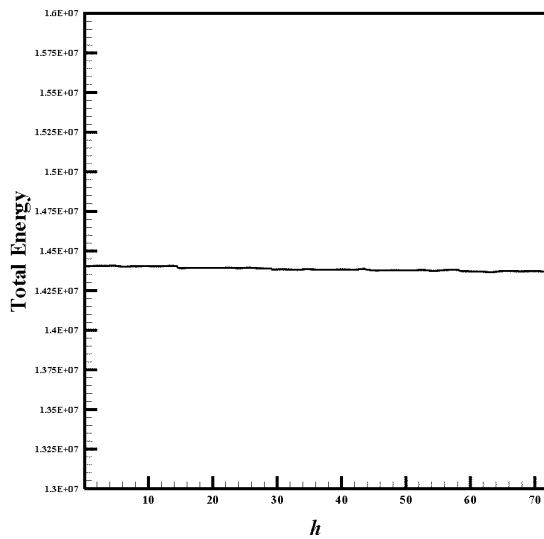
برای انتگرال‌گیری معادلات آب کم‌عمق در یک کانال با شرایط مرزی توضیح داده شده در ابتدای این مقاله نیاز است که مقادیر اولیه متغیرها در لحظه شروع انتگرال‌گیری معلوم باشند. این مقادیر را می‌بایست از روی مقادیر اندازه‌گیری شده توسط ایستگاه‌های هواشناسی به دست آورد، البته این مقادیر می‌بایست توسط فرایند آغازگری برای انتگرال‌گیری آماده شوند. ولی در اینجا از یک میدان اولیه تحلیلی [۱۶] برای به دست آوردن یک مینا برای مقایسه نتایج حاصله با نتایج سایر محققان، به صورت زیر استفاده می‌شود. مقدار اولیه برای میدان ارتفاع به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$h(x, y) = H_0 + H_1 \tanh \frac{9(D/2 - y)}{2D} + H_2 \sec^2 h^2 \frac{9(D/2 - y)}{2D} \sin \frac{2\pi y}{L} \quad (23)$$

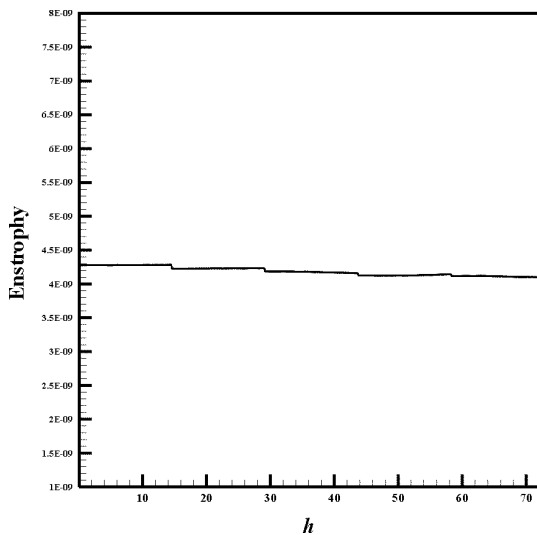
میدان شرایط اولیه ارتفاع در شکل (۱) نشان داده شده‌است.



شکل ۱: شرایط اولیه میدان ارتفاع h معادله (۲۳). واحدها همگی برحسب متر هستند.



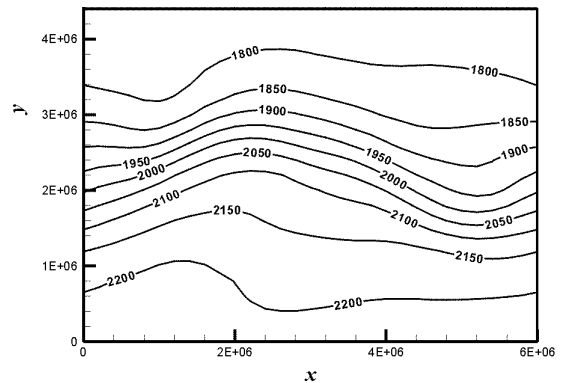
شکل ۵: تغییرات زمانی انرژی کل برای روش فشرده. واحد محور زمان برحسب ساعت و واحد محور انرژی کل به صورت نسبی می‌باشد.



