

پایدار سازی مود HG^1 در المان پنج وجهی اجزاء محدود

سهیل محمدی

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

کوروش کریمی زند

مریی گروه مهندسی نقشه برداری - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۰/۴/۱۸، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۳/۲/۱۲، تاریخ تصویب ۸۳/۳/۲)

چکیده

در این مقاله یک المان پایدار پنج وجهی با یک نقطه انتگرال گیری توسط پایدارسازی مود HG برای تحلیل ارتجاعی - خمیری همراه با تغییر شکلهای بزرگ، ارائه شده است. این نوع المان بویژه برای تحلیل پوسته سازه هائی مناسب است که دارای ترکهای متعدد بدون هیچ جهت از پیش تعیین شده ای می باشند، که این مسئله معمولاً در تحلیل ترک خوردگی پوسته های مرکب تحت اثر بارهای ضربه ای رخ می دهد. قانون مندی المان و مراحل کنترل پایدارسازی مود HG براساس روش متداول کرنش فرضی برای پایدارسازی المانها که قبلاً توسط Belytschko بیان گردیده بود، استوار می باشد. چندین آزمایش عددی، از خمش تیر ساده گرفته تا آنالیز شکست در صفحات لایه ای، برای ارزیابی المان فوق آورده شده اند.

واژه های کلیدی: المان پنج وجهی، پایدارسازی، مود ناپایداری HG ، موده های ناپایداری ساختگی

مقدمه

روش RI می شود، از ناپایداری آن جلوگیری نموده و بسادگی قابل برنامه ریزی می باشد. این روش بطور گسترده ای برای پایدارسازی موده های HG در المانهای دوبعدی چهار ضلعی، المانهای صفحه ای، المانهای پوسته ای و المانهای سه بعدی بکار برده شده است. اولین کوششها از این دست را می توان مربوط به Doherty در سال ۱۹۶۶ دانست که مولفه های برشی را که موجب پیدایش رفتار سخت شدگی در چهارضلعی های با انتگرال گیری کامل می شوند حذف نمود [۷]. اما این المانها برای اجسام تراکم ناپذیر رفتار خوبی را از خود نشان ندادند. متعاقباً Wilson در سال ۱۹۷۳ المانی را برای هم مواد تراکم پذیر و هم مواد تراکم ناپذیر، با افزودن نوعی موده های حبابی شکل دوبعدی ناسازگار، ابداع نمود [۱۹] که عدم توانائی این المان در ارضای آزمایش دسته المانها^۲ توسط Taylor در سال ۱۹۷۶ مرتفع گردید [۱۸]. یافتن این المانها بود که بعداً موجب پیدایش و توسعه ایده المانهای با کنترل پایداری مود HG گردید. در مقالات اولیه، Belytschko و همکارانش در طی سالهای ۱۹۸۱ الی ۱۹۸۶ [۵و۴] به بسط پیرامون المانهای انتگرال گیری کاهش یافته با بکارگیری

بدیهی است که انتگرال گیری کامل از نیروهای داخلی و ماتریس سختی در محاسبات به روش اجزای محدود در انواع معینی از مسائل با مشکلاتی مواجه می باشد. بعنوان مثال وقتی که ماده تقریباً غیرقابل تراکم است، قفل شدگی حجمی به چشم می خورد. بعلاوه این روش به انجام عملیات محاسباتی زیادی جهت ساختن ماتریس سختی المان و بدست آوردن نیروهای داخلی آن نیاز دارد. برای رفع این مشکل روشهای انتگرال گیری کاهش یافته (RI) معرفی شده بودند. بهرحال یکی از معایب بزرگ موجود در روشهای RI ، وجود یک ناپایداری در شبکه اجزاء محدود که اغلب به ناپایداری مود HG موسوم اند، می باشد. این ناپایداری مورد خاصی از پدیده ای موسوم به موده های سینماتیکی یا انرژی صفر مجازی می باشد که پس از فعال شدن بسرعت جوابها را از بین می برد. روش انتگرال گیری کاهش یافته انتخابی (SRI)، معایب روش RI را اصلاح نموده اما مزیت محاسباتی قابل ملاحظه ای را ارائه ننمود. اخیراً Belytschko یک روش انتگرال گیری کاهش یافته با کنترل ناپایداری HG را ارائه نموده است. این روش در عین آنکه موجب حفظ کارائی محاسباتی

روشهای کنترل پایداری مود HG پرداختند.

مراحل اصلی کنترل پایداری مود HG، با معرفی پارامترهای میرائی ساختگی و یا سختی ساختگی تدوین گردید [۱۷]. در این مطالعات، بردارهای ضدمود HG، γ که از شرایط اورتوگنال برای ایجاد سازگاری مودها با یکدیگر بدست آمده اند. نقش مهمی را در ایجاد یک ماتریس سختی پایداری و یک بردار نیروی اصلاح کننده که از ایجاد پدیده ناپایداری مود HG جلوگیری می نمایند، بازی می کنند.

متاسفانه مقادیر تنشهای تعمیم یافته متناظر، توسط پارامترهای کنترل پایداری مود HG داده شده توسط کاربر تعیین شده اند. بهرحال راه حلهای با شبکه های درشت مربوط به مسائل خمشی می توانند کاملاً به مقدار پارامتر پایداری حساس باشند. تاکنون این روش پایداری نتوانسته است کرنش های حجمی را حذف نماید، بنابراین برای مواد تراکم ناپذیر امکان دارد که با افزایش پارامتر پایداری، المان کاملاً سخت یا حتی قفل گردد. این امر در محدوده غیرخطی مواد یعنی جایی که مواد بسیار زیادی تقریباً تراکم ناپذیر می باشند از اهمیت ویژه ای برخوردار است [۲].

