ISME

# روش حجـم محـدود بهبـود یافتـه برپایـه مشخصه ها بـراي محاسـبه جریـان تـراکم ناپذیر لزج حول استوانه

سیداسماعیل رضوي[1]
استادیار

کامیار زمزمیان[2]
دانشجوي دکترا

*در مقاله حاضر روش جدیدي براي حل جریانهاي لزج تراکم ناپذیر ارائه شده است. تراکم پذیري مصنوعي با روش حجم محدود و روش زمانروي مورد استفاده قرار گرفته است. روش جدید پیشنهادي براي محاسبه بردارهاي شار جابجایي براساس بسط تیلور دو متغیره متغیرهاي اولیة جریان در مرز بین دو سلول حول مراکز سلول ها و محاسبه همزمان متغیرهاي جریان در تمام وجوه، با استفاده از حل یک دستگاه خطي است. پس از این مرحله، مقادیر به دست آمده از بسط تیلور دومتغیره داخل هر سلول با استفاده از معادلات گسسته شده مشخصه در جهت عمود بر مرز بین دو سلول، براي محاسبه جملات جابجایي مورد استفاده قرار مي گیرند. طرح پیشنهادي براي حل جریان هاي پایا و ناپایا حول استوانه دوبعدي مورد استفاده قرار گرفته و نتایج به دست آمده با داده هاي موجود در ادبیات فن و نتایج سایر روشهاي عددي مورد مقایسه قرار گرفته است که در محدوده اعداد رینولدز به کار رفته توافق خوبي بین آنها مشاهده مي شود. این نوع محاسبه شار در جریان حول استوانه باعث افزایش در اعداد CFL شده و همچنین باعث افزایش دقت در تسخیر گردابه ها شده است. از مزایاي این روش نسبت به روشهاي میانگین گیري معمولي و بالادست، همگرایي سریعتر و در نظر گرفتن تغییرات دوبعدي متغیرهاي جریان براي برآورد بردارهاي شار جابجایي است.*

*واژه هاي راهنما:* روش مشخصه ها، جریان تراکم ناپذیر، روش حجم محدود، معادلات تراکم پذیري مصنوعي، بسط تیلور دو متغیره، معادلات ناویر استوکس، استوانه دایروي.

## ۱- مقدمه

لوله هاي استوانه اي با سطح مقطع هاي مختلف به ویژه دایروي از جمله مواردي هستند که در صنایع مختلف کاربردهاي فراوان دارند. جریانهاي داخلي و خارجي در داخل و یا در اطراف استوانه هاي با سطح مقطع دایروي از جمله موارد مورد استفاده در صنعت مي باشند. استوانه هاي دایروي در مبدل هاي حرارتي، ژنراتورهاي برق و دستگاههاي ترمودینامیکي کاربرد دارند. آنها همچنین از جمله مهمترین عناصر بویلرها، توربین ها، کمپرسورها و کاربردهاي آیرودینامیکي هستند. مدلسازي عددي جریان صلیبي از روي یک استوانه همراه با انتقال حرارت توسط پژوهشگران مختلف با روش هاي مختلفي انجام شده و نتایج در ادبیات فن ارایه شده اند.

[1] نویسنده مسئول، استادیار، دانشگاه تبریز، دانشکده مهندسي مکانیک razavi@tabrizu.ac.ir
[2] عضوهیئت علمي، دانشگاه آزاداسلامي واحدتبریز، گروه مهندسي مکانیک، K_zamzamian@yahoo.com

در جريان صليبي از روي يک استوانه دايروي، با اعداد رينولدز پايين، لايه مرزي کاملا چسبيده به استوانه بوده و با افزايش عدد رينولدز جدايي لايه مرزي در بالا و پايين استوانه روي مي دهد. در اعداد رينولدز کمتر از ۴۰ جريان جدا شده پايا بوده و با زمان تغيير نمي کند. در گسترة اعداد رينولدز ۶۰ تا ۵۰۰۰ ناپايايي جريان خود را نشان مي دهد و گردابه هاي توليد شده در طرفين استوانه به تدريج از آن جدا شده و به پايين دست انتقال مي يابند. جدا شدن نوساني گردابه ها باعث تشکيل دنباله اي در پشت جسم مي شود که به خيابان گردابي فون کارمن موسوم است. مدلسازي هاي عددي متعددي در اين موضوع انجام شده و برنامه هاي کامپيوتري براي آن توسعه يافته اند. امروزه جريان لزج خارجي حول استوانه به عنوان يک تست موردي[3] براي سنجش کارآيي و دقت طرح هاي عددي به کار مي رود.

از جمله قديمي ترين کارهاي انجام شده براي حل جريان دو بعدي حول استوانه مي توان به Chang و Dennis [۱] و Fornberg [۲] اشاره کرد. روش ايشان بر اساس انتگرالگيري از معادلات جريان حالت پايا است و به ترتيب تا اعداد رينولدز ۱۰۰ و ۳۰۰ نتايج را به دست آورده اند. Wu و Lin [۳]و Braza و همکاران [۴]، روش حجم محدود با تصحيح تراکم پذيري مصنوعي را براي حل معادلات ناوير استوکس به کار بردند. Franke و همکاران[۵] مطالعه عددي براي مدلسازي تشکيل گردابه ها پشت استوانه دايروي در رژيم آرام را با استفاده از روش حجم محدود مرکز سلول انجام دادند. طرح محاسباتي مورد استفاده آنها روش بالادست مرتبه سوم QUICK مي باشد. Deng و همکاران [۶] جريان پايا تا Re=40 حول استوانه دوبعدي را با استفاده از يک روش جديد حجم محدود مورد تحليل قرار دادند. روش پيشنهادي آنها شامل بهبود شارهاي سرعت با استفاده از معادلات گسسته بقاي جرم و مومنتوم بود. Kwak و Kiris [۷] جريان ناپاياي تراکم ناپذير حول استوانه دايروي در عدد رينولدز ۲۰۰ را با استفاده از روش حجم محدود و گامهاي کسري مورد تحليل قرار دادند. طرح محاسباتي آنها براي گسسته سازي جملات جابجايي شامل تجزيه اختلاف شار[4] مرتبه بالا و براي جملات لزج به صورت گسسته سازي تفاضل مرکزي مرتبه دوم است. Mital و Kumar[۸] با روش المان محدود و تحليل پايداري خطي و انتگرالگيري زماني مستقيم از معادلات، تخميني براي عدد رينولدز بحراني حول استوانه دايره اي ارايه دادند. Oh و همکاران[۹] ، معادلات ناوير استوکس پايا را در يک شبکه بي سازمان متحرک براي مدلسازي جريان حول استوانه دايروي با روش حجم محدود گوشه سلول حل نمودند. الگوريتم حل عددي آنها برپايه انتگرالگيري زماني ضمني مرتبه دوم و بازه هاي زماني دوگانه است. براي محاسبه بردارهاي شار جابجايي از حلگر ريمن Roe استفاده شده است. Zienkiewicz و Nithiarasu [۱۰] جريان لزج تراکم ناپذير دوبعدي حول استوانه دايروي را با استفاده از يک نوع روش گامهاي کسري صريح و بدون نياز به حل دستگاه خطي، مورد تحليل قرار دادند. Mirzaee و همکاران[۱۱] ، روش جديدي در گسسته سازي زماني و محاسبه شارهاي لزجي براي حل جريان صليبي حول استوانه دايروي بکار بردند. بنا بر گزارش ايشان، روش ارائه شده توسط آنها قادر به پيشگويي جريان در اعداد رينولدز بسيار بالا تا ۱۰۱۰۰۰ مي باشد. Hu و Wu [۱۲] تاثير جريان لزج گذرنده از روي يک استوانه دايروي را مورد بررسي قرار دادند. کار آنها براساس روش حجم محدود در يک شبکه بي سازمان هوشمند است. گسسته سازي هاي

[3] Benchmark
[4] Flux Difference Splitting

زماني كاملا ضمني و نيمه ضمني براي معادلات مومنتوم به كار رفته و معادلات بر اساس تصحيح فشار با روش SIMPLE حل شده اند.

