ISME

محاسبة ضرايب شدت تنش در مواد هدفمند بـه روش MLPG

علي محي الدين[۱]
کارشناس

عليرضا شفيعي[۲]
استاديار

در اين مقاله از يکي از روشهاي بدون مش به نام MLPG[۳] براي تحليل تـرک در صـفحة محدود از جنس مادة هدفمند[٤] ايزوتروپيک و الاستيک خطي اسـتفاده شـده اسـت. توابـع شکل، با استفاده ازروش تقريب حداقل مربعات متحرک[٥] بدست آمده اند. براي حل مسايل مکانيک شکست بدون نياز به افزايش حجم محاسبات، از روش اصـلاح تـابع وزن اسـتفاده شده است. ضرايب شدت تنش با استفاده از انتگرالهاي مستقل از مسير J که بـراي مـواد ناهمگن فرمول بندي شده اند محاسبه مي شود. براي بررسي اعتبار روش عـددي حاضـر، ضريب شدت تنش مود اول در يک صفحه شامل ترک لبه اي با فرض تغيير نمايي مـدول يانگ در امتداد ترک محاسبه شده است. مقايسة پاسخ بدست آمده با پاسخ تحليلي، نشان دهندة دقت بالاي روش مورد استفاده است. تأثير شدت و راستاي گراديـان خـواص مـادة هدفمند بر ضرايب شدت تنش و نرخ رهايي انرژي در دو مثال عددي بررسي شـده اسـت. نتايج نشان ميدهند افزايش نرخ تغييرات مدول الاستيسيته در امتداد ترک موجب کاهش ضريب شدت تنش مود اول مي شود. همچنين افزايش نرخ تغييرات مدول الاستيسيته در امتداد عمود بر ترک، موجب افزايش نرخ رهايي انرژي و زاوية انحراف ترک مي شود.

واژه های راهنما: ترک، انتگرال J، ضريب شدت تنش، روشMLPG ، مادة هدفمند

۱- مقدمه

با توجه به نياز فناوري هاي نوين به ويژه در زمينـة صـنعت هوافضـا و ميکـرو الکترونيـک، مهندسـان مـواد، پيوسته در پي ابداع مواد جديد با خواص بهبـود يافتـه بـوده انـد. هـدف اصـلي تحقيقـات آنهـا توليـد انـواع کامپوزيت، سراميک، آلياژ و پوشش هاي همگن بود. ولـي ايـن مـواد قابليـت اسـتفاده در برخـي کاربردهـا و شرايط خاص به ويژه دماي بسيار بـالا را نداشـتند. زيـرا دمـاي بـالا موجـب خـوردگي و خـزش در فلـزات و آلياژهاي فلزي مي شود. از طرف ديگر مقاومت و چقرمگي پايين همـواره از معايـب سـراميک بـوده انـد. لـذا پوشش هاي ضد حرارت جديدي از جنس سراميک و کامپوزيت فلز- سراميک ابداع شدند تا خواص مطلـوب هر دو دسته از مواد فوق در کنار يکديگر را حفظ کنند. با اين حـال مشـکل اکسـايش و چقرمگـي پـايين در کامپوزيت ها هنوز وجود داشت و در محافظ هاي سراميکي نيز تنش هاي مانده و تـنش هـاي حرارتـي بـالا

[۱] نويسنده مسئول، دانشجوي کارشناسي ارشد، دانشکده مهندسي مکانيک، دانشگاه يزد mohyeddin.ali@gmail.com
[۲] استاديار، دانشکده مهندسي مکانيک، دانشگاه يزد

[3] Meshless Local Petrov Galerkin
[4] Functionally Graded Material
[5] Moving Least Squares Approximation