در سالهای بعد مساعی اندیشمندان بر روی تعیین مقدار پارامترهای کنترل مود HG متمرکز گردید. Belytschko و همکارانش [۱۵] ایده بکارگیری یک فرم تغییراتی از اصل سه میدانی Hu-Washizu را معرفی نمود، در حالیکه Liu و همکارانش [۱۱-۱۰] بکارگیری یک بسط تیلور از تغییرات کرنش را پیشنهاد نمود. در این روش میدان کرنش جهت حذف قفل شدگی حجمی تصویر شده است.

Belytschko [۲-۳] المانهای با انتگرال گیری کاهش یافته یکنواخت را توسط روش کرنش فرضی که بوسیله Simo و Hughes [۱۶] جهت ساختن یک میدان کرنش برای اجتناب از ایجاد پدیده قفل شدگی (برشی) معرفی شده بود، توسعه داد. آنها این المان را برای حل مسائل غیرخطی که در آن یک بردار نیروی گرهی اصلاحی اضافی لازم است (که در یک سیستم مختصات همسانگرد^۳ محاسبه می شود) بکار بردند. اما انتخاب یک فرمول براساس مختصات همسانگرد برای مسائل سه بعدی

کلی ساده نمی باشد [۲].

یک المان مکعبی هشت گرهی با قانون مندی مختلط^۴ برای آنالیز تغییرشکلهای بزرگ اخیراً توسط Li و Cescotto [۹] ابداع گردیده است که همان روش Belytschko و Bindeman [۲] را در آن بکار می برند و آزمایشات دسته المانها با کرنش های بزرگ نیز در مورد آن صادق بوده و پایداری و همگرایی شبکه را تضمین می نماید. این المان مرتبه صحیحی از ماتریسهای سختی را دارا می باشد بگونه ای که از ایجاد مودهای HG جلوگیری نماید. برای یک آنالیز سه بعدی کلی سازه ها، اغلب المانهای سه بعدی هشت گرهی بکار برده می شوند. اما در شرایط خاص سایر المانهای سه بعدی نیز ممکن است به نحو موثری بکار برده شود. بعنوان جانشینی برای المانهای پوسته ای مثلثی شکل بکار می روند. در اینجا المان پنج وجهی بعنوان یک بخش اساسی از الگوریتم ایجاد و رشد سیستماتیک ترک در داخل المانها می باشد که در یک آنالیز ترکیبی المانهای محدود - مجزای^۵ پیشرفته [۱۳] جهت بررسی چگونگی ایجاد، انتشار و اندرکنش ترکها و جداسدگی لایه ها در مواد مرکب ناشی از اعمال بارهای ضربه ای بکار رفته است [۱۴].

در ادامه، قانون مندی المان پنج وجهی با انتگرال گیری یک نقطه ای که بطور کلی براساس کار Belytschko و Bindeman [۲] و Li و Cescotto [۹] برای یک المان سه بعدی هشت گرهی می باشد، تشریح گردیده است.

چندین آزمون عددی از خمش ساده گرفته تا آنالیز شکست صفحات چندلایه، جهت نمایش عملکرد المان آورده شده است.

روابط اجزاء محدود و مودهای تغییر شکل

توابع شکل

شکل (۱) سه سیستم محورهای مختصات کلی، محلی و منحنی الخط را که در قانون مندی المان پنج وجهی لازمند، نشان می دهد. تمامی محاسبات در سیستم همسانگرد محلی انجام شده اند و سپس به بردارهای کلی برای به هنگام درآوردن مقادیر کلی بر طبق روش انتگرال گیری زمانی صریح تبدیل شده اند.

زیر بیان می گردد.

$$X_i = \sum_{A=1}^6 N_A X_{iA} \quad , \quad i=1,2,3 \quad (2)$$

که در آن :

$$x_i = (X_{iA})^T = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4}, X_{i5}, X_{i6})^T$$

بردار مختصات گرهی می باشد. می توان نشان داد که رابطه فوق بصورت زیر نیز قابل بیان می باشد:

$$X_i = (\mathbf{t}^T + \mathbf{I}_1^T \xi + \mathbf{I}_2^T \eta + \mathbf{I}_3^T \zeta + \mathbf{m}_1^T \xi \zeta + \mathbf{m}_2^T \eta \zeta) \mathbf{x}_i \quad (3)$$

که در آن :

$$\mathbf{t}^T = \frac{1}{2} [1, 0, 0, 1, 0, 0] \quad (4)$$

$$\mathbf{I}_1^T = \frac{1}{2} [-1, 1, 0, -1, 1, 0] \quad (5)$$

$$\mathbf{I}_2^T = \frac{1}{2} [-1, 0, 1, -1, 0, 1] \quad (6)$$

$$\mathbf{I}_3^T = \frac{1}{2} [-1, 0, 0, 1, 0, 0] \quad (7)$$

$$\mathbf{m}_1^T = \frac{1}{2} [1, -1, 0, -1, 1, 0] \quad (8)$$

$$\mathbf{m}_2^T = \frac{1}{2} [1, 0, -1, -1, 0, 1] \quad (9)$$

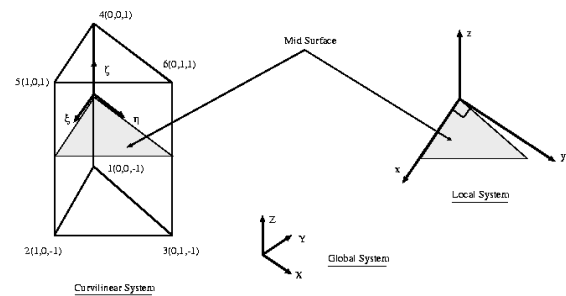
روابط سینماتیکی

تغییر مکانها

به روشی مشابه می توان بردار تغییر مکان \mathbf{u} را بصورت زیر محاسبه نمود :

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{t}^T + \mathbf{I}_1^T \xi + \mathbf{I}_2^T \eta + \mathbf{I}_3^T \zeta + \mathbf{m}_1^T \xi \zeta + \mathbf{m}_2^T \eta \zeta) \mathbf{d}_i \quad (10)$$

که در آن \mathbf{d}_i معرف بردار تغییر مکان گرهی می باشد. می توان درک بهتری از مفهوم فیزیکی این مودهای تغییر



شکل ۱: المان پنج وجهی، سیستم محورهای مختصات کلی، محلی و منحنی الخط.

