

## تحلیل فوریه و پراکندگی مدها در محیط های بلوری متناوب خطی و غیر خطی

حسن فرخ پیام، مسعود ابراهیمی

**چکیده:** استفاده از تبدیل فوریه در محیط های متناوب مانند بلورها روش مناسب برای تعیین نوع و اندازه مربوط به مدهای موجود در یک بلور است. با بکارگیری این الگو می توان تأثیر میدان اعمال شده خارجی تک مد یا چند مد، در این نمونه از محیط ها را بررسی و تحلیل کرد. به کمک این روش می توان محاسبات را از فضای ابعاد به فضای عدد موج تغییر داد تا به سهولت، تأثیرات غیر خطی محیط مانند اثر کر را مطالعه کرد. حاصل برهم کنش بین میدان خارجی و محیط بلور در خروجی سامانه به صورت مدهای مقیاس شده منبع تحریک کننده خواهد بود. همچنین مدهای با دامنه کم ایجاد اثرات پاشندگی در محیط بلور را فراهم می سازند.

**واژه های کلیدی:** تبدیل فوریه، بلور متناوب خطی و بلور متناوب غیر خطی

### ۱- مقدمه

که در این رابطه  $n_0$  مقداری ثابت و  $\epsilon$  پارامتر اختلال است. در صورتی که  $n_0(X)$  متناوب باشد، جواب های معادله موج ماکسول، در معادله بلوخ-فلوکیت<sup>۴</sup> صدق می کند [۳]. اثرات غیر خطی محیط به صورت شدت میدان در ضریب شکست تأثیر می گذارد و با پارامتر اثر کر<sup>۵</sup> قابل بیان است. عامل غیر خطی با افزایش ورودی افزایش پیدا می کند و اثرات پراکندگی موج در محیط را به صورت  $\omega = \omega(k)$  بیان می شود. برای طراحی موجبر بلوری فوتونیکی<sup>۶</sup> مدل بندی سرعت گروه بسیار مفید است [۴-۵]. همچنین بررسی محفظه های فوتونی<sup>۷</sup> با افزایش ناخالصی در بلورهای فوتونی امکان پذیر می باشد [۶]. در تمامی موارد اشاره شده میزان حجم مؤثر مدها در محیط های بلوری از الکترونیک کوانتومی [۷] قابل محاسبه خواهد بود [۸]. عمل جفت شدگی مدها در یک بلور با به کارگیری فیبر نوک مخروطی<sup>۸</sup> و به کمک موجبر

مواد بلوری از نظر ساختار درونی و ترازهای انرژی دارای گاف انرژی<sup>۲</sup> ویژه هستند [۱]. خواص غیر خطی و متناوب بلورهای فوتونی<sup>۳</sup> با معادله موج ماکسول قابل مدل بندی و توصیف است [۲]. در حالت کلی ضریب شکست محیط تابع غیر خطی از مختصات مکانی است، عوامل دیگری نیز در آن دارای تأثیر گذار است. می توان این تأثیرات را به صورت توابعی از میدان الکتریکی نیز در نظر گرفت. برای توان دوم میدان الکتریکی، ضریب شکست به صورت  $n = n(x, |E|^2)$  است. بنابراین تأثیرات شدت میدان الکتریکی در ضریب شکست می تواند اثرات غیر خطی را برای محیط به دنبال داشته باشد. اثر کر، یکی از این موارد است. بنابراین می توان  $n$  را به این صورت نوشت:

$$n(x, |E|^2) = n_0 + \epsilon n_1(x) + \epsilon n_1(x) |E|^2$$

حسن فرخ پیام: (استادیار) عضو هیئت علمی دانشگاه، دانشگاه آزاد

اسلامی واحد تهران شمال

مسعود ابراهیمی: دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد

اسلامی واحد تهران شمال

<sup>4</sup> Bloch- Floquet

<sup>5</sup> Kerr

<sup>6</sup> Photonic Crystal Waveguide= PCWG

<sup>7</sup> Photonic Cavity=PC

<sup>8</sup> Fiber - taper

<sup>2</sup> Band Gap

<sup>3</sup> Photonic Crystal

(۳)