موجب ايجاد ترک و جدا شدن لاية محافظ مي شد[۱]. مفهوم مادة هدفمند براي اولين بار در سال ۱۹۸۴ توسط كويزومي[1] و همكارانش به عنوان جايگزين سپرهاي حرارتي مرسوم، پيشنهاد شد. مواد هدفمند، موادي هستند كه از نظر ساختار و يا نسبت عناصر سازنده، به نحوي درجه بندي شده اند كه خواص و عملكرد مورد نياز را ارائه دهند. در سپرهاي حرارتي هدفمند، درصد سراميک از صفر درصد در محل اتصال تا صد درصد در سطح محافظ به طور پيوسته تغيير مي كند و درصد آن به نحوي تعيين مي شود كه خواص ترمومكانيكي مورد نياز را ارضا كند. با توجه به جديد بودن اين مواد، تحقيق روي آنها با هدف طراحي و ساخت ماده اي با گراديان خواص مطلوب در دو بعد تحليلي و تجربي همچنان ادامه دارد. حل مسایل الاستیسیته برای مواد ناهمگن از جمله مواد هدفمند نیازمند روشهای پیشرفتة ریاضی است. اگرچه روشهای تحلیلی، پاسخ با فرم بسته را نتیجه می دهند، محدود به هندسة ساده و حالت خاصی از ناهمگنی (مانند تغییرات نمایی خواص[۲]) و بارگذاري هستند. لذا پاسخ بدست آمده، غالباً غیر کاربردی بوده و استفاده از روش های عددی همچون روش اجزاي محدود را اجتناب ناپذير مي كند[۱]. ولي روش اجزاي محدود براي حل برخي مسايل، مناسب نيست. به طور مثال براي شبيه سازي رشد ترک نياز به مش بندي ريز و پي در پي در ناحية اطراف ترک است كه باعث افزايش مدت زمان تحليل و نيز كاهش دقت محاسبات مي شود. همچنين براي تحليل سازه هاي ناهمگن نياز به افزايش تعداد المان ها است. از طرف ديگر در حل مسايل شامل تغيير شكل‌هاي بزرگ از دقت كافي برخوردار نيست. در اواخر دهة ۱۹۷۰ يک روش عددي جديد به نام روش بدون مش[2] ابداع شد كه ويژگي اصلي آن، عدم نياز به مش براي تعريف دامنه و مرزهاي مسأله بود. در روش بدون مش، محدوديت هاي روش اجزاي محدود كه مربوط به استفاده از المان بودند برطرف شدند. از اين رو روش بدون مش، قابليت بيشتري در حل مسايل مكانيک شكست به ويژه شكست ديناميكي دارد. انواع مختلفي از روش‌هاي بدون مش در دو دهة اخير ابداع شده‌اند كه ويژگي مشترك تمامي آنها استفاده از يك مجموعه گرة مجزا براي تعريف دامنه و مرزهاي مسأله است. با اين حال، انتگرال‌گيري فرمول‌بندي ضعيف معادلة حاكم، نياز به مش پس زمينه بر روي كل دامنه را اجتناب ناپذير مي كند. آتلوري و ژو[3] [۳] در ۱۹۹۸ روش بدون مش MLPG را ارائه دادند كه نه تنها براي درونيابي متغيرهاي ميدان بلكه براي انتگرال گيري فرم ضعيف معادلات نيز نياز به مش بندي دامنه ندارد. همچنين از روش حداقل مربعات متحرک (MLS) براي تقريب ميدان مجهول استفاده مي كند. در اين مقاله از روش MLPG براي محاسبة ضرايب شدت تنش در يک صفحة تركدار از جنس مادة هدفمند ايزوتروپيک و الاستيک خطي استفاده شده است. به اين منظور ابتدا فرمول بندي روش MLPG و الگوريتم تخمين MLS توضيح داده مي شود. سپس روند اصلاح فرمول بندي MLPG براي حل مسايل مكانيک شكست ارائه شده و روش محاسبة ضرايب شدت تنش معرفي مي شود. در ادامه، توضيحات مختصري در مورد شكست مواد هدفمند داده مي شود. دقت روش عددي حاضر و تأثير شدت گراديان خواص مادة هدفمند بر ضرايب شدت تنش و نرخ رهايي انرژي در قالب چند مسأله بررسي مي شوند.