اخيراً براي حل معادلات ناويراستوكس تراكم ناپذير از الگوريتم هاي موجود براي جريان هاي تراكم پذير مانند: روش هاي فشار مبنا، روش تصويري[5]، روش گامهاي كسري[6]، تراكم پذيري مصنوعي استفاده مي شود. [۷،۸،۹ و ۱۰]طرح هاي محاسباتي شامل ميانگين گيري و طرح هاي محاسباتي بالادست براي گسسته سازي جملات جابجايي به كار مي رود. در اين مقاله روش جديدي بر اساس بسط تيلور دو متغيره براي محاسبه بردارهاي شار جابجايي در روش حجم محدود ارايه شده است. معادلات ناوير استوكس تراكم ناپذير همراه با تراكم پذيري مصنوعي كورين[7] و روش زمانروي، براي رسيدن به جوابهاي پايا و ناپايا در رژيم آرام مورد استفاده قرار گرفته است. مشتقات زماني با روش رانگ كوتاي مرتبه ۴ گسسته شده اند. اين روش براي محاسبه جريان هاي دو بعدي آرام پايا و ناپايا حول استوانه براي اعداد رينولدز بين ۱ تا ۱۵۰ به كار رفته و نتايج به دست آمده از آن با داده هاي موجود در ادبيات فن مقايسه شده اند.

## ۲- معادلات حاكم

معادلات بي بعد حاكم بر جريان تراكم ناپذير لزج به شكل انتگرالي و با استفاده از قضيه گرين عبارتند از:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{U}\,dS + \oint_{\partial S}(\mathbf{F}\,dy - \mathbf{G}\,dx) = \oint(\mathbf{R}\,dy - \mathbf{S}\,dx) \qquad (۱)$$

كه در آن:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta^2 u \\ u^2 + p \\ uv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \beta^2 v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

بردارهاي متغيرهاي اوليه و شارهاي جابجايي در جهت هاي x و y هستند. بردارهاي شار لزج عبارتند از:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

---

[5] Projection
[6] Fractional Step
[7] Chorin

در روابط ۲، پارامتر $\beta$ ضريب تراكم پذيري مصنوعي كورين بوده و براي كوپل كردن معادله پيوستگي به معادلات مومنتوم اضافه شده است. با افزودن جملة $\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}$ معادلات ماهيت هذلولوي- سهموي پيدا مي كنند. گسترة تغييرات $\beta$ بين ۰/۱ تا ۱۰ است.

## ۳- توليد شبكه

شبكه O شكل حول استوانه دايروي، به صورت جبري توليد شده و با ريز كردن شبكه نزديک جسم جامد مورد استفاده قرار گرفته است. از آنجاييكه هندسه مورد نظر استوانه دايروي است، شبكه جبري توليد شده ماهيتاً متعامد مي باشد. شبكه هاي مختلفي با ابعاد $130\times130, 110\times110, 80\times80$ مورد استفاده قرار گرفته است و استقلال جوابها از شبكه در ابعاد $110\times110$ امكان پذير شده است. در شكل (۱) قسمتي از شبكه محاسباتي توليد شده نشان داده شده است. مرز خارجي دور در فاصلة بيست برابر قطر استوانه از آن قرار گرفته است.

## ۴- محاسبه بردارهاي شار جابجايي

براي گسسته سازي معادله (۱) و اعمال روش حجم محدود، جمله دوم از سمت چپ معادله مانند زير گسسته مي شود :

$$\oint_{ABCD}(\mathbf{F}dy-\mathbf{G}dx)\approx\sum_{k=1}^{4}(\mathbf{F}_k\Delta y_k-\mathbf{G}_k\Delta x_k) \qquad (۴)$$

كه در آن ABCD نشانگر چهار ضلعي سلول در شكل (۲) است. براي محاسبه رابطه (۴) نياز به محاسبه بردارهاي جابجايي $F, G$ در روي وجوه سلول مي باشد. طرح هاي محاسباتي گوناگوني براي محاسبه بردارهاي شار جابجايي در مرز دو سلول موجود است. در اين مقاله، براي محاسبه شارهاي جابجايي عبوري از وجوه هر سلول، روش جديدي براساس بسط تيلور دو متغيره پارامترهاي جريان در روي وجه حول مركز سلول و استفاده از معادلات مشخصه در جهت عمود بر مرز بين دو سلول، ارايه مي شود كه تغييرات متغيرهاي اوليه جريان به گونة خطي در نظر گرفته مي شود. مشتقات مرتبه اول به وجود آمده از بسط تيلور با استفاده از انتگرال خطي پيرامون هر سلول به مقادير پارامترهاي جريان روي وجه مربوطه مرتبط شده و از آنجا دستگاهي از مقادير مجهول در روي وجوه سلول نتيجه مي شود. با حل اين دستگاه، مقادير مجهول پارامترهاي جريان در روي مرزها براي يک سلول محاسبه مي شوند. با انجام عمليات مشابه براي سلول هاي مجاور، در هر سلول تقريبي براي متغيرهاي جريان در روي وجوه آن سلول براساس تغييرات دومتغيره متغيرهاي مذكور در داخل سلول به دست مي آيد. مقادير به دست آمده براي وجوه هر سلول با استفاده از معادلات گسسته شده مشخصه در جهت عمود بر مرز بين دو سلول براي محاسبه بردارهاي شار جابجايي مورد استفاده قرار مي گيرند. تعداد معادلات نوشته شده براي هر سلول ۴ معادله و براساس مقادير سلول هاي مجاور است. اگر $\phi$ نشانگر يكي از متغيرهاي اوليه جريان مانند $u$، $v$ يا $p$ باشد، براي وجه ۱ از سلول i,j داريم :

$$\phi_1 = \phi_{ij} + (x_1 - x_{ij})\frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{ij} + (y_1 - y_{ij})\frac{\partial \phi}{\partial y}\bigg|_{ij} + \ldots \qquad (۵)$$