با جایگذاری معادله (۳) در (۲) و اعمال تبدیل فوریه در آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & -k_y^2 \varepsilon_{0x} - 2k_{0y} k_y \varepsilon_{0x} - k_{0y}^2 \varepsilon_{0x} \\ & -k_z^2 \varepsilon_{0x} - 2k_{0z} k_z \varepsilon_{0x} - k_{0z}^2 \varepsilon_{0x} + k_x k_z \varepsilon_{0y} \\ & + k_{0x} k_y \varepsilon_{0y} + k_{0y} k_x \varepsilon_{0y} + k_{0x} k_{0y} \varepsilon_{0y} \\ & + k_x k_z \varepsilon_{0y} + k_{0x} k_z \varepsilon_{0z} + k_{0z} k_x \varepsilon_{0z} \\ & + k_{0z} k_{0x} \varepsilon_{0z} = -\frac{w^2}{c^2} n(k_x, k_y, k_z) * \varepsilon_{0x} \end{aligned} \quad (۴)$$

در معادله (۴)،  $(\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z})$  تبدیل فوریه  $(E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$  است، که سه تایی اول تابع  $(k_x, k_y, k_z)$  و سه تایی دوم تابع  $(X, Y, Z)$  هستند، همچنین

$$n(k_x, k_y, k_z) * \varepsilon_{0x} = \int_k \{ n(k_x, k_y, k_z) \varepsilon_{0x} (k_x - K_x, k_y - K_y, k_z - K_z) \} dk_x dk_y dk_z \quad (۵)$$

رابطه (۵) انتگرال هم گردش<sup>۱</sup> در فضای سه بعدی است. برای محیطهای بلوری که حالت ذرات و چیدمان در آنها به صورت متناوب است، تابع  $n$  را طبق بسط فوریه می توان به صورت زیر نوشت:

$$n(x, y, z) = \sum_{m,n,l} C_{mnl} e^{i(mk_1x + nk_1y + lk_1z)} \quad (۶)$$

در رابطه (۶) داریم:

$$k_1 = \frac{2\pi}{a}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{b}, \quad k_3 = \frac{2\pi}{c}$$

که  $a$ ،  $b$  و  $c$  ثابت های شبکه بلوری هستند. با جایگذاری رابطه (۶) در (۴) و پس از مرتب نمودن آن خواهیم داشت:

نوری سیکلونی در محفظه تشدید نوری و محاسبه ضرایب مربوط به جذب و پاشندگی مدها انجام می گیرد [۹-۱۱].

روش مناسب دیگری که می توان برای تحلیل محیط های بلوری به کار برد، استفاده از خواص تبدیلات فوریه است. با تغییر فضای ساختاری مکان به فضای عدد موج می توان این تحلیل را انجام داد. در ساختار مختصات فضایی ضریب شکست محیط تابعی از متغیرهای مکانی به صورت،  $n(x, y, z)$  می باشد، در صورتی که در تحلیل فوریه این متغیرها تابعی بصورت  $n(k_x, k_y, k_z)$  بیان می شوند، که در این رابطه سه تایی  $(k_x, k_y, k_z)$  اعداد موج وابسته به مختصات  $(x, y, z)$  است، بنابراین هر نقطه در مختصات فضایی تبدیل به یک نقطه در فضای  $k$  خواهد شد. تبدیل فوریه یک تابع مانند  $n$  را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} & n(k_x, k_y, k_z) \\ & = \int_{\text{volume}} n(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} \end{aligned} \quad (۱)$$

رابطه (۱) در حجم بلور محاسبه می شود.