---

[1] Koizumi
[2] Meshfree method
[3] Atluri and Zhu

مقالة حاضر در مقايسه با تحقيقات گذشته در زمينة حل عددي مسايل مكانيک شكست مواد هدفمنـد در دو مورد، برتري دارد:

- با توجه به حجم بالاي محاسبات روش MLPG در مقايسه با روش اجزاي محدود، سعي شده است تـا براي تحليل مسايل مكانيک شكست از يک مدل ساده و دقيق استفاده شود. در ميان مدل هاي ابـداع شده، روش اصلاح تابع وزن كه پيش از اين براي يكـي ديگـر از الگـوريتم هـاي بـدون مـش بـه نـام EFG (Element Free Galerkin) پيشنهاد شده است مناسبترين روش به نظر مي رسد. در پـژوهش حاظر براي نخستين مرتبه از اين روش در الگوريتم MLPG استفاده شده است.
- براي مقايسة نتايج حل عددي مسايل مكانيک شكست مواد هدفمند، تا كنون از فرض تغيير خطي يـا نمايي مدول الاستيک استفاده شده است. در حالي كه در اين مقالـه ضـمن اسـتفاده از فـرض تغييـر نمايي براي بررسي دقت روش عددي، براي مدلسازي هرچه دقيقتر مواد هدفمند از روش موري-تاناكا استفاده شده است. همچنين براي اولين مرتبه، تأثير ميزان ضخامت لاية هدفمنـد بـر ضـريب شـدت تنش، نرخ رهايي انرژي و زاوية شروع رشد ترک بررسي شده است.

۲- روش MLPG

در اين بخش، الگوريتم MLS و فرمول بندي روشMLPG بر اساس مطالب ارائه شده در [۳] توضيح داده مي شوند.

۲-۱- الگوريتم MLS

در بيشتر روشهاي بدون مش از جمله MLPG براي تقريب تابع ميدان از الگوريتم MLS استفاده مي شود. روش MLS متغير ميدان $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ [1] را به صورت زير تخمين مي زند:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{h}}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \mathbf{\Phi}_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \qquad (۱)$$

$\mathbf{\Phi}_I$ ماتريس توابع شكل بوده و به شكل زير تعريف مي شود:

$$\mathbf{\Phi}_I = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

φ_I تابع شكل گرة I نام دارد كه روي يک ناحية دلخواه حول گرة Iام به نام دامنة تأثير[2] تعريف مي شود. N تعداد گره هايي است كه در دامنة تأثير نقطة $\mathbf{x}$ قرار دارند. در روش MLS مقدار φ_I در نقطة دلخواه $\mathbf{x}$ از رابطة زير بدست مي آيد:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j}^{m} p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}))_{jI} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_I \qquad (۳)$$

ماتريس هاي $\mathbf{A}$ و $\mathbf{D}_I$ به ترتيب عبارتند از:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I}^{N} W_I(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_I)\,, \qquad \mathbf{D}_I(\mathbf{x}) = W_I(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \qquad (۴)$$

---

[1] Field variable
[2] Influence domain

$\mathbf{P}$ بردار كاملي از چندجمله‌اي‌هاي پايه تا درجة مشخص است. در حالت دو بعدي، بردار $\mathbf{P}$ از درجة m در نقطة دلخواه $\mathbf{x}$ به شكل زير تعريف مي شود:

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(x,y)=\left\{1,x,y,xy,x^2,y^2,\ldots,x^m,y^m\right\} \tag{۵}$$