پانویس ۱ مربوط به وجه شماره ۱ در شکل (۲) مي باشد. با استفاده از قضيه گرين، براي گراديان هاي مرتبه اول در مركز سلول داريم :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{ij} &= \frac{1}{S}\oint \phi\, dy = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{4}(\phi\,\Delta y)_k \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}\bigg|_{ij} &= -\frac{1}{S}\oint \phi\, dx = -\frac{1}{S}\sum_{k=1}^{4}(\phi\,\Delta x)_k \end{aligned} \qquad (۶)$$

در روابط بالا S مساحت سلول ABCD در شكل (۲) است. با جاگذاري روابط (۶) در (۵) داريم :

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi_{ij} &+ \frac{1}{S}(x_1 - x_{ij})\left[\phi_1(\Delta y)_1 + \phi_2(\Delta y)_2 + \phi_3(\Delta y)_3 + \phi_4(\Delta y)_4\right] \\ &- \frac{1}{S}(y_1 - y_{ij})\left[\phi_1(\Delta x)_1 + \phi_2(\Delta x)_2 + \phi_3(\Delta x)_3 + \phi_4(\Delta x)_4\right] \end{aligned} \qquad (۷)$$

كه پانويس هاي ۱ الي ۴ متناظر با وجوه سلول مي باشند. با مرتب سازي ضرايب داريم :

$$A_1\,\phi_1 + B_1\,\phi_2 + C_1\,\phi_3 + D_1\,\phi_4 = \phi_{ij} \qquad (۸)$$

كه در آن ضرايب معلوم عبارتند از :

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{1}{S}(x_1 - x_{ij})(\Delta y)_1 + \frac{1}{S}(y_1 - y_{ij})(\Delta x)_1 \\ B_1 &= -\frac{1}{S}(x_1 - x_{ij})(\Delta y)_2 + \frac{1}{S}(y_1 - y_{ij})(\Delta x)_2 \\ C_1 &= -\frac{1}{S}(x_1 - x_{ij})(\Delta y)_3 + \frac{1}{S}(y_1 - y_{ij})(\Delta x)_3 \\ D_1 &= -\frac{1}{S}(x_1 - x_{ij})(\Delta y)_4 + \frac{1}{S}(y_1 - y_{ij})(\Delta x)_4 \end{aligned} \qquad (۹)$$

با نوشتن روابطي مشابه (۴) براي ساير وجوه سلول، دستگاه معادلات زير به دست مي آيند :

$$\begin{cases} A_1\,\phi_1 + B_1\,\phi_2 + C_1\,\phi_3 + D_1\,\phi_4 = \phi_{ij} \\ A_2\,\phi_1 + B_2\,\phi_2 + C_2\,\phi_3 + D_2\,\phi_4 = \phi_{ij} \\ A_3\,\phi_1 + B_3\,\phi_2 + C_3\,\phi_3 + D_3\,\phi_4 = \phi_{ij} \\ A_4\,\phi_1 + B_4\,\phi_2 + C_4\,\phi_3 + D_4\,\phi_4 = \phi_{ij} \end{cases} \qquad (۱۰)$$

دترمينان ضرايب دستگاه معادلات (۱۰) همواره مخالف صفر بوده و از اينرو جوابهاي يكتايي براي مقادير $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ موجود است. ضرايب ثابت در معادلات (۱۰) از روابط مشابه (۹) براي ساير وجوه بدست مي آيد. با استفاده از اين روش در هر سلول و براي هر كدام از وجوه آن، با حل دستگاه معادلات به دست آمده از بسط تيلور دو متغيره، مقداري براي پارامترهاي جريان به دست مي آيد.

به عنوان مثال مقدار به دست آمده براي $\phi$ از سلول ij را $\phi^{L}_{i+1/2,j}$ و مقدار به دست آمده از سلول i+1,j را $\phi^{R}_{i+1/2,j}$ مي ناميم. براي محاسبه مقدار $\phi$ در مرز مشترک بين سلول هاي ij و i+1,j (شکل ۲) معادلات مشخصه به دست آمده در جهت عمود بر مرز بين دو سلول را به کار مي بريم. روابط سازگاري براي معادلات تراکم پذيري مصنوعي، در جهت عمود بر مرز بين دو سلول به صورت زير مي باشند [۱۳] :

$$\begin{cases} dq_n - \dfrac{1}{2\beta^2}\left[q_n - \sqrt{q_n^2 + \dfrac{4\beta^2}{\rho}}\right]dp = 0, \qquad along \quad \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(q_n + \sqrt{q_n^2 + \dfrac{4\beta^2}{\rho}}\right) \\ dq_n - \dfrac{1}{2\beta^2}\left[q_n + \sqrt{q_n^2 + \dfrac{4\beta^2}{\rho}}\right]dp = 0, \qquad along \quad \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(q_n - \sqrt{q_n^2 + \dfrac{4\beta^2}{\rho}}\right) \end{cases} \quad (۱۱)$$

که در آن $q_n$ مولفه بردار سرعت در جهت عمود بر مرز بين دو سلول و $x_n$ جهت عمود بر آن مرز است. با توجه به ماهيت فروصوتي جريان، همواره يکي از مسيرهاي مشخصه از پايين دست به سمت بالادست جريان خواهد بود. با گسسته سازي معادلات (۱۱) بين مرز سلول و مقادير به دست آمده از بسط تيلور دومتغيره براي وجه مورد نظر داريم :

$$\begin{cases} (q_n)_{i+1/2,j} - (q_n)^L_{i+1/2,j} - \dfrac{1}{2\beta^2}\left((q_n)^L_{i+1/2,j} - \sqrt{{(q_n)^L_{i+1/2,j}}^2 + \dfrac{4\beta^2}{\rho}}\right)\left(p_{i+1/2,j} - p^L_{i+1/2,j}\right) = 0 \\ (q_n)_{i+1/2,j} - (q_n)^R_{i+1/2,j} - \dfrac{1}{2\beta^2}\left((q_n)^R_{i+1/2,j} - \sqrt{{(q_n)^R_{i+1/2,j}}^2 + \dfrac{4\beta^2}{\rho}}\right)\left(p_{i+1/2,j} - p^R_{i+1/2,j}\right) = 0 \end{cases} \quad (۱۲)$$

در روابط بالا مقادير $\phi^{L}_{i+1/2,j}$ و $\phi^{R}_{i+1/2,j}$ از بسط تيلور دومتغيره در سلول هاي مورد نظر به دست مي آيند. با استفاده از معادلات (۱۲) مولفه هاي بردار شار جابجايي در مرز بين دو سلول بر اساس تغييرات دومتغيره پارامترهاي جريان در داخل سلول و مسيرهاي انتشار اطلاعات محاسبه شده اند.

مزيت روش ارايه شده به روشهاي معمول ميانگين گيري معمولي و بالادست، در نظر گرفتن تغييرات متغيرهاي جريان در هر دو جهت در داخل سلول به همراه استفاده از مسيرهاي مشخصه مي باشد که باعث بالا رفتن دقت محاسبات خواهد شد.