توابع شکل اصلی توسط ضرب کردن توابع پایه یک المان سه گرهی در یک تابع مناسب در طول امتداد ζ بدست آمده اند.

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi - \eta)(1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 1, 4$$

$$N_i = \frac{1}{2} \xi (1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 2, 5$$

$$N_i = \frac{1}{2} \eta (1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 3, 6 \quad (1)$$

برای المانهای پنج وجهی کلی، آشکارترین الگوی انتگرال گیری، ترکیبی از یک آرایه مثلثی مناسب در دو بعد و یک توزیع گوسی در امتداد بعد سوم می باشد. برای المان شش گرهی مورد بحث در این مقاله، هر وجه مثلث فقط یک نقطه انتگرال گیری منفرد را برای ارزیابی حالتی کرنش ثابت آن لازم دارد. بهرحال با نادیده گرفتن مودهای ساختگی در طول ضخامت، یک مود ساختگی منطبق بر چرخش صفحه ای یک وجه مثلثی نسبت به وجه دیگر وجود دارد. بنابراین حداقل الگوی عملی نقاط انتگرال گیری برای این المان که از ایجاد مودهای ساختگی ممانعت بعمل می آورد یک الگوی 3×2 می باشد [۱۲]. از آنجائیکه بوضوح این تعداد نقاط از لحاظ اقتصادی در یک تحلیل دینامیکی صریح قابل قبول نمی باشد، بنابراین یک روش انتگرال گیری یک نقطه ای با پایداری سازی مود HG بکار گرفته شده است.

روابط هندسی

با انتخاب انترپولاسیون هم پارامتر^۶، موقعیت فضایی یک نقطه داده شده (ξ, η, ζ) از المان بصورت

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad (19)$$

و

$$\bar{\mathbf{h}}_\alpha^T \bar{\mathbf{h}}_\beta = 2\delta_{\alpha\beta} \quad (20)$$

که $\bar{\mathbf{h}}_\alpha$ معرف بردار مقادیر گرهی h_α می باشد :

$$\bar{\mathbf{h}}_\alpha^T = (h_{\alpha 1}, h_{\alpha 2}, h_{\alpha 3}, h_{\alpha 4}, h_{\alpha 5}, h_{\alpha 6}) \quad (21)$$

تانسور کرنش

با فرض اینکه کرنشهای کوچک، تقریبی عملی بوده، روابط کرنش - تغییر مکان بصورت زیر بیان می گردند:

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (22)$$

$$u_{i,j} = (\mathbf{b}_j^T + h_{\alpha,j} \gamma_\alpha^T) \mathbf{d}_i \quad (23)$$

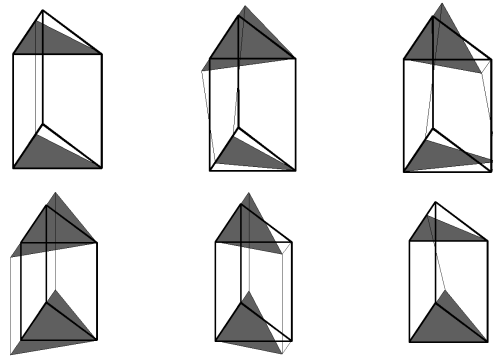
بنابراین ماتریس کرنش - تغییر مکان \mathbf{B} بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{3,1} + u_{1,3} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha 1} \gamma_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha 2} \gamma_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha 3} \gamma_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha 2} \gamma_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha 1} \gamma_\alpha^T & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha 3} \gamma_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha 2} \gamma_\alpha^T \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha 3} \gamma_\alpha^T & 0 & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha 1} \gamma_\alpha^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

و یا بصورت خلاصه :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_h = (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}_h) \mathbf{d} \quad (25)$$

شکل را از طریق شکل (۲) که در آن فقط تغییر شکل راستای محور X_1 مورد بررسی قرار گرفته است، ارائه داد. با جانشین نمودن محورهای فیزیکی بجای مختصات منحنی الخط در معادله (۳)، می توان ساختار مناسبتری را بدست آورد.