براي جلوگيري از منفرد شدن ماتريس $\mathbf{A}$ حداقل تعداد گره هاي واقع در دامنة تأثير گرة I بايد برابر با تعداد چند جمله اي هاي پايه باشد. $W_I(\mathbf{x})$ تابع وزن گرة I است كه معمولاً روي يک ناحية دايره اي حول گرة I و به شعاع d_I به فرم رابطة (۶) تعريف مي شود.

$$W_I(\mathbf{x})=\begin{cases}1-6r_I^2+8r_I^3-3r_I^4 & \text{for} \quad r_I\le 1\\ 0 & \text{for} \quad r_I>1\end{cases} \tag{۶}$$

$r_I=\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\right\|/d_I$ فاصلة نرماليزه از نقطة $\mathbf{x}$ تا گرة $\mathbf{x}_I$ و d_I شعاع دامنة تأثير است.

۲-۲- فرمول بندي MLPG

براي مسائل الاستواستاتيك دو بعدي، معادلة تعادل و شرايط مرزي روي دامنة Ω كه با مرز Γ احاطه شده است به صورت معادلات (۷) تا (۹) بيان مي شود.

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0 \tag{۷}$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \qquad \text{شرط مرزي اساسي} \tag{۸}$$

$$\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}=\bar{\mathbf{t}} \quad \text{on} \quad \Gamma_t \qquad \text{شرط مرزي طبيعي} \tag{۹}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش و $\mathbf{b}$ بردار نيروهاي حجمي است. $\bar{\mathbf{u}}$ و $\bar{\mathbf{t}}$ به ترتيب بردارهاي جابجايي و تنش سطحي معلوم روي مرز اساسي Γ_{u} و مرز طبيعي Γ_{t} هستند. همچنين $\mathbf{n}$ بردار واحد عمود بر مرز Γ به سمت خارج است. فرم ضعيف محلي معادلة تعادل (۷) در غياب نيروهاي حجمي بر اساس روش باقيماندة وزني روي دامنة Ω_{Q} كه با مرز Γ_{Q} احاطه شده عبارت است از:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \nabla.\boldsymbol{\sigma}\; W_I\, d\Omega=0 \tag{۱۰}$$

معادلة (۱۰) را مي توان با استفاده از قضية ديورژانس به شكل زير نوشت:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \mathbf{V}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{\mathrm{Q_u}}} \mathbf{W}_I\,\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_{\mathrm{Q_t}}} \mathbf{W}_I\,\bar{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma \tag{۱۱}$$

كه در آن، $\boldsymbol{\sigma}$ و $\mathbf{t}$ به صورت زير تعريف مي شوند:

$$\boldsymbol{\sigma}=\left\{\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۱۲}$$

$$\mathbf{t}=\left\{t_x,t_y\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۱۳}$$

مرز دامنة تربيع Γ_{Q} مطابق شكل۱ سه قسمت دارد: Γ_{Qi} مرز دروني است، Γ_{Qu} مرزي است كه منطبق بر مرز اساسي مسأله است و Γ_{Qt} مرزي است كه با منطبق بر مرز طبيعي مسأله است. $\mathbf{W}_I$ ماتريس تابع وزن و $\mathbf{V}_I$ ماتريس مشتق توابع وزن است كه عبارتند از:

$$\mathbf{W}_I=\begin{bmatrix}W_I & 0\\ 0 & W_I\end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

$$\mathbf{V}_I = \begin{bmatrix} W_{I,x} & 0 \\ 0 & W_{I,y} \\ W_{I,y} & W_{I,x} \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

با استفاده از قانون هوك براي مادة الاستيک خطي نتيجه مي شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{c}\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \sum_j^N \boldsymbol{\Phi}_j \mathbf{u}_j = \mathbf{c}\sum_j^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \tag{۱٦}$$

كه $\boldsymbol{\varepsilon}$ برابر است با:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۱۷}$$

ماتريس $\mathbf{c}$ براي مواد همگن ايزوتروپيک بصورت رابطة (۱۸) تعريف مي شود.