## ۵- محاسبه بردارهاي شار لزج

محاسبه بردارهاي شار لزج در روي مرز بين سلول ها که مستلزم محاسبه مشتقات دوم پارامترهاي جريان در روي وجه سلول ها است، شامل دو مرحله است. در مرحله اول تنش ها محاسبه شده و سپس جملات لزج محاسبه مي شوند. معمولا براي محاسبه جملات لزج سلول هاي بيشتري از دامنه محاسباتي نسبت به محاسبه جملات جابجايي، درگير مي شوند. روش محاسبه جملات لزج در شکل ۳ نشان داده شده است. قسمت اول محاسبه بردارهاي شار جابجايي شبيه برآورد مربوط به بردارهاي جابجايي بوده و به صورت زير است :

$$\oint_{ABCD}(\mathbf{R}dy - \mathbf{S}dx) = \oint([\frac{\partial\phi}{\partial x}]dy - [\frac{\partial\phi}{\partial y}]dx)$$
$$= \sum_{k=1}^{4}([\frac{\partial\phi}{\partial x}]_k \Delta y_k - [\frac{\partial\phi}{\partial y}]_k \Delta x_k) \qquad (۱۳)$$

كه در آن $\phi$ يكي از كميت هاي جريان است. به منظور محاسبه مقدار مشتق $\phi$ در روي مرز بين دو سلول، چهار ضلعي محيطي وجه مورد نظر انتخاب شده و حول آن انتگرالگيري انجام مي گيرد (شكل ۳). به عنوان مثال براي محاسبه جملات لزج در ضلع AB چهار ضلعي ANBM انتخاب شده و داريم :

$$[\frac{\partial\phi}{\partial x}]_{AB} = \frac{1}{S'}\iint_{S'}(\frac{\partial\phi}{\partial x})dS = \frac{1}{S'}\oint_{\partial S'}\phi dy \approx \frac{1}{S'}\sum_{k=1}^{4}\phi_k \Delta y_k$$
$$= \frac{1}{S'}[0.5(\phi_N + \phi_A)\Delta y_{AN} + 0.5(\phi_N + \phi_B)\Delta y_{NB}$$
$$+ 0.5(\phi_B + \phi_M)\Delta y_{BM} + 0.5(\phi_M + \phi_A)\Delta y_{MA}] \qquad (۱۴)$$

كه $S'$ برابر سطح ANBM است. همچنين داريم :

$$y_N = 0.25(y_{i,j+1} + y_{i,j+2} + y_{i+1,j+2} + y_{i+1,j+1})$$
$$y_M = 0.25(y_{i,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j})$$
$$\phi_A = 0.25(\phi_{NW} + \phi_N + \phi_M + \phi_W) \qquad (۱۵)$$
$$\phi_B = 0.25(\phi_N + \phi_{NE} + \phi_E + \phi_M)$$

محاسبه جملات لزجي در روي ساير وجوه سلول نيز به شكل مشابهي انجام مي شود.

## ۶- گسسته سازي زماني

براي تبديل معادلات با مشتقات جزئي (۱) به دستگاه معادلات معمولي و افزايش ناحيه پايداري، گسسته سازي مشتقات زماني با روش صريح رانگ-كوتا از مرتبه چهار، انجام گرفته است كه به صورت زير مي باشد :

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}^{n}$$
$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} Q^{(0)}$$
$$\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} Q^{(1)} \qquad (۱۶)$$
$$\mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}^{(0)} - \Delta t\, Q^{(2)}$$
$$\mathbf{U}^{(4)} = \mathbf{U}^{(0)} - \frac{\Delta t}{6}(Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(2)} + Q^{(3)})$$

در اعداد رينولدز بالاتر به منظور پايدار شدن حل عددي و جلوگيري از رشد موجهاي خطا، نياز به افزودن جملات اتلاف مصنوعي مي باشد كه در اين حالت، جملات اتلاف مصنوعي مرتبه چهار مورد استفاده قرار گرفته است.

## ۷- شرايط مرزي

اعمال شرايط مرزي سازگار، تاثير به سزايي در دقت جوابها و همچنين پايداري عددي طرح محاسباتي دارد. شرايط مرزي اعمال شده در روي مرز جامد براي سرعتها، شرط عدم لغزش است. همچنين تنش نرمال لزج نيز در روي جسم جامد صفر در نظر گرفته شده كه از معادله پيوستگي به دست مي آيد. براي محاسبه فشار در روي بدنه جسم، از معادله مومنتوم در جهت عمود بر سطح جامد[8] استفاده شده است.

براي اعمال شرايط مرزي در مرزهاي دور با توجه به فروصوتي بودن جريان، نياز به تخصيص دو شرط مرزي در ورودي و يک شرط مرزي در خروجي از خارج دامنة محاسباتي داريم. شرايط مرزي در مرزهاي دور به صورت يک بعدي محلي و بر اساس شرايط مرزي مشخصه اي اعمال شده است. ورودي يا خروجي بودن مرز سلول در هر مرحله، با استفاده از جهت بردار سرعت بررسي شده و شرط مرزي مناسب اعمال گرديده است. در سلول هاي ورودي جريان، تنها فشار از داخل دامنة محاسباتي برونيابي شده و بقيه مقادير از خارج دامنه تخصيص داده شده اند. در سلول هاي خروجي تنها مقدار فشار از خارج محدوده اعمال شده و ساير پارامترها از داخل برونيابي شده اند.

## ۸- نتايج عددي

نتايج عددي توسط كد كامپيوتري نوشته شده با روش حجم محدود توسط مولفين به دست آمده اند. اين كد براي جريان دوبعدي آرام پايا و ناپايا حول استوانه دايروي با روش جديد محاسبه شار براي اعداد رينولدز مختلف اجرا شده ونتايج عددي به دست آمده موردبررسي قرارگرفته است. براي اعداد رينولدز كوچكتر از ٤٠ الگوي جريان به صورت پايا بوده و در رينولدزهاي بالاتر جداشدن نوساني گردابه ها از طرفين عقبي استوانه روي مي دهدكه نشانگر ناپايايي جريان بوده و به صورت گذرا تحليل شده است. در جدول۱ مقايسه اي بين نتايج عددي به دست آمده از تحليل حاضر و نتايج ساير محققين براي ضريب پسا انجام شده است. همانگونه كه از جدول مشاهده مي شود نتايج به دست آمده در توافق خوبي با مقادير گزارش شده در ادبيات فن است. در جدول ۲ مقادير فشار در نقطه سكون با مقادير ساير محققان مقايسه شده است. در شكل ٤ مقايسه اي بين توزيع ضريب فشار روي استوانه با نتايج موجود در مراجع ۳ و ١٤ و ۱۶ در عدد رينولدز ٤٠ انجام شده است كه توافق خوبي را نشان مي دهد. در شكل ۵ خطوط جريان به دست آمده از تحقيق حاضر با نتايج Zienkiewicz و Nithiarasu [10] مورد مقايسه قرار گرفته اند و همانطوركه ملاحظه مي شود همخواني عالي بين نتايج موجود است. اين مقايسه در اعداد رينولدز پايين و در رژيم آرام جريان صورت گرفته است .

