

## فوتون جرم دار، حلقه اتصال بین تقارن همدیس و پیمانه‌ای در نظریه ویل-دیراک

صدیقه میرابوطالبی، فاطمه احمدی، سیما درویش پور، الهه فریدچهر

**چکیده:** در این مقاله به معرفی سازوکار برای تعیین جرم میدان های برداری در نظریه ویل-دیراک می پردازیم. این نظریه دارای تقارن های همدیس و پیمانه ای است. نشان می دهیم که در این نظریه فوتون های جرم دار عامل ایجاد ارتباط بین این تقارن ها می باشند. با شکستن این تقارن ها در مقیاس های بزرگ چارچوب همدیس ویژه ای را تعیین می کنیم که می توان در آن خصوصیات بزرگ مقیاس جهان کنونی را توصیف نمود. در این چارچوب جرم فوتون را تخمین می زنیم. در این مقاله با مطرح نمودن یک دیدگاه کلی از نظریه به هدف اصلی طرح مسئله یعنی تخمین جرم فوتون و تعیین ضریب جفت شدگی تقارن های همدیس و پیمانه ای نظریه می پردازیم. نشان می دهیم که این امر چگونه بدون نیاز به محاسبه دقیق و تعیین همه میدان ها و کمیات، به زیبایی و سادگی میسر است.

**واژه های کلیدی:** نظریه ویل-دیراک، تقارن همدیس، تقارن پیمانه ای، فوتون جرم دار، الکترومغناطیس و نظریه ی گرانش.

### ۱- مقدمه

استفاده از معادله اینشتین و اعمال شرایط مرزی مناسب کاملاً مشخص می شوند. بنابراین به نظر می رسد که نمی توان نظریه الکترومغناطیس را با همان هندسه ریمانی توصیف نمود.

در سال ۱۹۱۸ ویل در جهت حل این مسئله به تعمیم هندسه ریمانی پرداخت و هندسه نوینی را پیشنهاد نمود [۱-۲]. در این هندسه جدید درجه آزادی های بیشتری از هندسه ریمانی علاوه بر تانسور متریک به چشم می خورد بطوری که این امکان فراهم می شود که نظریه الکترومغناطیس نیز با ابزار هندسی توصیف شود. با پیدایش هندسه ویل این امید بوجود آمد که بتوان به وحدت نیروهای الکترومغناطیس و گرانش دست یافت.

با وجود انسجام و زیبایی بسیار، هندسه ویل در ابتدا اقبالی نیافت و مورد توجه فیزیک دانان قرار نگرفت. این امر به دلیل پیچیدگی نظریه و همچنین برخی تناقضات موجود در آن روی داد. در واقع در هندسه

نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی از این نظر که هر دو جزء نیروهای بلند برد هستند، شبیه یکدیگرند. نیروهای گرانشی را می توان با دیدگاهی هندسی با نسبیت عام توصیف نمود. ابزار نظریه نسبیت عام در توصیف پدیده های گرانشی هندسه ی ریمانی است. در این نظریه پتانسیل نیروی گرانش با تانسور متریک  $g_{\mu\nu}$  بیان می شود. برای آنکه بطور معادل نیرو های الکترومغناطیسی را نیز بطور هندسی توصیف نمود، باید ارتباط مشابه ای بین پتانسیل های الکترومغناطیسی و تانسور متریک برقرار شود. اما مؤلفه های متریک با

---

صدیقه میرابوطالبی: (استادیار)، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه دانشگاه آزاد واحد تهران-شمال، دربند، تهران  
فاطمه احمدی: (استادیار)، گروه فیزیک دانشکده علوم دانشگاه شهید رجایی، لویزان، تهران  
سیما درویش پور، الهه فریدچهر: دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک، دانشکده علوم پایه دانشگاه آزاد واحد تهران-شمال.

بروز می کند و بدون نیاز به انجام و محاسبه حل های دقیق نظریه، همانطور که در مقاله قبلی بدست آورده ایم، امکان پذیر است.