$$\mathbf{c} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}}\begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1\text{-}\nu^*)/2 \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

توابع مدول الاستيسيته E^* و نسبت پواسون ν^* در رابطة فوق، عبارتند از:

(۱۹) $E^* = E, \quad \nu^* = \nu$ تنش صفحه ای

$E^* = \frac{E}{1\text{-}\nu^2}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{1\text{-}\nu}$ كرنش صفحه اي

بردار تنش سطحي نيز عبارت است از:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\mathbf{c}\sum_j^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \tag{۲۰}$$

كه $\mathbf{n}$ بردار واحد عمود بر مرز Γ_{Q} به سمت بيرون است:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

با جاگذاري معادلة (۱٦) در معادلة (۱۱) و استفاده از رابطة (۲۰) معادلات خطي گسستة سيستم براي گرة I ام توليد مي‌شود:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \mathbf{V}_I^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{Q_u}}} \mathbf{w}_I \mathbf{n}\mathbf{c} \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \,\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{\mathrm{Q_t}}} \mathbf{w}_I \,\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{۲۲}$$

معادلة (۲۲) را مي توان به فرم ماتريسي زير بيان كرد:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{Ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_I \tag{۲۳}$$

كه $\mathbf{K}_{Ij}$ و $\mathbf{f}_I$ از روابط زير حاصل مي شوند:

$$\mathbf{K}_{Ij} = \int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \mathbf{V}_I^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_j \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{Q_u}}} \mathbf{w}_I \mathbf{n}\mathbf{c}\mathbf{B}_j \,\mathrm{d}\Gamma \tag{۲٤}$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_{\mathrm{Q_t}}} \mathbf{w}_I \,\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{۲۵}$$

در تحقیق حاضر، بردار چند جمله اي هاي پايه از درجة ۲ در نظر گرفته شده است. همچنين براي تمامي گره ها از دامنة تأثير به شعاع ۳ استفاده شده است تا از وجود تعداد گره هاي كافي در دامنة تأثير، اطمينان حاصل شود. ناحية انتگرال گيري نيز براي همة گره ها به شكل دايره به شعاع واحد فرض شده است.

۳- استفاده از روش **MLPG** در حل مسایل مکانیک شکست الاستیک خطي

براي حل مسالة داراي ترک بايد تعداد گره ها را در اطراف نوک ترک افزايش داد که موجب افزايش حجم محاسبات مي شود. يكي از روشهاي رفع اين مشكل، اصلاح تابع وزن بر اساس شكل ميدان تنش و جابجايي اطراف ترک است. در اين روش که توسط دوفلات[1] [۴] ارائه شده است از توابع وزن زير به جاي تابع وزن رابطة (۶) استفاده شده است:

$$w_1(\mathbf{x}) = \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) w_I(\mathbf{x})$$
$$w_2(\mathbf{x}) = \sqrt{r}\left[1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] w_I(\mathbf{x}) \qquad (۲۶)$$
$$w_3(\mathbf{x}) = \sqrt{r}\left[1-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] w_I(\mathbf{x})$$

$w_I(\mathbf{x})$ تابع وزن تعریف شده در رابطة (٦) است. r فاصله از نوک ترک و θ زاویه نسبت به امتداد ترک در جهت پادساعتگرد ($\theta\in[-\pi,\pi[$) است. توابع وزن معرفی شده باعث منفرد شدن میدان تنش حاصل در نوک ترک می شوند. به علاوه توابع w_2 و w_3 در $\theta=\pm\pi$ دو مقداري بوده و ناپیوستگی تابع شکل و میدان جابجايي در طول ترک را نتیجه می دهند. بنابراین تابع w_1 در نقاط جلویی ترک، تابع w_2 در نقاط بالایی ترک و تابع w_3 در نقاط پایینی ترک قابل استفاده هستند. همچنین با توجه نامحدود بودن مشتق توابع فوق در محل دقیق نوک ترک، از سه گره در جلو، بالا و پایین ترک و در نزدیکی نوک ترک استفاده شده است. توابع شکل حاصل از هر یک از توابع وزن (۲۶) به ترتیب با ϕ_1، ϕ_2 و ϕ_3 نشان داده شده و فرم كلي آنها در شكل۲ رسم شده است.