---

[8] Normal Momentum

شكل ٦ توزيع فشار حول استوانه در Re=40 را نشان مي دهد كه تقارن موجود به خوبي ديده مي شود. براي اعداد رينولدز بالاتر از ٤٠ الگوي جريان ناپايا بوده و جداشدن نوساني گردابه ها از پشت جسم روي مي دهد
[1]. در شكل هاي ۷ نمونه اي از جريان ناپايا حول استوانه دايروي در عدد رينولدز ۸۰ داده شده است. در اعداد رينولدز بالاتر از ٤٠ گردابه هاي توليد شده در پشت جسم رشد نموده و به صورت تناوبي از جدار جامد كنده شده و توسط جريان به پايين دست منتقل مي شوند. با انحلال یک گردابه بزرگ در يكي از طرفين پشت جسم، گردابه جديدي در جهت مخالف آن شروع به شكل گرفتن و رشد مي كند كه باعث ايجاد الگوي تناوبي von Karman مي شود. براي اعداد رينولدز بالاتر نيز برنامه مذكور اجرا شده و نمونه اي از خطوط جريان در اعداد رينولدز ۱۰۰ و ۱۵۰ در شكلهاي ۸ و ۹ نشان داده شده است.

در شكل هاي ۱۰ و ۱۱، تاريخچة همگرايي روش پيشنهادي در مقايسه با روش ميانگين گيري پارامترهاي جريان در مرز بين دو سلول در اعداد رينولدز ۲۰ و ۴۰ نشان داده شده است. همانطوركه ديده مي شود، روش پيشنهادي سريعتر از روشهاي ميانگين گيري معمول براي محاسبه بردارهاي شار جابجايي همگرا مي شود.

## ۹- بحث و نتيجه گيري

در اين تحقيق، روش جديدي براي تحليل جريانهاي لزج تراكم ناپذير ارايه شده است. روش حاضر بر اساس بسط تيلور دو متغيره پارامترهاي جريان در مرز بين دو سلول حول مراكز سلول ها و محاسبه همزمان متغيرهاي جريان در تمام وجوه سلول، با استفاده از حل یک دستگاه خطي و استفاده از مقادير به دست آمده در معادلات گسسته شده مشخصه در جهت عمود بر مرز بين دو سلول است. مولفه هاي بردار شار جابجايي از گسسته سازي معادلات مشخصه در جهت عمود بر مرز بين دو سلول و استفاده از مقادير به دست آمده از بسط تيلور دومتغيره براي وجوه مشترک بين دو سلول محاسبه مي شوند. براي اعمال روش ارائه شده، كد دو بعدي به زبان فرترن ۹۰ براي تحليل جريان صليبي حول استوانه دايروي نوشته شده است. اين برنامه روش حجم محدود مركز سلول و گسسته سازي صريح رانگ كوتاي مرتبه چهار زماني را به كار مي گيرد. محاسبه بردارهاي شار جابجايي با روش بسط تيلور دو متغيره انجام شده كه تغييرات پارامترهاي جريان را در سطح سلول درنظر مي گيرد در حالي كه بردارهاي شار لزج با یک طرح معمول مرتبه دوم گسسته شده اند. برنامه نوشته شده براي حل جريان پايا و ناپايا به كار رفته و نتايج به دست آمده با داده هاي موجود در ادبيات فن و نتايج ساير روشهاي عددي مورد مقايسه قرار گرفته و در تمامي موارد توافق خوبي بين آنها مشاهده مي شود. در اعمال اين روش به جريان حول استوانه ديده شده كه به كارگيري بسط تيلور دومتغيره به همراه معادلات مشخصه براي محاسبة پارامترهاي جريان در مرز بين دو سلول، باعث كاهش مرتبه هاي تكرار براي رسيدن به جوابهاي پايا مي گردد. همچنين روش پيشنهادي قادر به افزايش محدوده پايداري حل عددي است، به طوريكه در شرايط مشابه و با محاسبه بردارهاي شار جابجايي به روش ميانگين گيري معمولي، كد كامپيوتري حداكثر تا CFL=1.2 قابل اجراست در حاليكه با روش ارايه شده اين مقدار به CFL=1.7 افزايش

[1] Vortex Shedding

يافته است. در حالت ناپايا اين امر به دقت در محل گردابه ها و ابعاد آنها منجر مي گردد. از جمله مزاياي اين روش نسبت به روشهاي موجود، در نظر گرفتن تغييرات واقعي دوبعدي متغيرهاي جريان در داخل هر سلول براي تخمين بردارهاي شار جابجايي و افزايش دامنه پايداري و كاهش گام هاي تكراري است.

در اين مقاله براي اولين بار، روش بسط تيلور دو متغيره كميت هاي جريان حول مراكز سلول و استفاده از معادلات حاكم بر مسيرهاي مشخصه براي محاسبه بردارهاي شار جابجايي در مرز بين سلول ها، براي تحليل جريان حول استوانه دايروي مورد استفاده قرار گرفته كه در اين مورد نتايج خوبي را ارائه داده است. گسترش روش حاضر به ساير جريان هاي تراكم ناپذير و قضاوت دقيقتر در مورد خواص عددي روش از كارهاي آينده مي باشد.

## مراجع


[1] Dennis, S.C.R., and Chang, G.Z., “Numerical Solutions for Steady Flow Past a Circular Cylinder at Reynolds Number up to 100,” Journal of Fluid Mechanics, Vol. 42, pp. 471-489, (1970).

[2] Fornberg, B., “A Numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder,” Journal of Fluid Mechanics, Vol. 98, pp. 819-855, (1980).

[3] Lin, S.Y., and Wu, T.M., “An Adaptive Multigrid Finite-Volume Scheme for Incompressible Navier-Stokes Equations,” International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 17, pp. 687-710, (1993).

[4] Braza, M., Chassaing, P., and Naminh, H., “Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Field in the Near Wake of a Circular Cylinder,” Journal of Fluid Mechanics, Vol. 165, pp. 79-130, (1986).

[5] Franke, R., Rodi, W., and Schonung, B., “Numerical Calculation of Laminar Vortex-Shedding Flow Past Cylinders,” Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 35, pp. 237-257, (1990).

[6] Deng, G.B., Piquet, J., Queutey, P., and Visonneau, M., “Incompressible Flow Calculations with a Consistent Physical Interpolation Finite Volume Approach,” Computers and Fluids, Vol. 23, pp. 1029-1047, (1994).

[7] Kiris, C., and Kwak, D., “Numerical Solution of Incompressible Navier–Stokes Equations using a Fractional-Step Approach,” Computers and Fluids, Vol. 30, issues 7-8, pp. 829-851, (2001).

[8] Kumar, B., and Mittal, S., “Prediction of the Critical Reynolds Number for Flow Past a Circular Cylinder,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, issues 44-47, pp. 6046-6058, (2006).

[9] Oh, W.S., Kim, J.S., and Kwon, O.J., "Time-Accurate Navier–Stokes Simulation of Vortex Convection using an Unstructured Dynamic Mesh Procedure," Computers and Fluids, Vol. 32, pp. 727-749, (2003).