ساختار این مقاله بدین شرح می باشد:

ابتدا خلاصه ای از مبانی هندسه ویل ارائه می شود. توضیحات مفصل تر در این مورد را می توان در مراجع [۴-۲] یافت. سپس در بخش سوم ضمن معرفی نظریه ویل-دیراک آنرا از نظر تقارن های هم دیس و پیمانه ای مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم. در بخش چهارم به معرفی فاز شکست تقارن نظریه می پردازیم. این امر با وارد نمودن یک چشمه جرمی ثابت با واحد مشخص انجام می گردد. سپس با توجه به شرایط جهان از دیدگاه کیهان شناسی چارچوب ویژه ای را به عنوان چارچوب کیهان شناسی مشخص می کنیم. در بخش پنجم با اعمال ویژگی های مورد لزوم جهان در مقیاس بزرگ به تخمین جرم فوتون اختصاص می یابد.

سیستم واحدهای مورد استفاده سیستم واحدهایی است که غالباً در فیزیک ذرات بنیادی در نظر گرفته می شوند، و به صورت  $\hbar = c = 1$  تعریف می شود. همچنین علامت متریک به صورت  $(-, -, -, +)$  و علامت تانسور ریمانی به صورت  $R^{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda\mu, \nu} + \dots$  است [۵]. به منظور آسانی در نگارش مشتق هموردای میدان های اسکالر با زیر نویس مشخص می شود.

## ۲- هندسه ویل

در هندسه ریمانی فرض بر این است که در انتقال یک بردار  $\xi^{\gamma}$  جهت آن تغییر یابد. این تغییر به فرم دیفرانسیلی زیر بیان می شود:

$$d\xi^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} dx^{\beta} \xi^{\gamma} \quad (1)$$

که در آن  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  ضرایب الصاق و  $dx^{\beta}$  بردار جابه جایی مکانی  $\xi^{\gamma}$  است. در هندسه ویل فرض می شود که طول یک بردار علاوه بر جهت آن در انتقال موازی تغییر کند.

ویل مقیاس اندازه گیری طول عملاً در هر نقطه، از فضا-زمان به طور دلخواه تعیین می شود. این امر در تناقض با نظریه های موجود می باشد که مقیاس های اندازه گیری بطور مطلق و نه دلخواه، در هر نظریه شناخته شده فیزیک وارد می شود.

در سال ۱۹۷۳ دیراک مدل ویل را به منظور تصحیح نظریه اینشتین مورد استفاده قرار داد [۳]. هدف او در واقع تبیین نظریه گرانش جدیدی بود که با نظریه اعداد بزرگ او جور در آید. او نشان داد که در قالب هندسه ویل می توان فرض نمود که بازه های فضا-زمان که توسط دستگاه های اتمی اندازه گیری می شوند و متریکی که در معادله اینشتین وارد می شود مربوط به دو چارچوب هم دیس که بطور موضعی متفا وتند، می باشند. به این صورت که ضریب تبدیل بین این دو متریک تابعی از مختصات فضا-زمان است. دیراک با مطرح نمودن چنین تمایزی بین چارچوب های یاد شده توانست بطور سازنده ای با ایرادی که به هندسه ویل وارد بود برخورد کند.

علاوه بر آن دیراک مدل ویل را نسبت به حالت اولیه و خام آن ساده تر نمود و بر اساس آن یک نظریه اسکالر-تانسوری خلق کرد.

در اینجا بر این نکته تأکید می کنیم که مدل ویل-دیراک دارای ساختار زیبایی است و این امکان را فراهم می آورد که نظریه ی الکترومغناطیس در چارچوب یک نظریه ی گرانشی دارای تقارن های هم دیس و پیمانه ای مورد مطالعه قرار گیرد. یکی از نکات جالب توجه مدل ویل-دیراک جفت شدگی تقارن های هم دیس و پیمانه ای نظریه است. پارامتری که نقش مهمی را در این امر ایفا می کند جرم فوتون است. هدف ما در این مقاله ضمن معرفی نظریه به عنوان یک نظریه الکترومغناطیسی-گرانشی کار آمد، مطالعه و تحقیق بر روی جرم فوتون از دیدگاه ایجاد ارتباط بین تقارن های یاد شده است. به طور خاص ما به دنبال تعیین یک حد بالا برای جرم فوتون هستیم. تعیین این حد بالا در فاز شکست تقارن هم دیس نظریه