شکل ۲: مودهای تغییر شکل در امتداد محور X_1 .

$$u_i = (\mathbf{g}_o^T + x_j \mathbf{b}_j^T + h_\alpha \gamma_\alpha^T) \mathbf{d}_i \quad (11)$$

که در آن :

$$\mathbf{b}_j = N_j(\mathbf{O}) = \frac{\partial N}{\partial x_j}(\mathbf{O}) \quad (12)$$

$$\mathbf{g}_o = \mathbf{t} - (\mathbf{t}^T \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j \quad (13)$$

$$\gamma_\alpha = \mathbf{m}_\alpha - (\mathbf{m}_\alpha^T \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j \quad (14)$$

$$h_1 = \xi \zeta \quad (15)$$

$$h_2 = \eta \zeta \quad (16)$$

که $i, j = 1, 2, 3$ و $\alpha = 1, 2$ و قانون جمع کردن بر روی اندیسهای تکرار شده در مقاله موردنظر بوده است. شرایط تعامد که در پی می آید بسهولت قابل کنترل می باشند :

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{t} = \mathbf{b}_i^T \mathbf{m}_\alpha = 0 \quad (17)$$

$$\mathbf{t}^T \mathbf{m}_\alpha = \mathbf{m}_\alpha^T \mathbf{t} = 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_3} & \frac{\partial \eta}{\partial x_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

(۳۱)

بگونه ای که منجر به محاسبه مشتقات موده های HG میشود:

$$h_{1,i} = \zeta \mathbf{J}_{i2}^{-1} + \eta \mathbf{J}_{i3}^{-1}$$

(۳۲)

$$h_{2,i} = \zeta \mathbf{J}_{i1}^{-1} + \xi \mathbf{J}_{i3}^{-1}$$

(۳۳)

که \mathbf{J}_{ij}^{-1} مولفه ij از ماتریس عکس ژاکوبین \mathbf{J}^{-1} می باشد.

میدان کرنش فرضی و روند پایداری سازی

همانگونه که توسط Belytschko و Bindeman [۲] و بعدها توسط Li و Cescotto [۹] تاکید گردیده است، هرگاه معادله (۲۵) بعنوان میدان کرنش حاکم بکار رود، المان برای مواد تراکم ناپذیر قفل شده و دارای انرژی اضافی در مود برشی برای مسائل خمشی می باشد. برای جلوگیری از وقوع چنین وضعیتی، یک میدان کرنشی فرضی برای بخش غیر ثابت میدان کرنش بکار گرفته شده است.

میدان کرنش فرضی

ابتدا میدان کرنش مود HG به دو مولفه برشی و قائم تجزیه شده است.

$$\varepsilon_h = \varepsilon_h^n + \varepsilon_h^s$$

(۳۴)

که در آن جمله مولفه قائم نیز به دو بخش حجمی و انحراف آور تجزیه شده است.

$$\varepsilon_h^n = \varepsilon_h^d + \varepsilon_h^v$$

(۳۵)

با :

$$\varepsilon_h = \mathbf{B}_h \mathbf{d} = \mathbf{h} \Gamma \mathbf{d}$$

(۲۶)

که در آن $\bar{\mathbf{B}}$ بخش ثابت و \mathbf{B}_h بخش پایدار کننده مود HG از ماتریس B می باشد.

$$\mathbf{B}_h = \begin{bmatrix} h_{\alpha,1} \gamma_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & h_{\alpha,2} \gamma_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & h_{\alpha,3} \gamma_\alpha^T \\ h_{\alpha,2} \gamma_\alpha^T & h_{\alpha,1} \gamma_\alpha^T & 0 \\ 0 & h_{\alpha,3} \gamma_\alpha^T & h_{\alpha,2} \gamma_\alpha^T \\ h_{\alpha,3} \gamma_\alpha^T & 0 & h_{\alpha,1} \gamma_\alpha^T \end{bmatrix}$$

(۲۷)

و :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & 0 & h_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} & 0 & 0 & h_{2,3} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & 0 & h_{2,2} & h_{2,1} & 0 \\ 0 & h_{1,3} & h_{1,2} & 0 & h_{2,3} & h_{2,2} \\ h_{1,3} & 0 & h_{1,1} & h_{2,3} & 0 & h_{2,1} \end{bmatrix}$$

(۲۸)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

(۲۹)

جهت تعیین جملات $h_{\alpha,j}$ ، قانون زنجیره ای مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j}$$

(۳۰)

که لازم است تا ماتریس ژاکوبین تشکیل داده شود :

$$\beta_{12} = \frac{\min(x_{mean}, y_{mean})}{\max(x_{mean}, y_{mean})}$$

$$\beta_{23} = \frac{\min(y_{mean}, z_{mean})}{\max(y_{mean}, z_{mean})}$$

$$\beta_{13} = \frac{\min(x_{mean}, z_{mean})}{\max(x_{mean}, z_{mean})}$$

(۳۸)

که :

$$A_{mean} = \frac{1}{6} (|A_{15}| + |A_{24}| + |A_{26}| + |A_{35}| + |A_{16}| + |A_{34}|) \quad (39)$$

با $A_{ij}=A_i-A_j$ و $A=x,y,z$

برای مسائلی که خمش در آنها حاکم می باشند، هنگامیکه $\beta_{ij}=1$ بوده امکان وقوع قفل شدگی برشی وجود دارد، حال آنکه $\beta_{ij}=0$ مختص مسائل در محدوده پیچش بوده و در آنها فقط انرژی برشی پدید می آید. بنابراین معادلات (۳۷) و (۳۸) به تشریح میدان کرنشی که هم برای سازه های نازک و هم سازه های ضخیم، ممکن است رفتار خوبی را از خود نشان دهد، می پردازند که بدین ترتیب از وقوع پدیده قفل شدگی ناشی از مود HG برای تغییر شکلهای خمشی و پیچشی جلوگیری می گردد.