[10] Nithiarasu, P., and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of an Explicit and Matrix Free Fractional Step Method for Incompressible Flows," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, pp. 5537–5551, (2006).

[11] Mirzaee, B., Khoshravan, E., and Razavi, S.E., "Finite Volume Solution of a Cylinder in Cross Flow with Heat Transfer," IJE Transactions A: Basics, Vol. 15, No. 3, pp. 303-314, (2002).

[12] Wu, G.X., and Hu, Z.Z., "Numerical Simulation of Viscous Flow Around Unrestrained Cylinders," Journal of Fluids and Structures, Vol. 22, pp. 371-390, (2006).

[۱۳] زمزمیان، کامیار، "روابط مشخصه براي معادلات تراکم پذيري مصنوعي"، گزارش تحقيقاتي، شماره ۲، دانشکده مهندسي مکانیک، دانشگاه تبریز، (۱۳۸۵).

[14] Takami, H., and Keller, H.B., "Steady Two-Dimensional Viscous Flow of an Incompressible Fluid Past a Circular Cylinder," Physics of Fluids, Vol. 2, pp. 51-56, (1969).

[15] Ding, H., Shu, C., Yeo, K.S., and Xu, D., "Simulation of Incompressible Viscous Flow Past a Circular Cylinder by Hybrid FD Scheme and Meshless Least Square Based Finite Difference Method," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 193, pp. 727–744, (2004).

[16] Grove, A.S., Shahir, F.M., Petersen, E.E., and Acrivos, A., "An Experimental Investigation of the Steady Separated Flow Past a Circular Cylinder," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 19, pp. 60-80. (1965).

## فهرست علائم انگلیسي

CFL: عدد کورانت

$C_p$: ضریب فشار

F : بردار شار جابجايي در جهت x

G: بردار شار جابجايي در جهت y

p : فشار

$q_n$ : مولفه بردار سرعت در جهت عمود بر مرز بین دو سلول

R : بردار شار لزج در جهت x

S : بردار شار لزج در جهت y

$S'$ : سطح سلول ثانویه

u, v : مولفه هاي سرعت کارتزين

U: بردار متغيرهاي اوليه

$x_n$: جهت عمود بر مرز بين دو سلول

## فهرست علائم يوناني

$\beta$ : ضريب تراكم پذيري مصنوعي

$\Delta t$: گام زماني

$\phi$: نماد نوعي براي متغيرهاي اوليه جريان

$\rho$: چگالي

# جدولها

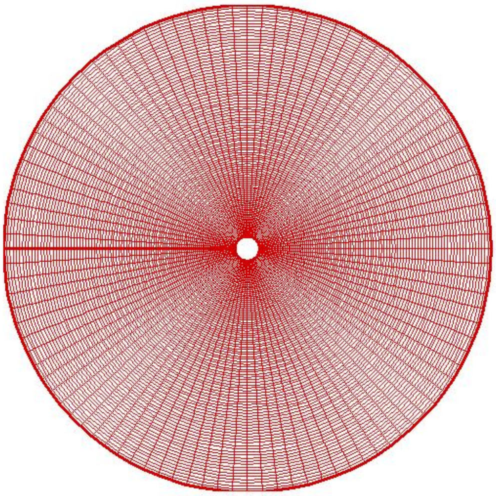
جدول ۱- مقايسه بين نتايج حاضر و مقادير موجود در ادبيات فن براي ضريب پسا در جريان پايا و ناپايا

| **Reynolds number** | **4** | **10** | **20** | **40** | **60** | **80** | **100** | **140** | **200** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Keller و Takami [14] | - | - | 2 | 1.54 | 1.42 | | 1.32 | - | - |
| Chang و Dennis [1] | - | 2.8 | 2.05 | 1.52 | 1.37 | 1.25 | 1.06 | - | - |
| Fornberg [2] | - | - | 2 | 1.5 | - | - | 1.06 | - | 0.83 |
| Braza و همكاران [4] | - | - | 2.18 | 1.61 | - | 1.35 | 1.15 | 1.08 | - |
| Ding و همكاران [15] | - | 3.07 | 2.18 | 1.71 | - | - | - | - | - |
| Nithiarasu و همكاران [10] | - | 2.85 | 2.06 | 1.56 | - | - | - | - | - |
| مقاله حاضر | 4.62 | 2.79 | 2.02 | 1.51 | - | 1.31 | 1.13 | 1.08 | 1.06 |

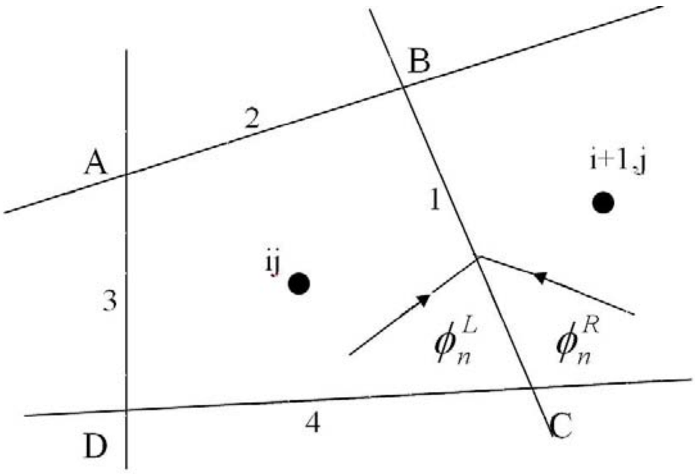
جدول ۲- مقايسه فشار در نقطه سكون جلوي جسم در جريان پايا و ناپايا

| **Reynolds Number** | **4** | **10** | **20** | **40** | **60** | **80** | **100** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Keller و Takami [14] | - | - | 0.631 | 0.57 | 0.548 | - | - |
| Chang و Dennis [1] | - | - | 0.634 | 0.572 | - | - | 0.53 |
| Fornberg [2] | 1 | 0.718 | 0.638 | 0.576 | - | - | 0.533 |
| مقاله حاضر | 0.9 | 0.628 | 0.57 | 0.541 | 0.533 | 0.531 | 0.529 |