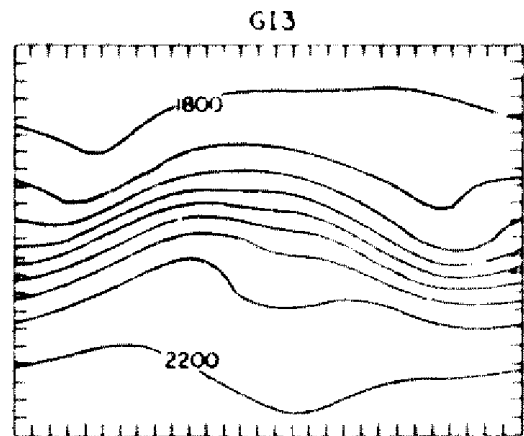
شکل ۶: تغییرات زمانی انستروفی برای روش فشرده. واحد محور زمان برحسب ساعت و واحد محور انستروفی به صورت نسبی می‌باشد.

بررسی دقت روش فشرده

در این بخش در نظر است تا در مورد دقت روش فشرده در مقایسه با روش مرتبه دوم مرکزی بحث شود، از آنجا که روش فشرده یک روش مرتبه چهارم است انتظار می‌رود که نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی دقیق‌تر عمل نماید. برای رسیدن به این منظور یک فضای هیلبرت شامل تمام بردارهایی که در شرایط زیر صدق کنند،



شکل ۳: پیش‌بینی ۴۸ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش فشرده. واحدها برحسب متر هستند.

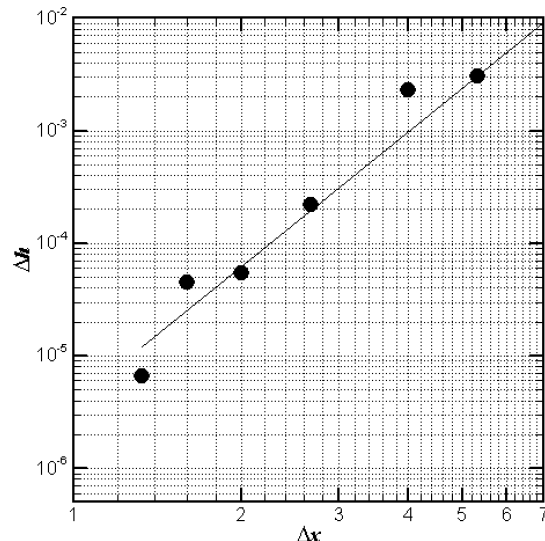


شکل ۴: پیش‌بینی ۴۸ ساعته میدان ارتفاع ارائه شده در مرجع [۱۶].

همه این جواب‌ها از فاصله شبکه‌ای برابر با 200 km استفاده شده و گام زمانی جهت انتگرال‌گیری با توجه به شرط پایداری [۶] برابر با 350 s انتخاب شده است. میان جواب‌های حاصل از روش فشرده و جواب‌های به دست آمده از روش مرتبه دوم مرکزی تهیه شده توسط نویسندگان و همچنین جواب‌های ارائه شده در مرجع [۱۶] که در شکل (۴) نمایش داده شده، تطابق خوبی برقرار است. شکل‌های (۵) و (۶) نیز تغییرات زمانی انرژی کل و انستروفی را پس از سه روز انتگرال‌گیری نشان می‌دهند. با توجه به این شکل‌ها می‌توان دریافت که این روش پایداری این دو کمیت را در طول انتگرال‌گیری به خوبی حفظ می‌نماید و در واقع ماهیت غیرخطی معادلات توسط روش عددی به کار برده شده به خوبی مدل گردیده است.

جدول ۱: خطای نسبی .

خطای نسبی	روش
1.423×10^{-3}	فشرده $\Delta x = \Delta y = 100 \text{ km}$
3.039×10^{-3}	فشرده $\Delta x = \Delta y = 200 \text{ km}$
2.317×10^{-3}	مرتب دوم $\Delta x = \Delta y = 100 \text{ km}$
4.601×10^{-3}	مرتب دوم $\Delta x = \Delta y = 200 \text{ km}$



شکل ۷: تغییر دقت ارتفاع یک نقطه معین در فواصل متفاوت شبکه‌ای برای حالت یک‌بعدی معادلات آب کم‌عمق (نقاط دایره‌ای). خط توپر نشان‌دهنده یک خط میان‌یابی شده بین نقاط با شیب چهار می‌باشد. واحدها برحسب متر هستند.