## ۲- تبدیل فوریه معادله موج در سه بعد

طبق معادله موج  $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$  در بلورهای فوتونی و با در نظر گرفتن مؤلفه  $X$  خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (n^2 E_x) \quad (۲)$$

عبارت (۲) یک معادله با مشتقات جزئی بر حسب مختصات مکانی است و ضریب شکست محیط تابع زمان نیست، لذا حل معادله بدون وابستگی  $n$  به زمان انجام خواهد گرفت. میدان  $\mathbf{E}$  را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_x E_{0x}(x, y, z) + \mathbf{e}_y E_{0y}(x, y, z) + \mathbf{e}_z E_{0z}(x, y, z)] * \exp[i(k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z)]$$

<sup>1</sup> Convolution Integral

$$\begin{aligned} & \left( -k_y^2 - 2k_{0y}k_y - k_{0y}^2 - k_z^2 - 2k_{0z}k_z - k_{0z}^2 + \frac{w^2}{c^2} \right) \varepsilon_{0x} + (k_x k_z + k_{0x} k_y + k_{0y} k_x + k_{0x} k_{0y}) \varepsilon_{0y} \\ & + (k_x k_z + k_{0x} k_z + k_{0z} k_x + k_{0z} k_{0x}) \varepsilon_{0z} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{m,n,l} C_{mnl} (k_x - m k_1, k_y - n k_2, k_z - l k_3) \end{aligned} \quad (7)$$

بررسی خود را معطوف بخش  $n_1(x)$  خواهیم کرد، هم‌چنین دامنه تپ‌ها را یک واحد فرض کرده‌ایم که می‌توان آن را نسبت به ضریب شکست محیط تغییر داد، و دامنه مدهای جدید در محیط را به دست آورد، بدون اینکه در محل مدها تغییری حاصل شود. با چنین آرایشی می‌توان شبیه‌سازی یک بعدی از محیط بلوری فراهم ساخت و سپس به سادگی و با تغییرات دلخواه در مقادیر  $W$  و  $d$ ، محیط‌های مختلف و آرایش‌های متنوعی را ایجاد نمود.

ساختار اصلی شکل (۱) با تپ‌های، اشاره شده است. در شکل (۲) طیف عدد موج مربوط به ساختار تپ، رسم شده است. در این شکل با افزایش عدد موج، دامنه طیف‌ها کاهش می‌یابد و بزرگترین دامنه مربوط به حالت  $k=0$  است. این نمودار بدون در نظر گرفتن فاز طیف‌ها رسم شده است و در واقع میزان عددی طیف، عدد موج است. محور عمودی مربوط به دامنه مدهای بلور است و برای مشخص شدن دامنه مدها و مقایسه بین هر مد با مدهای دیگر بین صفر تا ۱۴۰۰۰ واحد مندرج شده است. تبدیل فوری این دامنه‌ها متناسب با مقدار  $|\sin(kd/2)/(kd/2)|$  است.

در شکل (۳) فاصله بین تپ‌ها، چهار برابر شده است، اما میزان پهنای آن ثابت مانده است. در این طیف ملاحظه می‌کنیم که تعداد مدها نسبت به شکل (۲) افزایش یافته است و بلور می‌تواند تعداد مدهای بیشتری را در درون خود جفت کند. البته دامنه مدها نسبت به حالت اولیه کاسته شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برای جفت کردن مدهای بیشتر باید ضمن افزایش فاصله ذرات بلور، میزان ضریب شکست آن را نیز افزایش داد تا علاوه بر جفت شدن تعداد بیشتری مد، به توان دامنه مناسبی از هر

مشابه رابطه (۷) می‌توان برای مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  نیز معادلاتی به دست آورد.

با توجه به رابطه (۷) مشخص است که موج ورودی در داخل بلور مدوله شده و خروجی بصورت موج مدوله شده، خواهد بود. بنابراین مدهای مختلفی را در خروجی بلور بدست می‌آوریم. این مدها با آرایش سه تایی  $(m,n,l)$  در فضای سه بعدی قابل محاسبه است. میزان دامنه هر مد با ضریب  $C_{mnl}$  مشخص می‌شود، که مقدار آن بستگی با مد جفت شده در درون ساختار بلور تغییر خواهد کرد. هم‌چنین طبق رابطه (۷) میزان مدوله شدن موج ورودی با ساختار بلور رابطه مستقیم با نحوه آرایش ذرات درون بلور، اندازه ذرات، فواصل ذرات و جنس ذرات دارد.