۴- تعیین خواص ترمومکانیکي مواد هدفمند

با توجه به توزيع غير يكنواخت عناصر تشكيل دهندة مواد هدفمند نمي توان خـواص ثـابتي را بـراي آنهـا در نظر گرفت. بنابراين استفاده از اين مواد، نيازمند بررسي ارتباط خواص با نحوة توزيع فازها اسـت. غالبـاً بـرای توضيح تغيير پيوستة خواص در اين مواد، نسبت پواسون ثابت فرض شده و مدول الاستيسيته با توابع نمـايی (e^x) مطابق رابطة (۲۷) يا توانی ($\mathbf{x}^n$) تعريف می شود، زيرا اين توابع، دستيابي به پاسخ دقيق حل تحليلـي را آسان مي كنند. لذا نمي توان به طور دقيق، تغيير فيزيكی خواص ماده را نشان داد.

$$E = E_1\exp(\beta V_2), \qquad \beta = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \qquad (۲۷)$$

كه E_1 و E_2 به ترتيب، مدول الاستيسيتة فازهاي ۱و ۲ و V_2 جزء حجمي فاز ۲ است.

---

[1] Duflot

ساده ترين مدل براي تعيين خواص كامپوزيتها، قانون مخلوطها است که خواص مؤثر كامپوزيت دو فازي را به شکل زير بيان مي كند:

$$P = P_1\ V_1 + P_2\ V_2 \qquad (۲۸)$$

كه P_1 و P_2 به ترتيب، خواص فازهاي ۱و ۲ و V_1 و V_2 به ترتيب، جزء حجمي فازهاي ۱و ۲ هستند. با توجه به اينكه توزيع فازهاي كامپوزيت در مقياس ميكرو، نامنظم است روش قانون مخلوطها از دقت كافي براي مدلسازي كامپوزيتها برخوردار نيست. روش موري- تاناكا[1] [۵] يكي از روشهاي ميكرومكانيکی ساده و دقيق براي تعيين خواص مواد ناهمگن است که غالباً براي مدلسازي مواد هدفمند مورد استفاده قرار مي گيرد. در اين روش فرض مي شود فاز ماتريس مادة هدفمند که با انديس ۱ مشخص مي شود با دانه های کروی فاز دانه ای که با انديس ۲ مشخص مي شود تقويت شده است. مدول بالک مؤثر و مدول برشی مؤثر طبق روش موري- تاناكا از روابط (۲۹) بدست مي آيند.

$$\frac{\kappa-\kappa_1}{\kappa_2-\kappa_1}=\frac{V_2}{1+(1-V_2)(\kappa_2-\kappa_1)/(\kappa_1+4\mu_1/3)}$$

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}=\frac{V_2}{1+(1-V_2)\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+f_1}}\ ,\qquad f_1=\mu_1(9\kappa_1+8\mu_1)/6(\kappa_1+2\mu_1) \qquad (۲۹)$$

تمام مدل هاي ميكرومكانيکی نيازمند يک فرض براي توزيع فازهاي تشكيل دهندة ماده هستند. با توجه به شكل۳ با فرض يک صفحه به ضخامت h و گراديان ماده از فاز فلزي در سطح بالايي به فاز سراميكي در سطح پاييني در جهت x_2 مي توان نسبت حجمي فاز سراميكي را به فرم تواني (۳۰) در نظر گرفت.

$$V_2=\left(0.5+\frac{x_2}{h}\right)^n\ ,\qquad (-h/2\le x_2\le h/2,\quad 0\le n\le\infty) \qquad (۳۰)$$

براي $n=0$، مادة هدفمند تنها شامل فاز سراميكي و براي $n\to\infty$ تنها شامل فاز فلزي مي شود. شكل۴ تغيير تابع نسبت حجمي را بر حسب ضخامت بدون بعد براي توان هاي مختلف n نشان مي دهد. نتايج روش موري- تاناكا براي يک مادة هدفمند شامل نيكل و اكسيد آلومينيوم با خواص مندرج در جدول۱ در شكلهاي ۵ و۶ نشان داده شده است.