باید به این نکته دقت نمود که تانسور هندسی  $F_{\mu\nu}$  مشابه تانسور فیزیکی میدان ماکسول است. به طور متناظر میدان برداری  $k_\mu$  نیز می تواند بعنوان میدان فوتونی در نظر گرفته شود. همچنین تحت تبدیل های موضعی واحدها میدان برداری  $k_\mu$  مطابق (۴) تغییر می کند در حالیکه تانسور  $F_{\mu\nu}$  بدون تغییر باقی می ماند. این امر نشان می دهد که تبدیل پیمانه ای که در نظریه الکترومغناطیس مطرح است از تبدیل موضعی واحدها در هندسه ویل بدست می آید. در سراسر این مقاله میدان برداری  $k_\mu$  به عنوان میدان مربوط به یک فوتون در نظر گرفته می شود.

### ۳- مدل

کنش ویل-دیراک که به صورت زیر تعریف می شود را در نظر بگیرید [۳]:

$$S[\phi, k_\mu] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - R\phi^2 + \alpha \phi_{*\mu} \phi^{*\mu} \right\} \quad (۸)$$

که در آن  $\alpha$  یک پارامتر ثابت بدون بعد است.  $\phi_{*\mu}$  مشتق هم-هموردای میدان نرده ای  $\phi$  با مرتبه  $n=1$  است که به صورت زیر تعریف می شود<sup>۱</sup>:

$$\phi_{*\mu} = \phi_{,\mu} + k_{\mu} \phi \quad (۹)$$

و  $R^*$  نرده ای انحناء تعمیم یافته است که به صورت زیر داده شده است:

$$*R = R - 6k^{\mu}_{;\mu} + 6k_{\mu} k^{\mu} \quad (۱۱)$$

که در آن  $R$  نرده ای انحناء می باشد.

<sup>۱</sup> در هندسه ویل یک کمیت محلی (تابعی از نقاط متفاوت فضا-زمان)  $\psi$  در صورتی که تحت تبدیلات محلی واحدهای اندازه گیری بصورت  $\psi' = \Omega^n \psi$  تغییر کند یک هم-تانسور (co-tensor) از مرتبه  $n$  نامیده می شود. همچنین یک مشتق هم-هموردا (co-covariant) یک مشتق هموردای تعمیم یافته است و یک هم-تانسور می باشد و برای یک تابع  $S$  از مرتبه  $n$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$S_{*\mu} = S_{,\mu} - nk_{\mu} S \quad (۱۰)$$

در هندسه ویل مشابه رابطه (۱)، تغییر طول به صورت زیر تعریف می شود:

$$dl = l(dx^\beta k_\beta) \quad (۲)$$

که در آن  $l$  طول بردار  $\xi^\gamma$  و  $dl$  تغییر طول است. بطوری که بردارهای هموردای  $k_\beta$  نقشی مشابه ضرایب الصاق  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  بر عهده دارند. در هندسه ویل  $k_\beta$  و تانسور متریک  $g_{\mu\nu}$  کمیت های میدان هستند.

حال اجازه دهید یک استاندارد طولی را به طور دلخواه بر روی منیفلد تعریف کنیم. فرض کنید که این استاندارد بتواند با یک ضریب تبدیل همدیس که در حالت کلی تابعی از مختصات فضا-زمان است، تغییر کند. در این صورت چنانچه ضریب تبدیل همدیس مورد نظر را  $\Omega(x_\mu)$  بنامیم آنگاه طول  $l$  به طول  $l' = \Omega(x_\mu)l$  و طول  $l + dl$  به طول  $l' + dl'$  تبدیل می شود به طوری که:

$$dl' = l' k'_\mu dx^\mu, \quad (۳)$$

که در آن

$$k'_\mu = k_\mu + \beta_\mu \quad (۴)$$

و

$$\beta = \log(\Omega(x_\mu)) \quad (۵)$$

و  $\beta_\mu$  به صورت  $\frac{\partial \beta}{\partial x^\mu}$  تعریف شده است. با توجه به رابطه (۲) مشاهده می کنیم که

$$\oint dl = \oint l k_\mu dx^\mu = l F_{\mu\nu} \delta S^{\mu\nu} \quad (۶)$$

بطوری که:

$$F_{\mu\nu} = k_{\mu,\nu} - k_{\nu,\mu} \quad (۷)$$

و  $\delta S^{\mu\nu}$  المان سطح بینهایت کوچکی است، که توسط یک حلقه بینهایت کوچک در بر گرفته شده است. دقت می کنیم که صفر شدن تانسور هندسی  $F_{\mu\nu}$  شرط لازم و کافی است برای آنکه طول یک بردار در انتقال موازی در امتداد یک مسیر بسته تغییر پیدا نکند. به این ترتیب با صفر شدن  $F_{\mu\nu}$  هندسه ویل تبدیل به هندسه ریمانی می شود.

$$S_{\alpha=6}[\phi, k_{\mu}] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - R\phi^2 + 6\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} \right\} \quad (15)$$

در این کنش جمله‌ای که به طور صریح تابعی از  $k_{\mu}$  باشد و جمله‌ای مبین برهمکنش بین میدان نرده‌ای  $\phi$  و پتانسیل برداری  $k_{\mu}$  وجود ندارد. بنابراین این کنش تحت تبدیل پیمانه‌ای (۴) و تبدیلات هم‌مدیس (۱۳) و (۱۴) ناوردا است. در حالت خاص  $\alpha = 6$  که جرم فوتون ویل صفر است تقارن های هم‌مدیس و پیمانه ای بطور مستقل از یکدیگر برقرار هستند. بنابر این تنها در حضور فوتون جرم دار ( $\alpha \neq 6$ ) تقارن های هم‌مدیس و پیمانه به یکدیگر جفت هستند.

به منظور وارد نمودن میدان های مادی در نظریه، کنش مادی  $S_m$  را به کنش (۱۲) اضافه می‌کنیم. می‌توانیم فرض کنیم که  $S_m$  به طور معمول، تشکیل شده است از میدان های مادی که به گرانش جفت شده‌اند. با گرفتن وردش از کنش کل  $S_m + S[\phi, k_{\mu}]$  نسبت به  $g_{\mu\nu}$ ،  $\phi$  و  $k_{\mu}$  به ترتیب خواهیم داشت:

$$G_{\mu\nu} = -\phi^{-2} [T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}] \quad (16)$$

$$\alpha\phi^{,\mu} + R\phi - (\alpha - 6)\phi[k_{\mu}k^{\mu} - k^{,\mu}{}_{;\mu}] = 0 \quad (17)$$

$$-(F^{,\nu\mu})_{;\mu} + (\alpha - 6)(\phi^2 k^{\nu} + \phi\phi^{,\nu}) + J^{\nu} = 0 \quad (18)$$

در این معادله ها  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  تانسور اینشتین است و

$$T_{\mu\nu}[\phi] = (-2 + \frac{\alpha}{2})g_{\mu\nu}\phi^{\alpha}\phi_{,\alpha} + (2 - \alpha)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$$

$$-2g_{\mu\nu}\phi(\phi^{\alpha})_{;\alpha} + 2\phi\phi_{,\mu;\nu} \quad (19)$$

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} \quad (20)$$

$$\Theta_{\mu\nu} = (\alpha - 6)[\phi^2(-k_{\mu}k_{\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^{\alpha}k_{\alpha})] \quad (21)$$

و  $\Sigma_{\mu\nu}$  تانسور انرژی تکانه میدان های مادی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (22)$$

در کنش اولیه ویل جمله ای به صورت  $(R^*)^2$  وجود داشت که موجب پیچیدگی آن می‌گردید. دیراک جمله  $R\phi^2$  را جایگزین آن نمود که موجب ساده تر شدن مدل شد.