به عنوان یک نمونه ساده اگر ضریب شکست  $n$  مقدار ثابت  $n_0$  باشد، حاصل مدولاسیون موج ورودی با بلور، فقط ورودی را در درون بلور جفت خواهد کرد، یعنی داریم:

$$n(k) * \varepsilon_{0x}(k) = n_0 \delta(k) * \varepsilon_{0x}(k) = n_0 \varepsilon_{0x}(k) \quad (8)$$

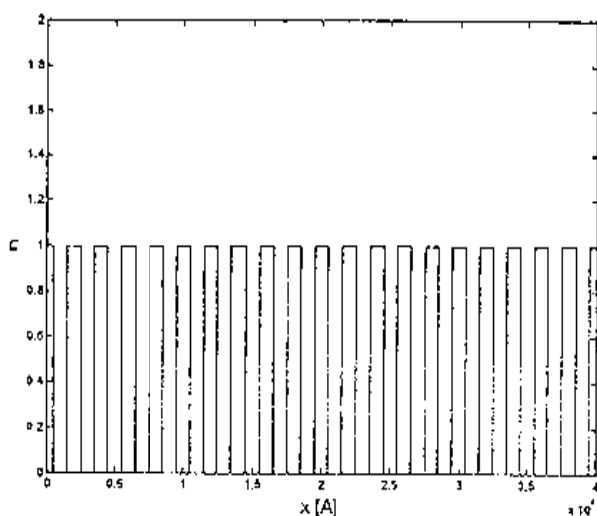
### ۳- بررسی محیط های بلوری با استفاده از

#### روش تبدیل فوری

برای بررسی روش تبدیل فوری حالت یک بعدی را در نظر می‌گیریم و ضریب شکست محیط را به صورت  $n(x) = n_0 + n_1(x)$  فرض کرده، که در آن  $n_0$  مقدار ثابت بوده و  $n_1(x)$  تپ‌های متغیر شکل (۱) است. بنابراین محیط را تپ‌هایی به تعداد ۲۰ و پهنای  $w=1$  و فواصل پالسی  $d=1$  واحد فرض می‌کنیم. برای تحلیل فوری مقدار  $n_0$  را در نظر نمی‌گیریم زیرا تحت این تبدیل یک مد به صورت  $n_0 \delta(k)$  در مبدأ مختصات ایجاد خواهد شد. لذا

نمودار در نقطه ۶۰۰۰ واحد دارای طیف جدیدی است. در بررسی دیگری، موج ورودی با تک مدی<sup>۲</sup> به صورت  $(\cos 100\pi x)$  در ساختار بلوری شکل (۱) جفت شده است. حاصل این جفت شدگی در شکل (۹) نشان داده شده است. در این نمودار مشخص است که حاصل ترکیب این تک مد در ماده بلوری مجموعه طیف های وسیع در حوزه (۰ تا ۳۵۰۰) با دامنه های مختلف خواهد بود.

در نمونه دیگر می توان موج ورودی را با مدهای مرکب<sup>۳</sup>  $(0, 20\pi, 40\pi, \dots, 200\pi)$  فرض کرده و حاصل جفت شدگی آن را با بلور (۱) در شکل (۱۰) مشاهده نمود، با توجه به یکسان بودن دامنه های امواج ورودی که همگی واحد هستند، مدهای جفت شده نیز دامنه های یکسانی خواهند داشت.



شکل ۱- ضریب شکست  $n$  به صورت تپ های با پهنای  $1=W$  واحد و فواصل تپ ها از هم  $d=1$  واحد است، اعداد، بهنجار شده بر ۸ انگستروم در نظر گرفته شده است.