میدان کرنش HG می تواند بصورت زیر بیان گردد:

$$\epsilon_h = \epsilon_h^d + \epsilon_h^s \quad (40)$$

با بیانی مشابه برای مشتقات مود HG نظیر ،

$$(\epsilon_h = h\Gamma d)$$

$$h = h_d + h_s$$

(۴۱)

که در آن h و Γ در معادلات (۲۸) و (۲۹) تعریف شده اند و قسمتهای قائم، برشی و انحرافی h بصورت زیر تعریف می گردند :

بمنظور حذف قفل شدگی حجمی، میدان کرنش باید بگونه ای طرح شود که در مود HG جزء انبساطی^۷ میدان کرنش پیشنهادی در المان حذف گردد. از این رو بخش حجمی ϵ_h^v از مولفه قائم میدان کرنش HG ϵ_h^h نادیده گرفته شده است [۹ و ۲]. بررسی همسازی کرنشها با توابع شکل در یک الگوریتم کلی پایدارسازی مودهای HG به روش کرنشهای فرضی بصورت مشروح در مراجع [۹] و [۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است و در اینجا تکرار نمی گردد. بدین ترتیب ماتریس کرنش - تغییر مکان B_h^d بشکل زیر در می آید:

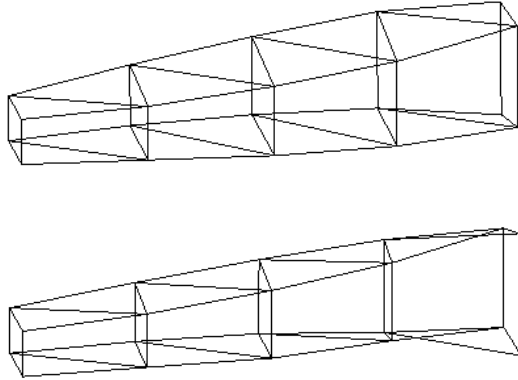
$$B_h^d = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2h_{\alpha,1}\gamma_{\alpha}^T & -h_{\alpha,2}\gamma_{\alpha}^T & -h_{\alpha,3}\gamma_{\alpha}^T \\ -h_{\alpha,1}\gamma_{\alpha}^T & 2h_{\alpha,2}\gamma_{\alpha}^T & -h_{\alpha,3}\gamma_{\alpha}^T \\ -h_{\alpha,1}\gamma_{\alpha}^T & -h_{\alpha,2}\gamma_{\alpha}^T & 2h_{\alpha,3}\gamma_{\alpha}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

برای بخش برشی، پارامترهای برشی جهت ممانعت از ایجاد مشکلات قفل شدگی برشی، بکار می روند:

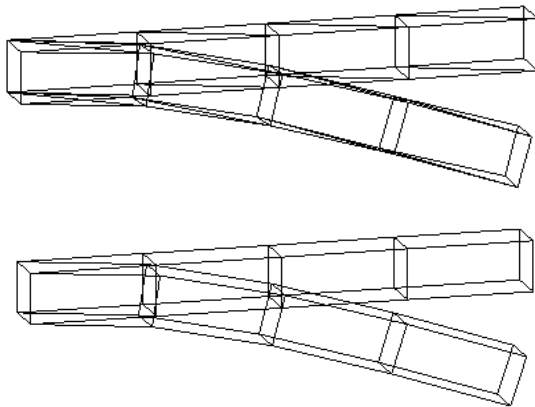
$$B_h^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12}h_{\alpha,2}\gamma_{\alpha}^T & \beta_{12}h_{\alpha,1}\gamma_{\alpha}^T & 0 \\ 0 & \beta_{23}h_{\alpha,3}\gamma_{\alpha}^T & \beta_{23}h_{\alpha,2}\gamma_{\alpha}^T \\ \beta_{13}h_{\alpha,3}\gamma_{\alpha}^T & 0 & \beta_{13}h_{\alpha,1}\gamma_{\alpha}^T \end{bmatrix} \quad (37)$$

پارامترهای β_{ij} می تواند از هندسه المان طبق قواعد زیر تعیین گردند:

در یک تیر خمشی در حالت ارتجاعی بگیرد، بیان شده است. رفتار ناپایدار المان بدون کنترل HG در شکل (۳) ترسیم شده است. المان در همان ابتدای آنالیز ناپایدار می گردد، اما با کنترل HG وضعیتی مشابه رفتار تحلیلی تیر بدست آمده است (شکل ۴).



شکل ۳: مودهای ناپایداری HG تیر کنسول.



شکل ۴: وضعیت تغییر شکل یافته تیر برای شبکه بندی های شش و هشت گرهی.

پوسته کروی

مشخصات هندسی و مادی این آزمایش استاندارد المانهای پوسته ای [۱۵] در شکل (۵) نمایش داده شده است. بار ناشی از فشار بطور قائم بر سطح المانها اعمال گردیده است و امتداد محور مختصات محلی و شدت بار وارده در طی آنالیز ثابت می باشند. بدون هیچگونه اعمال کنترلی بر پدیده ناپایداری HG آنالیز در مراحل اولیه با شکست مواجه می شود و مودهای HG بطور کامل نتایج ناشی از آنالیز را همانگونه

$$\mathbf{h}_n = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & 0 & h_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} & 0 & 0 & h_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{h}_d = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2h_{1,1} & -h_{1,2} & -h_{1,3} & 2h_{2,1} & -h_{2,2} & -h_{2,3} \\ -h_{1,1} & 2h_{1,2} & -h_{1,3} & -h_{2,1} & 2h_{2,2} & -h_{2,3} \\ -h_{1,1} & -h_{1,2} & 2h_{1,3} & -h_{2,1} & -h_{2,2} & 2h_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{h}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12}h_{1,2} & \beta_{12}h_{1,1} & 0 & \beta_{12}h_{2,2} & \beta_{12}h_{2,1} & 0 \\ 0 & \beta_{23}h_{1,3} & \beta_{23}h_{1,2} & 0 & \beta_{23}h_{2,3} & \beta_{23}h_{2,2} \\ \beta_{13}h_{1,3} & 0 & \beta_{13}h_{1,1} & \beta_{13}h_{2,3} & 0 & \beta_{13}h_{2,1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

همچنین

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{hg} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{d} \quad (45)$$

بعنوان کرنش HG تعمیم یافته تعریف می شود.