با استفاده از تعریف‌های (۱۰ و ۱۱) کنش (۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S[\phi, k_{\mu}] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - R\phi^2 + \alpha\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} + (\alpha - 6)\phi^2 k_{\mu}k^{\mu} + 2(\alpha - 6)\phi k^{\mu}\phi_{,\mu} + 6(\phi^2 k^{\mu})_{;\mu} \right\} \quad (12)$$

که در آن جمله آخر یعنی  $6(\phi^2 k^{\mu})_{;\mu}$  دیرانسیل کامل بوده و می‌تواند حذف شود.

باید به این نکته دقت نمود که کنش (۱۲) تحت تبدیل موضعی واحدها ناوردا است. در اینجا این نوع تبدیل به صورت ترکیبی از تبدیلات پیمانه ای تعریف شده در رابطه (۴) و تبدیلات هم‌مدیس به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x_{\mu})g_{\mu\nu} \quad (13)$$

$$\phi \rightarrow \Omega^{-1}(x_{\mu})\phi \quad (14)$$

مشاهده می‌کنیم که تبدیلات پیمانه ای بفرم (۴) به طور بنیادی با تبدیلات (۱۳ و ۱۴) مرتبط می‌باشد. به طور کلی این دو نوع تبدیل را نمی‌توان تبدیلات تقارنی مستقلی به حساب آورد. در اصل تبدیلات موضعی واحدها از این دو نوع تبدیل تشکیل شده‌است.

این امر حاوی نکته فیزیکی ظریفی در مورد فوتون ویل است. برای توضیح نقشی که در این مورد فوتون ویل بازی می‌کند، دقت می‌کنیم که جمله  $(\alpha - 6)\phi^2 k_{\mu}k^{\mu}$  در کنش (۱۲) در واقع جمله مربوط به جرم فوتون است. این جمله در حالت خاص  $\alpha = 6$  که کنش (۱۲) به صورت زیر در می‌آید ظاهر نمی‌شود:

$$G_{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{2} g_{\mu\nu} = -\phi^{-2} [T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}] \quad (28)$$

$$\alpha\phi^{\mu;\mu} + R\phi - (\alpha - 6)\phi[k_{\mu}k^{\mu} - k^{\mu;\mu}] + \mu^2\phi = 0 \quad (29)$$

و معادله (۱۸) بدون تغییر باقی می ماند. به این ترتیب معادله (۲۶) به صورت زیر در می آید:

$$\Sigma^{\mu}_{\mu} = \phi^2 \quad (30)$$

حال شکست تقارن اعمال شده را به صورت یک اثر کیهانی در نظر می گیریم. یعنی مقیاس طولی  $\mu^{-1}$  از درجه بزرگی شعاع جهان یعنی  $R_0$  و  $\Sigma^{\mu}_{\mu}$  را معادل چگالی انرژی متوسط ماده توزیع شده در مقیاس بزرگ، به صورت  $\Sigma^{\mu}_{\mu} \sim MR_0^{-3}$  فرض کنیم، که در آن  $M$  جرم جهان می باشد. با این انتخاب ها، از رابطه (۳۰) می توان مقدار زمینه ثابت زیر را برای میدان  $\phi$  بدست آورد:

$$\phi^{-2} \sim R_0^{-2} \left(\frac{M}{R_0^3}\right)^{-1} \sim \frac{R_0}{M} \sim G \quad (31)$$

که در آن  $G$  ثابت کوپلاژ نیوتن است و همچنین از رابطه تجربی  $\frac{GM}{R_0} \sim 1$  استفاده شده است. با قرار دادن این مقدار ثابت برای میدان  $\phi$  در معادله (۲۸) به نتیجه زیر می رسیم:

$$G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda \approx -8\pi G[T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}] + h_{\mu\nu} \quad (32)$$

$$h_{\mu\nu} = (\alpha - 6)(k_{\mu}k_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^{\alpha}k_{\alpha}) \quad (33)$$