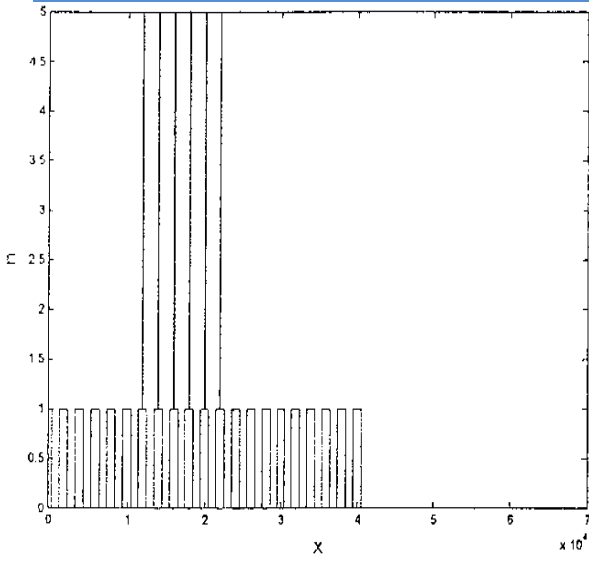
کدام را نیز بدست آورد. نتیجه مهم دیگری که می توان گرفت مربوط به موجبرهای نوری است. برای ایجاد ساختار موجبری می توان در یک منطقه از بلور فاصله ذرات را از هم زیاد کرده و اجازه داد در این ناحیه مدهای زیادتری جفت شوند. به عکس در مناطق دیگر بلور فواصل ذرات را کم نمود و اجازه جفت شدن مدها را در این ناحیه نداد، به این صورت در ساختار بلور موجبر نوری ایجاد می شود.

در شکل (۴) افزایش ناخالصی در ناحیه بلوری با پهنای تپ متفاوت ( $0/25 W$ ) بررسی و عمل افزایش به صورت ساختار مرکب<sup>۱</sup> انجام گرفته است. طیف عدد موج مربوط به این ساختار در شکل (۵) نمایش داده شده است. در این شکل مشخص است که مدهای جدید دیگر در قسمت های میانی هر گروه با دامنه قابل ملاحظه، ایجاد گردیده است. از این تحلیل در ریز محفظه ها و ساخت آن می توان استفاده کرد. شکل تپ (۶) نمونه هایی از تپ های غیر خطی شده را نشان می دهد، با این تپ ها می توان اثر کر را مشاهده کرد. موج جدیدی با تغییرات  $\sin^2(20\pi x)$  با عدد موج  $(20\pi)$  (نسبت به عدد موج تپ های اولیه) به تپ ساختار اولیه افزوده شده است، تا بخش مربوط به تغییرات غیر خطی اثر کر ایجاد گردد. طیف این اثر - در شکل (۷) قابل مشاهده است، این نوسانات در ساختار بلوری سبب ایجاد طیف های جدید با دامنه نسبتاً زیاد در گستره عدد موج می شود. نتیجه مهمی که از تأثیر خواص غیر خطی مواد است، ایجاد طیف های جدید در بلورها و استفاده از این مناطق برای جفت شدن مدهای جدید خواهد بود، همچنین در طراحی بلورها برای ایجاد طیف عدد موج های مورد نظر لازم است، عدد موج جمع یافته با پالس های ورودی تغییر یابد. این نمونه در شکل (۸) که تغییرات غیر خطی بلور با عدد موج  $50$  واحد انجام گرفته، نمایش داده شده است، ملاحظه می کنیم که