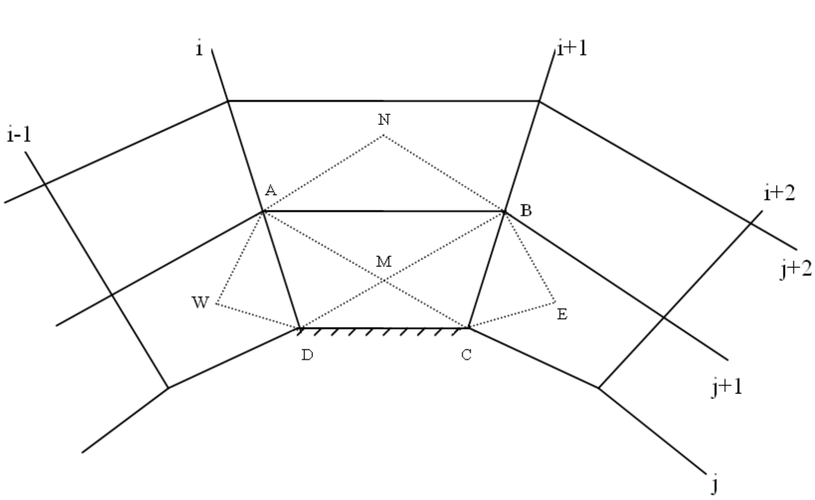
## شکلها



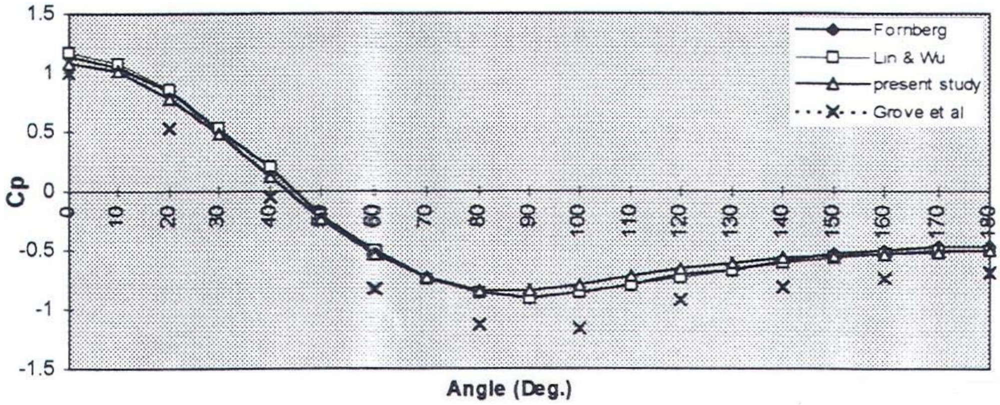
شکل ۱- شبکه جبري O شکل مورد استفاده حول استوانه



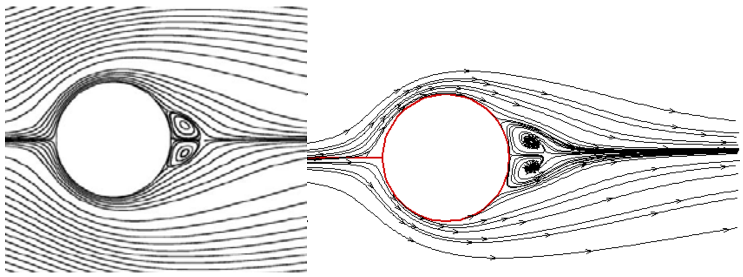

شکل ۲- انتشار اطلاعات در امتداد خطوط مشخصه بين مرز دو سلول



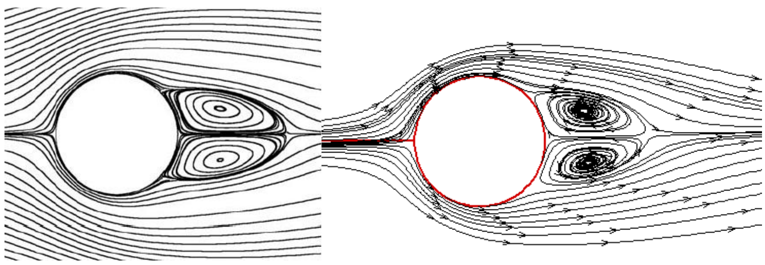

شکل ۳- دامنه محاسباتي و شبکه ثانويه براي محاسبة جملات لزج



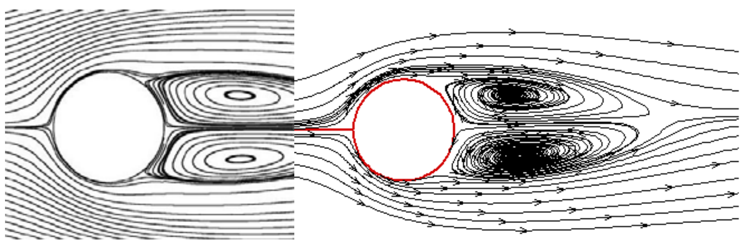

شکل ۴- مقایسه بین توزیع ضریب فشار روي استوانه با نتایج موجود در مراجع [2، 3، 16] در Re=40