به طوری که  $\Lambda = \frac{\mu^2}{2}$  عبارت است از یک ثابت کیهان شناسی مؤثر از درجه  $R_0^{-2}$  است. معادله (۱۸) نیز به صورت زیر در می آید:

$$-(F^{\nu\mu})_{;\mu} + \frac{(\alpha - 6)}{8\pi G}k^{\nu} + J^{\nu} = 0 \quad (34)$$

از معادله اخیر در حالت ( $\alpha \neq 6$ ) و در ناحیه خالی از جریان خواهیم داشت:

$$K^{\mu}_{;\mu} = 0 \quad (35)$$

همچنین معادله (۳۴) به صورت زیر در می آید:

و  $J^{\mu}$  بردار جریان به صورت زیر است:

$$J^{\mu} = \frac{\delta S_m}{\delta k_{\mu}} \quad (23)$$

استفاده از ناوردا بودن کنش کل  $S_m + S[\phi, k_{\mu}]$  تحت تبدیل مختصات و با اعمال معادله های میدان داریم:

$$\Sigma^{\mu}_{\mu} = 0 \quad (24)$$

این اتحاد را می توان به طور معادل از روابط (۱۶-۲۲) بدست آورد. رابطه (۲۴) نشان می دهد که  $\Sigma_{\mu\nu}$  یک تانسور انرژی تکانه بقادار است.

قانون بقا داشتن جریان با توجه به رابطه (۱۸) به صورت زیر در می آید:

$$(\alpha - 6)(\phi^2 k^{\mu} + \phi\phi^{\mu})_{;\mu} + J^{\mu}_{;\mu} = 0 \quad (25)$$

باید به این نکته دقت داشته باشیم که رابطه های (۱۶-۱۸) از یکدیگر مستقل نیستند. با گرفتن تریس از رابطه (۱۶) و استفاده از تعریف های (۱۹-۲۱) و مقایسه نتایج با (۱۷) و (۱۸) به رابطه زیر می رسیم:

$$\Sigma^{\mu}_{\mu} = g_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = 0 \quad (26)$$

رابطه اخیر به این معنی است که فقط میدان های مادی که دارای تانسور انرژی تکانه صفر هستند می توانند به طور سازگاری به نظریه جفت شوند. این امر ناشی از تقارن همدیس نظریه است.

#### ۴- شکستن تقارن همدیس

به منظور شکستن تقارن همدیس و در نظر گرفتن کنش مادی با تریس غیر صفر، می توانیم کنش به فرم زیر را به کنش کل اضافه کنیم:

$$-\frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-g} \mu^2 \phi^2 \quad (27)$$

که در آن  $\mu$  یک پارامتر جرمی ثابت است. در این حالت معادله های (۱۶) و (۱۷) به صورت زیر تغییر می کنند:

با ۳ درجه آزادی است. اما با فرض هلی تقارنی همسانگردی و همگنی تنها یک درجه آزادی باقی می‌ماند که آن هم به مختصه زمان بستگی می‌یابد. در اصل مؤلفه های تانسور میدان  $F_{\mu\nu}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F_{\mu\nu} = f(t)\varepsilon_{\mu\nu} \quad (39)$$

که در آن  $f(t)$  تابعی از زمان و  $\varepsilon_{\mu\nu}$  یک تانسور ثابت پاد متقارن است. با توجه به اینکه:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu \quad (40)$$

داریم:

$$f(t) = \partial_t k = \dot{k} \quad (41)$$

با

$$k_1 = k_2 = k_3 = k(t) \quad (40)$$

به طوری که علامت نقطه مشتق گیری نسبت به زمان است و به دلیل همگنی و همسانگردی مؤلفه صفرم پتانسیل برداری  $k_0$  تابعی از زمان شده است.