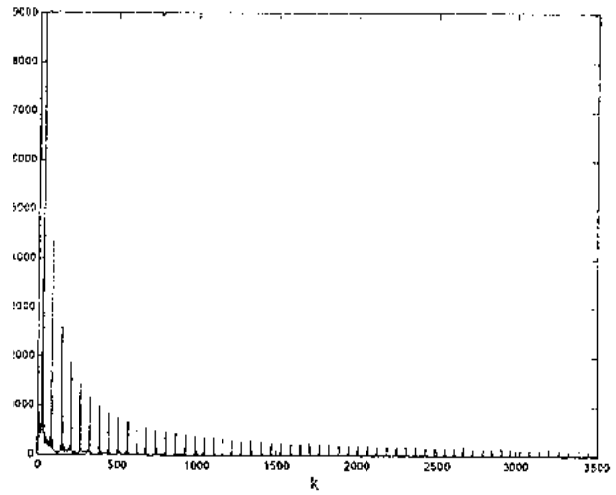
<sup>2</sup> Single Mode

<sup>3</sup> Multi Mode

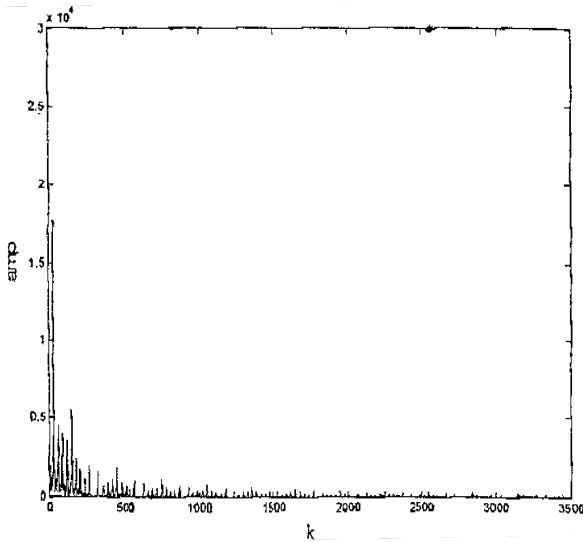
<sup>1</sup> Hetrostructure



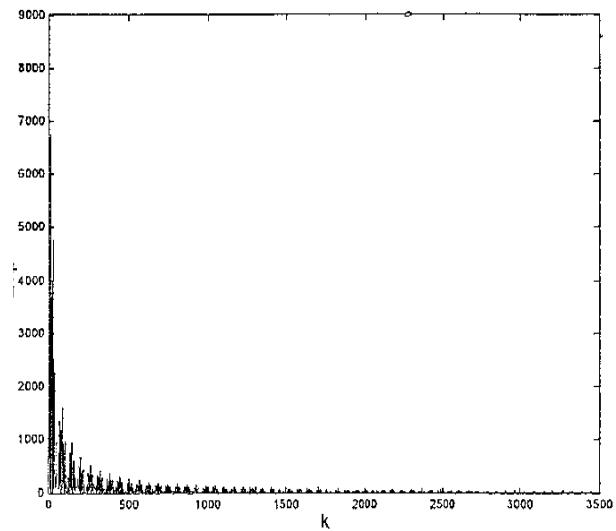
شکل ۴- افزایش ناخالصی در بخشی از تپ ها که با مقدار  $w=0.25$  ناخالصی افزوده شده است. محور افقی به بهنجار شده بر ۸ انگستروم در نظر گرفته شده است.



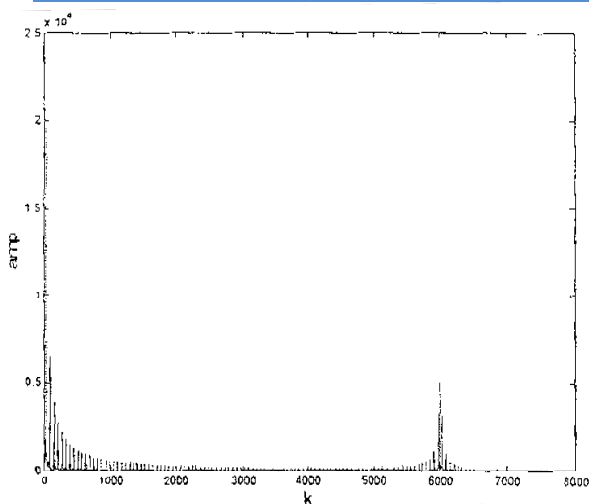
شکل ۲- طیف عدد موج مربوط به تپ های شکل (۱)، محور افقی مربوط به عدد موج و محور عمودی دامنه طیف ها است. محور افقی به  $10^6$  بهنجار شده است. واحد  $k$  عکس متر است.