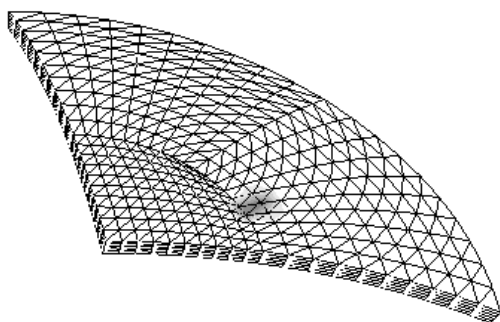
بررسی عددی

در این بخش به مرور برخی از نتایج آزمون جهت ارزیابی عملکرد این المان در رابطه با آنالیز دینامیکی صریح می پردازیم.

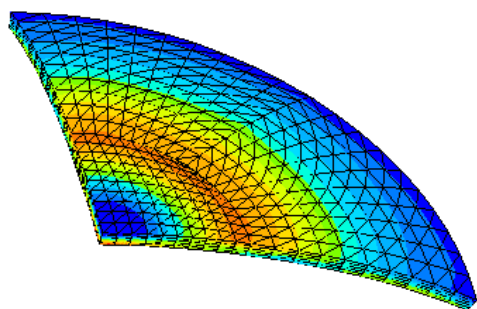
تیر یک سرگیردار

تیر یک سرگیرداری بطول 10 و مقطع مربعی 1×1 که تحت بار یکنواخت $525e5$ قرار دارد را در نظر می گیریم ($\rho = 7600, \nu = 0.1, E = 210e9$). این آزمون اساسی جهت ارائه یک دیدگاه ساده از اینکه چگونه یک المان پایدار می تواند جلوی ناپایداری HG را

نتایج تغییر شکل تاج پوسته برای یک المان مکعبی پایدار شده و المان پنج وجهی حاضر در شکل (۷) باهم مقایسه گردیده اند. منحنی مرجع از آنالیز بوسیله المانهای پوسته ای چهارضلعی براساس کار Belytschko [۶] بدست آمده است.



الف- عدم ایجاد تنش در حالت بدون پایداری سازی

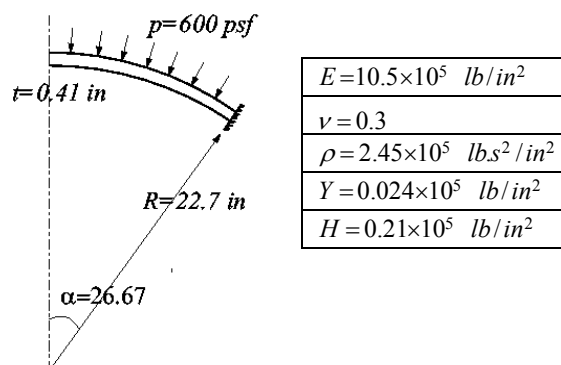


ب - توزیع تنش موثر در حالت پایداری سازی
شکل ۸: توزیع تنش موثر در پوسته کروی.

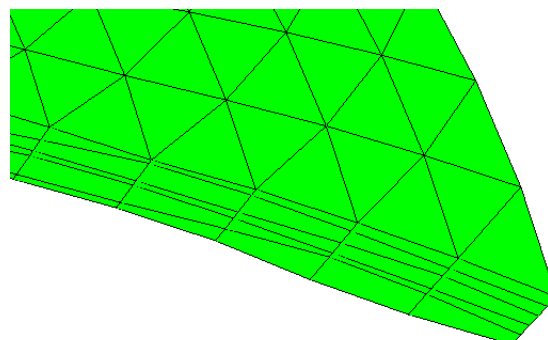
بارگذاری ضربه ای بر یک صفحه کامپوزیت

یک شبیه سازی عددی جهت مطالعه شکست و نحوه چگونگی رفتار جداشدگی لایه ها در یک صفحه مرکب چندلایه که به مرکز آن یک بار ضربه ای با سرعت زیاد وارد می گردد، بکار گرفته شده است. بار ضربه ای توسط یک بار مثلی که از مقدار صفر تا $2 \mu\text{sec}$ و با حداکثر نیروی 1 KN اعمال گردیده، شبیه سازی شده است. شکل (۹) و جدول (۱) هندسه صفحه مستطیلی، خواص مواد و سایر اطلاعات لازم را تشریح می نماید [۲۰].

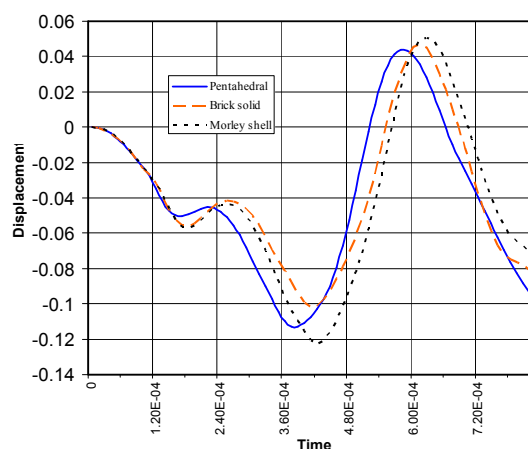
که در شکل (۶) آورده شده است، تخریب می نمایند. نتیجه مشابهی از عدم ایجاد تنش در حالت بدون پایداری سازی (شکل ۸- الف) در مقایسه باکنتر تنش در حالت پایدار (شکل ۸- ب) که بر روی شبکه اجزای محدود تغییر شکل یافته حاصل از بکار گیری روش کنترل HG ترسیم شده است دیده میشود.