حال اجازه دهید که  $\Sigma_{\mu\nu}$  را به صورت یک مایع کامل بدون فشار با چگالی  $\rho$  در نظر بگیریم. با توجه به فرم گفته شده برای  $F_{\mu\nu}$  و با احتساب متریک فرید من-رابرتسون والکر:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (43)$$

که در آن  $a(t)$  تابعی دلخواه از زمان است، مؤلفه های زمانی و مکانی معادله (۳۶) به صورت زیر درمی آید:

$$k_0 = 0 \quad (44)$$

$$\dot{k} + Hk + \frac{(6-\alpha)}{8\pi G}k = 0 \quad (45)$$

در آن  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  پارامتر هابل است. همچنین رابطه (۳۸) به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{(\alpha-6)}{2} \frac{k^2}{a^2} + \dot{H} + 2H^2 + \frac{\Lambda}{3} = 0 \quad (46)$$

حال می‌توانیم از رابطه اخیر مقدار  $\alpha$  را تخمین بزنیم. در دوره کنونی از تحول جهان داریم  $H \sim H_0$  که در آن  $H_0$  مقدار کنونی ثابت هابل به صورت  $H_0 \sim \frac{1}{R_0}$

$$k^{\nu;\mu}{}_{;\mu} + R^\nu{}_\mu k^\mu + \frac{(6-\alpha)}{8\pi G}k^\nu = 0 \quad (36)$$

برای یک تانسور ریزی  $R_{\mu\nu}$  کوچک معادله (۳۶) معادله ی پروکا برای یک فوتون جرم دار است [۶]. اما با جمله  $R_{\mu\nu}$  معادله (۳۶)، همان معادله اینشتین-پروکا برای یک فوتون جرم دار خواهد شد [۷]. در واقع در چارچوب کیهان شناسی میدان برداری  $k_\mu$  شبیه یک میدان برداری فوتون جرم دار با جرم معادل

$$m^2_\gamma \approx \frac{(6-\alpha)}{8\pi G} \quad (37)$$

عمل می‌کند. متذکر می‌گردم که علامت جمله جرم فوتون در (۳۶) صحیح است، علامت متریک (۲-) است. همچنین معادله (۲۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$R - (\alpha-6)k_\mu k^\mu + 2\Lambda = 0 \quad (38)$$

باید به این نکته اشاره شود که منبع با بعد ماده استفاده شده برای شکستن تقارن همدیس به صورت یک ثابت کیهان شناسی ظاهر شده است. همچنین در چارچوب ارجح که با شرایط  $\phi^2 \sim G^{-1}$  و  $\mu^2 \sim \Lambda$  معین شده، ثابت جفت شدگی ماده کیهانی به گرانش مقدار درستی یافته است. همچنین میدان برداری  $k_\mu$  که در هندسه ویل کمیتی هندسی بحساب می‌آید به صورت یک میدان مزونی با جرم  $\sqrt{\frac{(6-\alpha)}{8\pi G}}$  ظاهر شده است. برای مقادیر اندک، از درجه بزرگی جرم فوتون، این میدان مزونی  $k_\mu$  از میدان مربوط به یک فوتون غیر قابل تمایز می‌شود. بخش آینده به تخمین این مقدار جرم با توجه به مشخصه های عالم در مقیاس بزرگ اختصاص می‌یابد.

### ۵- تخمین جرم فوتون

ابتدا اجازه دهید که فرض کنیم جهان در مقیاس های بزرگ همگن و همسانگرد است. دقت می‌کنیم که در فضا-زمانی با چنین فرض هایی میدان تانسوری  $F_{\mu\nu}$  شکل ساده ای می‌یابد. در واقع  $F_{\mu\nu}$  تانسوری پاد متقارن

هایزنبرگ در جهانی با عمر محدود [۸] و رابطه دوبروی که با در نظر گرفتن کیهان شناسی دوسیه بدست آمده [۹]، یاد نمود. همچنین مقدار تخمینی جرم فوتون بدست آمده با مقادیر تجربی آن سازگار است. بنابراین می توان گفت که مزون ویل در مدل مورد استفاده ما از یک میدان فوتونی قابل تفکیک نیست.