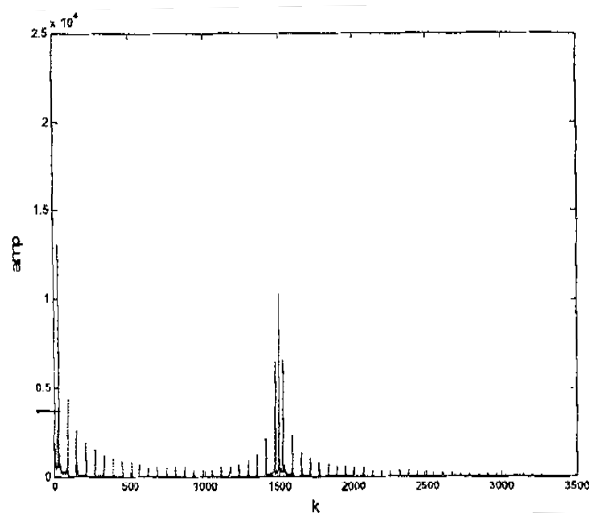
شکل ۵- طیف عدد موج مربوط به شکل، تعدادی مد جدید به طیف افزوده است. محور افقی به  $10^6$  بهنجار شده است. واحد  $K$  عکس متر است.



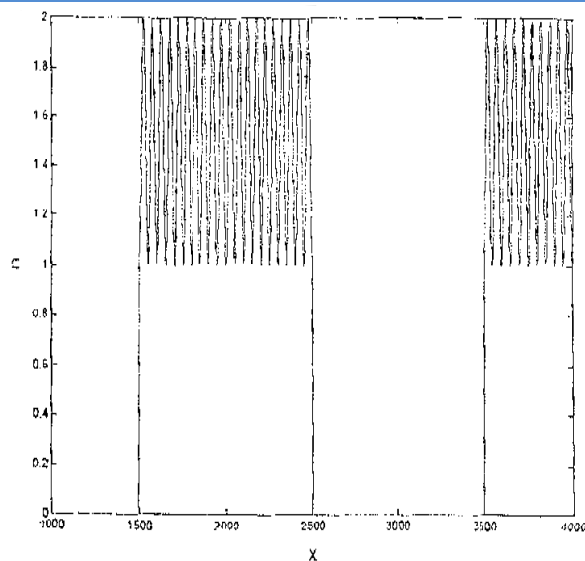
شکل ۳- طیف مربوط به تپ هایی که در آن  $w=1$  و  $d=1$  است، با افزایش فاصله تپ ها تعداد مدها افزایش یافته است. محور افقی به  $10^6$  بهنجار شده است. واحد  $K$  عکس متر است.



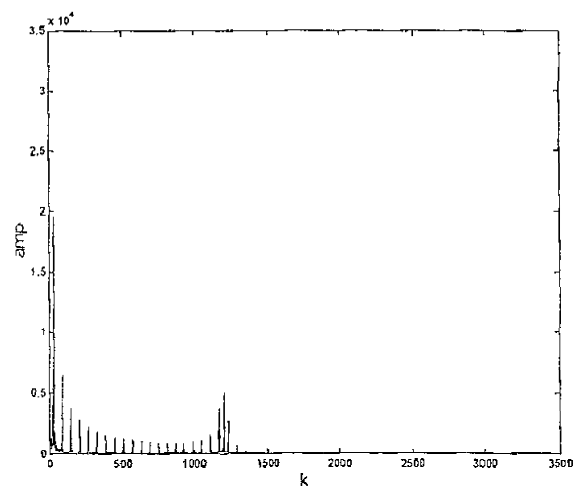
شکل ۸- طیف مربوط به اثر کر با تپ های غیر خطی شده  $\sin^2 20\pi x$ . محور افقی  $10^6$  بهنجار شده است. واحد K عکس متر است.



شکل ۹- طیف مدهای جفت شده در بلور شکل (۱) با موج ورودی  $\cos 100\pi x$ . محور افقی  $10^6$  بهنجار شده است. واحد K عکس متر است.