در مرحله بعد برای بررسی دقت و به‌دست آوردن مرتبه دقت روش فشرده یکی از نقاط شبکه را برای حالت یک‌بعدی معادلات آب کم‌عمق در نظر می‌گیریم. سپس برای روش فشرده مقادیر جواب مربوط به این نقطه را پس از مدت معینی انتگرال‌گیری در شبکه‌هایی با فواصل شبکه‌ای مختلف از درشت تا ریز به‌دست می‌آوریم. حال مقدار به‌دست آمده در ریزترین شبکه را به‌عنوان مبنا در نظر گرفته و اختلاف مقدار مربوط به این نقطه را در فاصله‌های شبکه‌ای درشت‌تر به‌دست می‌آوریم. حال می‌توان این مقادیر را برحسب فواصل شبکه‌ای در یک نمودار لگاریتمی رسم نمود، اگر روش مرتبه چهارم باشد این نقاط می‌بایست بر روی یک خط با شیب چهار در این منحنی قرار بگیرند. این واقعیت در شکل (۷) نشان داده شده‌است. در این نمودار یک خط با شیب چهار نیز از بین

تعریف می‌شود [۱۶، ۶].

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j} = \tilde{\mathbf{U}}_{i+N_x,j}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = (u, v, h)^T$$

و

$$v_{i,0} = v_{i,N_y}$$

در معادلات بالا فرض می‌شود که $i = 0, 1, \dots, N_x$ و $j = 0, 1, \dots, N_y$ برقرار باشد. یک نرم ناشی از ضرب داخلی هر دو بردار دلخواه \mathbf{a} و \mathbf{b} جهت آزمایش دقت روش تعریف می‌شود. شکل گسسته ضرب داخلی و نرم مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \left\{ \sum_{j=1}^{N_y-1} \mathbf{a}_{i,j}^T \mathbf{b}_{i,j} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{i,0}^T \mathbf{b}_{i,0} + \mathbf{a}_{i,N_y}^T \mathbf{b}_{i,N_y}) \right\}$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$$

(۲۴)

حال می‌توان با استفاده از رابطه زیر

$$\text{relative error} = \frac{\|\varepsilon\|}{\|\mathbf{U}_{50}\|}$$

(۲۵)

که در آن

$$\varepsilon = \mathbf{U} - \mathbf{U}_{50}$$

خطای نسبی (relative error) میان جواب دقیق و جواب تقریبی را به‌دست آورد. در رابطه بالا متغیر \mathbf{U} بیان‌کننده جواب تقریبی است و دقیق‌ترین جواب با متغیر \mathbf{U}_{50} که مربوط به جواب به‌دست آمده از روش فشرده در شبکه‌ای با فواصل شبکه‌ای 50 km در دو راستای محورهای مختصات می‌باشد، نشان داده می‌شود. حال می‌توان این خطای نسبی را برای روش فشرده مرتبه چهارم و همچنین روش مرتبه دوم مرکزی در شبکه‌هایی با فواصل شبکه‌ای متفاوت محاسبه نمود. جدول (۱) نتایج مربوط به خطای نسبی را پس از ۲۴ ساعت با گام زمانی 350 s نشان می‌دهد. این جدول دقت بالای روش فشرده را در مقایسه با روش مرتبه دوم به نمایش می‌گذارد و می‌توان دریافت که بهترین جواب مربوط به روش فشرده با فواصل شبکه‌ای 100 km می‌باشد.