در چارچوب کیهان شناسی مشخص شده، پارامتر  $\alpha$  که ارتباط بین تقارن همدیس و پیمانه ای را در نظریه ویل-دیراک برقرار میسازد، را می توان تخمین زد. مقدار تقریبی آن با استفاده از رابطه (۴۸) و در واحد های قراردادی به صورت زیر است:

$$(6 - \alpha) \approx \frac{\hbar}{c^5} (8\pi G) \approx \frac{\hbar}{c^5} \left( \frac{8\pi G}{R_0^2} \right) \approx 2.5 \times 10^{-121} \quad (50)$$

این مقدار بسیار کوچک بر دو نکته فیزیکی اشاره دارد. اول آنکه نظریه ویل-دیراک با تقریب خوبی به نظریه اینشتین-ماکسول قابل تبدیل است. دوم آنکه تقارن های همدیس و پیمانه ای تقریباً از هم مجزا هستند.

## مراجع

- [1] Mirabotalebi S., Ahmad F., i, Gen. Relativ. Gravit., 40 و 2008, pp. 8192.
- [2] Wey H., A., *New Extension of Relativity Theory*, Ann. Phys. (Leipzig) 59, 1919, pp. 101.
- [3] Dirac P. A. M., Long Range Forces and Broken Symmetries, Proc. Roy. Soc. London A 333, 1973, pp. 403.
- [4] Adler, Bazin and Schiffer, *Introduction to General Relativity*, 1956.
- [5] Misner C. W., Thorne K. S. and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [6] Proca A. L., J. Phy. Radium 7, 1936, pp. 347.
- [7] Obukhov, Y.N., Vlachynsky, E. J.: Ann. Phys. 8, 1999, pp. 497510.

است [۴، ۵]. همچنین ثابت کیهان شناسی  $\Lambda$  را می توانیم به صورت  $\Lambda \sim \frac{1}{R_0^2}$  در نظر بگیریم. حال با استفاده از رابطه (۴۶) داریم:

$$k^2 \sim \frac{2a^2}{6 - \alpha} \Lambda \quad (47)$$

با قرار دادن (۴۷) در (۴۵)، داریم:

$$6 - \alpha \sim 8\pi G \Lambda \quad (48)$$

حال با توجه به معادله (۳۷) جرم فوتون به صورت  $\sqrt{\frac{(6 - \alpha)}{8\pi G}}$  داده شده که با استفاده از رابطه (۴۸) به صورت زیر در می آید:

$$m \sim \sqrt{\frac{(6 - \alpha)}{8\pi G}} \sim \sqrt{\Lambda} \sim \frac{1}{R_0} \quad (49)$$

رابطه اخیر نشان می دهد که در یک جهان نامحدود جرم فوتون صفر است. اما در یک جهان محدود میدان برداری  $k^\mu$  دارای جرم هرچند اندکی می شود. از این نظر این میدان برداری می تواند منسوب به یک فوتون باشد.

## ۶- نتیجه گیری

ما در این مقاله چارچوب همدیس ویژه ای را مشخص نمودیم که دربرگیرنده خواص ماده کیهانی موجود در یک جهان محدود است. در اینجا بر این نکته تأکید می کنیم که این مقاله از مقاله قبلی ما متفاوت می باشد [۱]. در این مقاله هدف ما در واقع تنها تخمین جرم فوتون و در نتیجه ثابت جفت شدگی  $\alpha$  که حلقه اتصال بین تقارن همدیس و پیمانه ای نظریه می باشد بوده است. در این رهیافت نیازی به بدست آوردن حل های دقیق از مسئله نیست و پلسخ ها بدون بستگی خاصی به جواب های دقیق بدست می آیند. از این نظر رهیافت مورد استفاده ارزشمند است.

مقدار جرمی که برای فوتون بدست آمده از همان درجه بزرگی است که از دیگر روش های نظری بدست آمده است. از جمله این روش ها می توان به روش عدم قطعیت

[8] Barrow J. D., Burman R. R, *New Light on Heavy Light*, Nature (London) 307, 1984, pp. 14.

[9] de Broglie, *Théorie Générale des Particules à Spin*, (Gauthier-Villars, Paris) 2nd. ed., 1954, pp. 190