شکل ۵: مشخصات هندسی و مکانیکی پوسته کروی.



شکل ۶: ناپایداری HG شبکه حاصل از پوسته کروی.

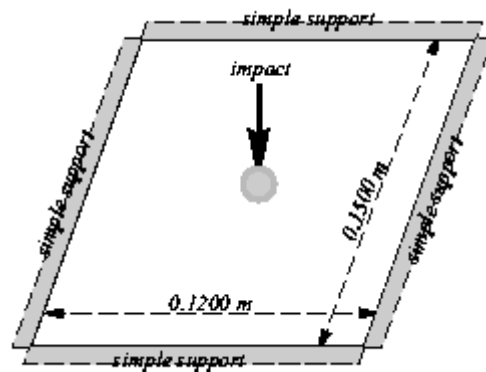


شکل ۷: تاریخچه تغییر مکان تاج پوسته کروی برای حلهای مختلف اجزاء محدود.

لایه ها از یکدیگر به هیچ ناحیه خاصی محدود نشده است. در لحظه شروع متجاوز از ۳۰۰۰۰ المان و ۲۵۰۰۰ گره برای مدل سازی روش اجزای محدود بکار رفته اند. شکل (۱۰) ناحیه ترک خورده از لایه های مختلف در دو مرحله متفاوت از بارگذاری را باهم مقایسه می نمایند. نواحی سایه خورده در این شکلها معرف محدوده ترک خورده از شبکه می باشند

نتیجه گیری

در این مقاله یک المان سه بعدی پنج وجهی با یک نقطه انتگرال گیری همراه با پایداری سازی HG برای آنالیز تغییر شکل، مواد جامد به روش ترکیبی المانهای محدود - مجزا ابداع شده است. قانون مندی المان و مرحله اعمال کنترل جهت پایداری سازی HG براساس روش کرنش فرضی می باشند. المان در تغییر شکلهای بزرگ و آنالیز غیرخطی رفتار خوبی را از خود نشان می دهد. این المان از نقطه نظر حجم عملیات محاسباتی، المان اقتصادی بوده و علیرغم این واقعیت که برای مدل نمودن یک سازه مشخص با المان ابداعی فوق در مقایسه با المان مکعبی، تعداد المانهای بکار گرفته شده دوبرابر می باشند، با این حال انجام محاسبات با این المان بسیار کارا خواهد بود. چندین آزمون عددی از آنالیز خمش یک تیر ساده گرفته تا آنالیز شکست در صفحات چندلایه انجام گردیده تا معرف نمایش عملکرد عالی این المان باشند



شکل ۹: صفحه مرکب تحت اثر بار ضربه ای.

جدول ۱: مشخصات مکانیکی صفحه.

ابعاد صفحه 0.1200×0.1500×0.00444 m	
$E_{xx} = 152.4 \times 10^3 \text{ MPa}$	$E_{yy} = 10.7 \times 10^3 \text{ MPa}$
$\nu = 0.3, \rho = 1.55 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$	$S = 132.8 \text{ MPa}$
$X_t = 2772 \text{ MPa}$	$X_c = 3100 \text{ MPa}$
$Y_t = 79.3 \text{ MPa}$	$Y_c = 231 \text{ MPa}$

الگوی کامپوزیت لایه ای بکار رفته در صفحه بصورت $[+45_n, -45_n, +45_n, -45_n, +45_n]$ می باشد. از آنجائیکه صفحه نامتقارن می باشد، لذا باید کل آن مدل گردد.

یک شبکه غیرمنظم متشکل از المانهای پنج وجهی برای مدل نمودن صفحه بکار برده شده است. یک شبکه سه المانی منظم در عرض ضخامت هر لایه بکار گرفته شده است. در این مثال، امکان شکست و جدا شدن