یک پالاینده در طول مراحل انتگرال‌گیری به صورت متناوب استفاده شود. کمیت‌های ناوردای مدل مانند انستروپی و انرژی کل در طول انتگرال‌گیری عددی از معادلات بخوبی پایستگی خویش را حفظ می‌نمایند، این مطلب موید این حقیقت است که ماهیت غیرخطی معادلات با استفاده از روش عددی به کار رفته به درستی مدل شده‌است. اعتبار حل عددی ارائه شده با مقایسه جواب‌های حاصل با نتایج محققان قبلی سنجیده می‌شود. نتایج پاره‌ای از آزمایش‌های عددی به منظور نشان دادن دقت بالاتر روش فشرده در مقایسه با روش‌های سنتی، نیز ارائه شده‌است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از دانشگاه تهران و پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو به واسطه حمایت مالی از این کار تحقیقاتی تشکر می‌نمایند.

نقاط رسم گردیده است. قرارگیری این نقاط در امتداد این خط نشان‌دهنده این واقعیت است که روش مرتبه چهارم می‌باشد.

نتیجه‌گیری

حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق در صفحه β با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم ارائه شد. برای گسسته‌سازی زمانی معادلات از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ که نسبت به روابط پایه‌ای این روش از مزایای بیشتری برخوردار است، استفاده شده‌است. سپس برای گسسته‌سازی مکانی معادلات از روش فشرده مرتبه چهارم استفاده می‌شود. به دلیل به وجود آمدن خطای دگرنامیدن ناشی از اندرکنش ترم‌های غیرخطی موجود در معادلات با استفاده از اضافه‌نمودن عبارت‌های اتلافی به معادلات می‌توان بر این خطا غلبه نمود. آزمایش‌های عددی انجام گرفته نشان می‌دهند که نتایج بهتر برای غلبه بر این خطا هنگامی به دست می‌آیند که از

مراجع

- 1 - Numerov, B. V. (1924). "A method of extrapolation of perturbations." *Roy. Astron. Soc. Mon. Notice.*, Vol. 84, PP. 592-601.
- 2 - Fox, L. and Goodwin, E. T. (1949). "Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations." *Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys.*, Vol. 45, PP. 373-388.
- 3 - Kreiss, H. O. and Olinger, J. (1972). "Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations." *Tellus*, Vol. 24, PP. 199-215.
- 4 - Hirsch, S. R. (1975). "Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique." *J. Comput. Phys.*, Vol. 19, PP. 90-109.
- 5 - Lele, S. K. (1992). "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution." *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, PP. 16-42.
- 6 - Navon, I. M. and Riphagen H. A. (1979). "An implicit compact fourth-order algorithm for solving the shallow water equations in conservative-law form." *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 107, PP. 1107-1127.
- 7 - Beam, R. M. and Warming, R. F. (1978). "An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations." *AIAA J.*, Vol. 16, PP. 393-402.
- 8 - Beam, R. M. and Warming, R. F. (1976). "An implicit finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservative-law form." *J. Comput. Phys.*, Vol. 22, PP. 87-116.
- 9 - Douglas, J. Jr. and Gunn, J. E. (1964). "A general formulation of alternating direction methods." *Numer. Math.*, Vol. 6, PP. 428-453.

- 10 - Haltiner, G. J. and Williams, R. T. (1980). *Numerical prediction and dynamic meteorology*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- 11 - Houghton, D., Kasahara, A. and Washington, W. (1966). "Long-term integration of the barotropic equations by the Lax-Wendroff method." *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 94, PP. 141-150.
- 12 - Ciment, M. and Leventhal, S. H. (1975). "Higher order compact implicit schemes for the wave equation." *Math. Comput.*, Vol. 29, PP. 985-994.
- 13 - Adam, Y. (1977). "Highly accurate compact implicit methods and boundary conditions." *J. Comput. Phys.*, Vol. 24, PP. 10-22.
- 14 - Gustafsson, B., Kreiss, H. O. and Sundstrom, A. (1972). "Difference approximations to mixed initial boundary value problems II." *Math. Comput.*, Vol. 26, PP. 649-686.
- 15 - Wallington, C. E. (1962). "The use of smoothing or filtering operators in numerical forecasting." *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 88, PP. 473-484.
- 16 - Gustafsson, B. (1971). "An ADI method for solving the shallow water equations." *J. Comput. Phys.*, Vol. 7, PP. 239-253.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Interaction
 - 2 - Filter
 - 3 - Conservative
 - 4 - Vorticity
 - 5 - Aliasing error
 - 6 - Fluid Dynamics
 - 7 - Invariant
-