Re=10



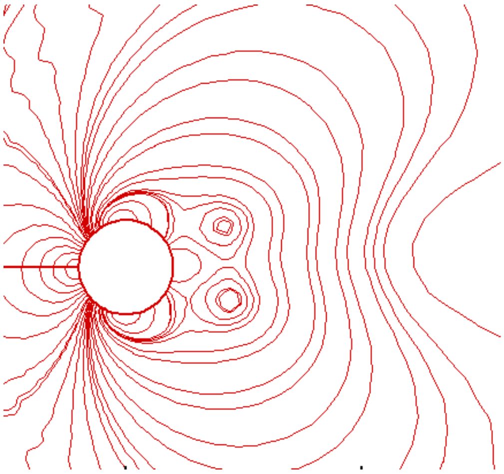
Re=20



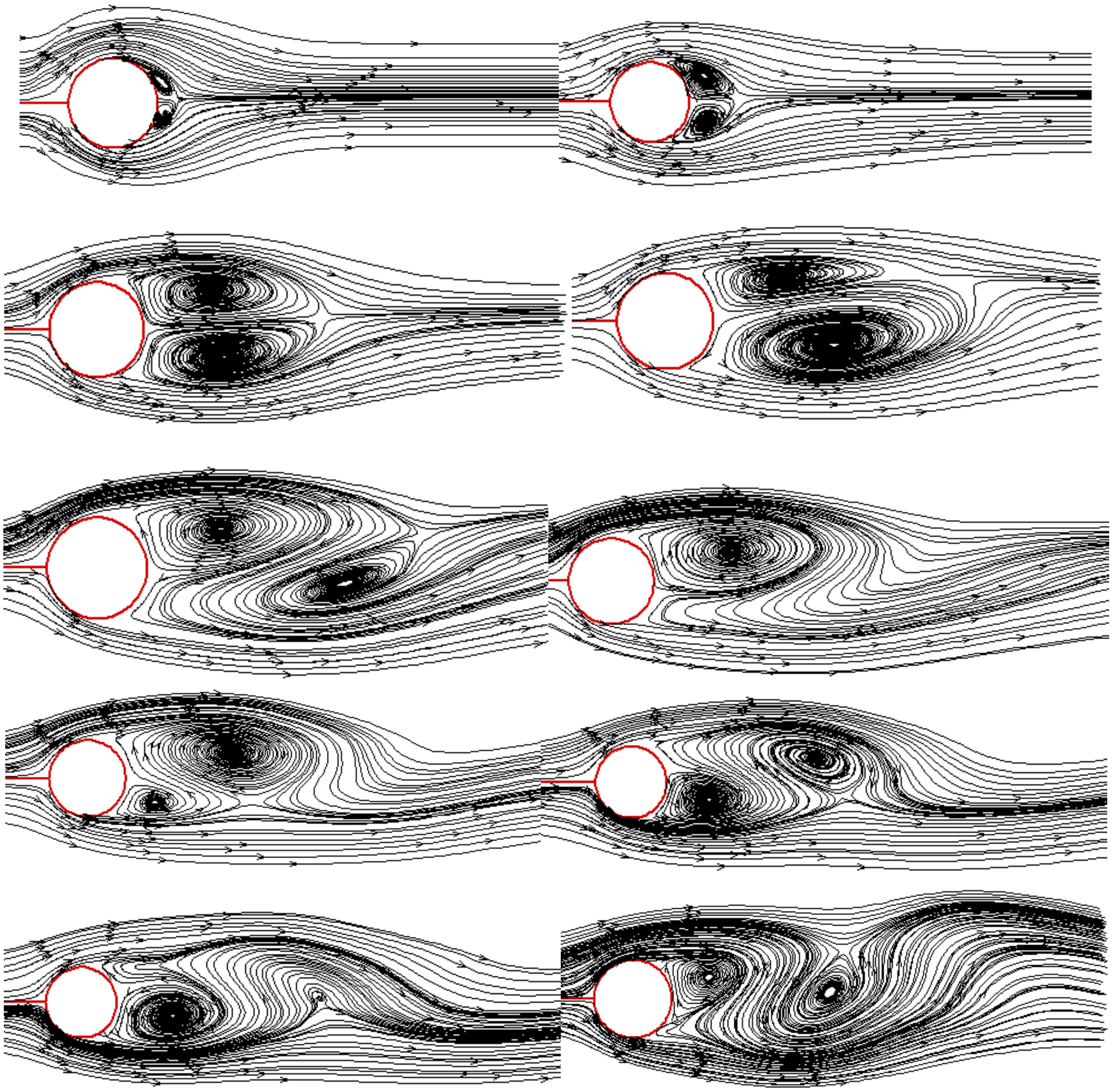
Re=40

شکل ۵- مقایسه بین خطوط جریان به دست آمده از تحقیق حاضر (سمت راست) و Zienkiewicz و Nithiarasu

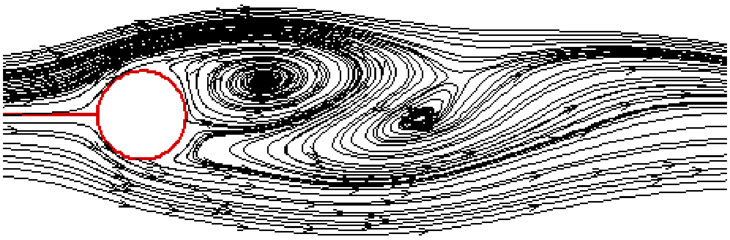
[10] (سمت چپ) در رژیم هاي پاياي جریان



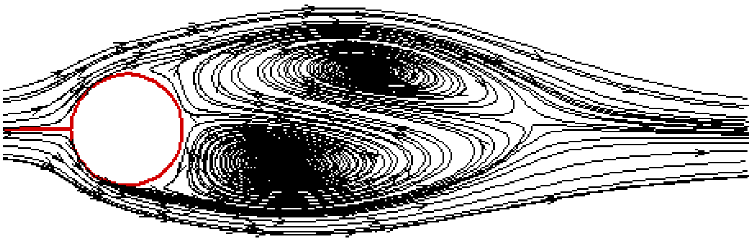
شكل ۶- منحني هاي هم فشار در Re=40



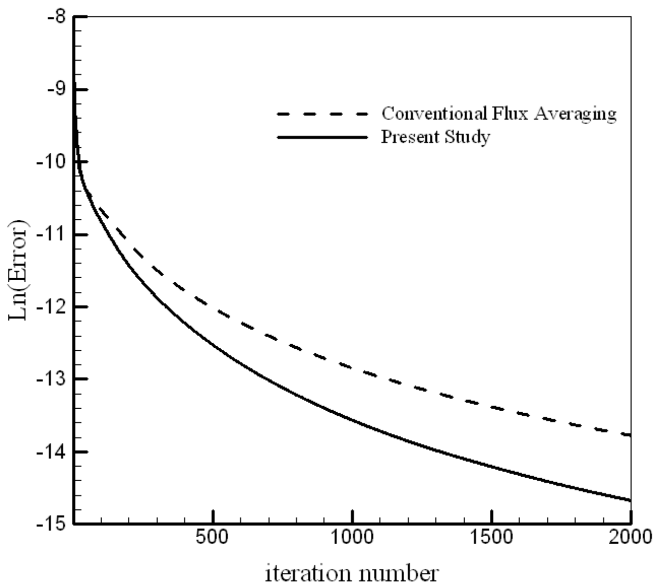
شكل ۷- خطوط جريان ناپايا در CFL=1.4 و Re=80 (به ترتيب از سمت چپ به راست و از بالا به پايين)



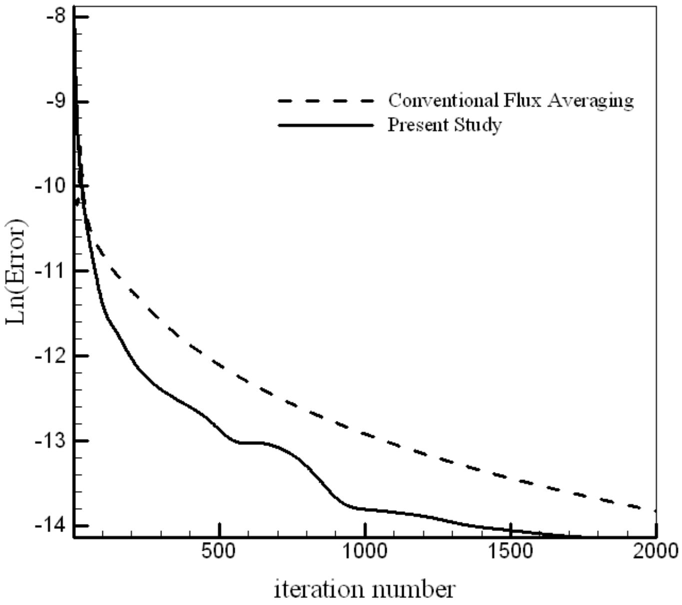
شکل ۸- خطوط جریان در Re=100 و CFL=1.4



شکل ۹- خطوط جریان در Re=150 و CFL=1.4




شکل ۱۰- مقایسه تاریخچه همگرایي روش هاي معمول میانگین گیري و طرح پیشنهادي در Re=20 و CFL=1.0




شكل١١- مقايسه تاريخچه همگرايي روش هاي معمول ميانگين گيري و طرح پيشنهادي در Re=40 و CFL=1.0

## Abstract

A new finite-volume method has been developed for solving the viscous incompressible flows. Artificial compressibility technique along with time marching is applied. The method consists of convective flux computation based on the two variable Taylor series expansions and characteristic of artificial compressibility equations. The flow primitive variables are determined in cell faces by solving a linear system of equations and then discrete forms of characteristic relations between two cells are used for calculation of convective fluxes. The proposed flux calculation method is employed for solving the cross flow over a circular cylinder in steady and unsteady regimes. For this test case, the proposed method can noticeably increase the numerical stability region by allowing the elevated CFL numbers. Also, the method was led to reduced iteration steps during the convergence process.