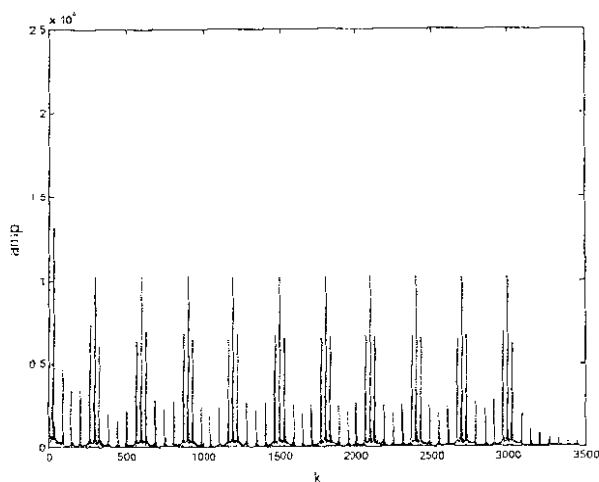


شکل ۶- افزایش ناخالصی بر تپ ها بصورت که مشخص کننده اثر کر می باشد. محور افقی به بهنجار شده بر  $10^6$  انگستروم در نظر گرفته شده است.



شکل ۷- طیف مربوط به اثر کر تپ های غیر خطی شده شکل (۶)، همراه با افزایش چند مد است. محور افقی  $10^6$  بهنجار شده است. واحد K عکس متر است.

مقدار مدهای جفت شده بیشتر می شود دامنه نسبت به حالت قبل کمتر می شود. اگر بخواهیم مدهای جفت شده را بیشتر کنیم ضریب شکست باید بیشتر شود. به عبارت دیگر مقدار مدهای جفت شده با ضریب شکست بلور متناسب است. از طرف دیگر با افزایش ضریب شکست دامنه مدها هم بیشتر می شود، می توانیم ساختار بلوری را به گونه ای تغییر داد تا بتوانیم از آن به عنوان یک موجبر نوری استفاده کنیم. برای تغییر ضریب شکست می توانیم از افزودن ناخالصی مناسب ساختار آن را به گونه ای تغییر دهیم که شرایط مناسب بوجود آید. شرایط رابط غیرخطی ویژگی های بلور و میدان الکتریکی سبب افزایش مدها خواهد شد.



شکل ۱۰- طیف مدهای جفت شده در بلور شکل (۱) با موج ورودی ترکیبی از اعداد موج ۰ و ۱۰ و ۲۰ و ... و ۱۰۰.

#### ۴- نتیجه گیری

طیف حاصل عدد موج نشان می دهد که، با افزایش عدد موج دامنه طیف ها کاهش پیدا می کند، هر چه

#### مراجع

- [1] John S., Toader O., and Busch K., *Photonic Bandgap Materials*, Third edition, Academic Press, 2002.
- [2] Kuchment P., *The mathematics of photonic crystal: In Mathematical modeling in optical sciences* SIAM, Philadelphia, 1999.
- [3] Kuchment P., *Floquet Theory for Partial Differential Operators* (Birkhauser, Basel), 1993.
- [4] Johnson S. G., *Photonic band structure*, MIT Lecture, 2003.
- [5] Sheriff J. L., *Coupled mode Theory in low-contrast Nonlinear Photonic crystal*, univ. Toronto, 2003.
- [6] Painter O. et al, Science 284, 1999.
- [7] Barclay P.E., Srinivasan K. and Painter O., J.OPT. Soc. Am., B 20(11), 2003, pp.2274.
- [8] Spillance S. M., T. J., Kippenberg O.J. Painter and Vahala K.J., Phys. Rev. let., 91 (4), 2003, pp.043902.
- [9] Barclay P.E., Srinivasan K.E., and O.J. Painter 2004 (available at <http://www.arxiv.org/abs/physics/0412002>)
- [10] Barclay P.E., Srinivasan K.E., Borselli, M. and Painter O., Opt. letter, 29(7), 2004, pp.697.
- [11] Srinivasan K.E., Barclay P.E., M. and O. Painter, Phys. Rev., B70, 081306, 2004.