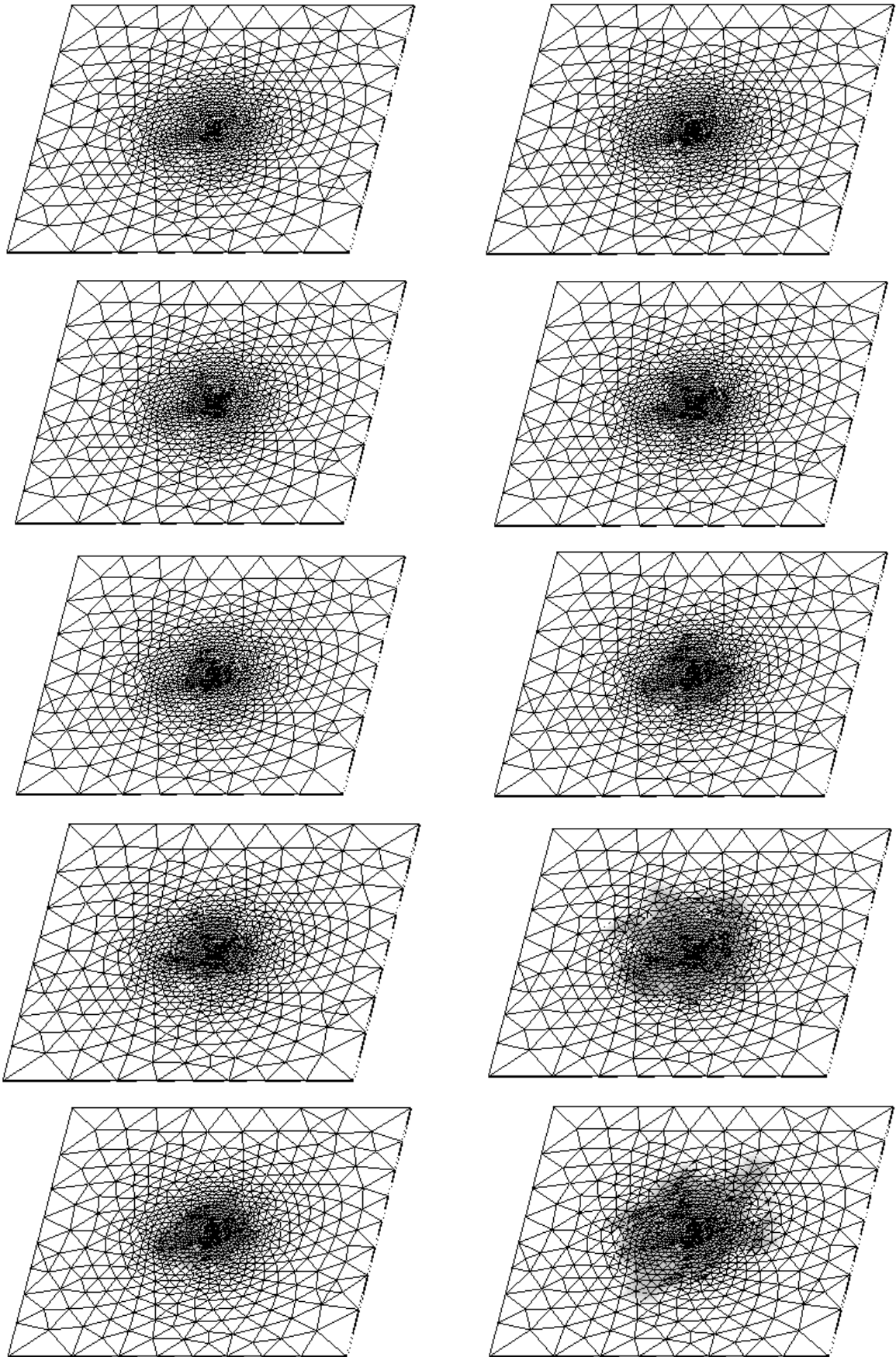
مراجع

- 1 – Belytschko, T. and Bachrach, W. E. (1986). "Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse mesh accuracy." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 54, PP. 279-301.
- 2 – Belytschko, T. and Bindeman, L. P. (1993). "Assumed strain stabilization of the 8-node hexahedral element." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 105, PP. 225-260.
- 3 – Belytschko, T. and Leviathan, I. (1994). "Physical stabilization of the 4-node shell element with one point quadrature." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, PP. 321-350.
- 4 – Belytschko, T. and Tsay, C. S. (1983). "A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature." *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, PP. 405-419.
- 5 – Belytschko, T., Ong, J., Liu, W. K. and Kennedy, J. M. (1984 b). "Hourglass control in linear and nonlinear problems." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 34, PP. 251-276.
- 6 – Belytschko, T., Wong, B. L. and Chiang, H. Y. (1992). "Advances in one-point quadrature shell element." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 96, PP. 93-107.

- 7 – Doherty, W. P., Wilson, E. L. and Taylor, R. L. (1962). “Stress analysis of axisymmetric solids utilizing higher order quadrilateral finite elements.” Tech. Rept. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley. SESM Rept. No. 69-3.
- 8 – Flangan, D. P. and Belytschko, T. (1981). “A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control.” *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, PP. 679-706.
- 9 – Li, K. P. and Cescotto, S. (1997). “An 8-node brick element with mixed formulation for large deformation analysis.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 141, PP. 157-204.
- 10 – Liu, W. K., Ong, J. S. J. and Uras, R. A. (1985 a). “Finite element stabilization matrices-a unification approach.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 53, PP. 13-46.
- 11 – Liu, W. K., Belytschko, T., Ong, J. S. J. and Law, S. E. (1985 b). “Use of stabilization matrices in nonlinear analysis.” *Engineering Computations*, Vol. 2, PP. 47-55.
- 12 – MacNeal, R.H.(1994). Finite elements: Their design and performance. Marcel Dekker Inc.
- 13 – Mohammadi, S. (2003). Discontinuum Mechanics by Finite and Discrete Elements. WIT Press.
- 14 – Mohammadi, S., Forouzan-sepehr, S., Asadollahi, A. (2002). “Contact based delamination and fracture analysis of composites.” *Thin –Walled Structures*. Vol.40, pp. 595-609.
- 15 – Owen, D. R. J. and Hinton, E. (1980). Finite elements in Plasticity. Theory and practice. Pineridge press.
- 16 – Simo, J. C. and Hughes, T. J. R. (1986). “On the variational foundations of assumed strain methods.” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, PP. 51-54.
- 17 – Stainier, L. and Ponthot, J. Ph. (1994). “An improved one-point integration method for large strain elastoplastic analysis.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 118, PP. 163-177.
- 18 – Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L. (1976). “A non-conforming element for stress analysis.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, PP. 1211-1219.
- 19 – Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. P. and Ghaboussi, J. (1973). “Incompatible displacement models.” Pages 43-58, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press.
- 20 – Worswick, M. J., Strazincky, P. V. and Majeed, O. (1995). “Dynamic fracture of fiber reinforced composite coupons.” Pages 29-41, *Dynamic Response and Behaviour of Composites*, ASME AD-Vol. 46.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 – Hourglass
- 2 - Patch
- 3 – Co-rotational
- 4 – Mixed Formulation
- 5 – Combined Finite/Discrete Element Method
- 6 – Isoparametric Interpolation
- 7 - Dilatation



شکل ۱۰: الگوهای شکست لایه‌ها در زمانهای $T = 1, 2 \mu\text{sec}$ (بر مبنای معیار هافمن).