۵- شكست مواد هدفمند

۵-۱- تعيين ضرايب شدت تنش

با توجه به فرض پيوستگي خواص در مواد هدفمند در بخش قبل مي توان از روابط ترموالاستيسيتة محيطهاي پيوسته براي تحليل اين مواد استفاده كرد. لذا مدول الاستيسيته E و نسبت پواسون ν به فرم توابع کلی (۳۱) فرض می شود.

$$E=E(\mathbf{x})$$
$$\nu=\nu(\mathbf{x}) \qquad (۳۱)$$

[1] Mori-Tanaka

به طوری که $E(\mathbf{x})\geq 0$ و $-1<\nu(\mathbf{x})\leq 1/2$ توابع پیوسته ، محدود و حداقل یک مرتبه مشتق پذیر تکه ای روی دامنة مسأله می باشند. لذا معادلة متشکله مادة هدفمند به صورت معادلة (۳۲) می باشد.

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\sigma_{ij}+\frac{\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\sigma_{kk}\delta_{ij}\ ,\qquad i,j=1,2,3 \tag{۳۲}$$

که $E^*(\mathbf{x})$ و $\nu^*(\mathbf{x})$ در حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای از رابطة (۱۹) بدست مي آيند.

تابع تنش ایری φ براي مواد ناهمگن تحت تغییر شکل دو بعدي الاستیک خطی در حالت تنش و یا کرنش صفحه ای و در غیاب نیروهای حجمی، معادلة (۳۳) را ارضا می کند[۶].

$$\nabla^2\left(\frac{\nabla^2\varphi}{E^*(\mathbf{x})}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}=0 \tag{۳۳}$$

جین و نودا[1] [۷] نشان دادند در صورتي که $E(\mathbf{x})$ و $\nu(\mathbf{x})$ توابع پیوسته و مشتق پذیر تکه اي باشند مي توان از روابط مکانیک شکست الاستیک خطي براي بررسي شکست این مواد استفاده کرد. لذا پارامترهاي تعیین کنندة میدان تنش اطراف نوک ترک، ضرایب شدت تنش مود اول و دوم هستند که به عنوان معیار شکست و تعیین جهت رشد ترک استفاده مي شوند. همچنین با حل معادلة (۳۳) نشان دادند میدان تنش و جابجایی اطراف نوک ترک، مشابه مواد همگن است. از طرف دیگر تغییرات نسبت پواسون، تأثیر ناچیزي بر ضرایب شدت تنش داشته و فرض ثابت بودن آن موجب ساده سازي مسایل شکست مواد ناهمگن مي شود[۷].

معمولاً براي محاسبة ضرایب شدت تنش از روش انتگرال J استفاده مي شود. بـا توجـه بـه شـکل۷ انتگـرال مستقل از مسیر J براي مادة الاستیک همگن به صورت (۳۴) تعریف مي شود[۸]:

$$J=\lim_{\Gamma_\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma_0}\left(Wn_1-\sigma_{ij}n_ju_{i,1}\right)\mathrm{d}\Gamma\right\}\ ,\qquad i,j=1,2 \tag{۳۴}$$

که n_j مؤلفة j ام بردار واحد عمود بر مسیر بستة Γ و به سمت خارج مسیر است.

انتگرال J در مورد مواد ناهمگن مستقل از مسیر نیست و لذا نمي تـوان از آن اسـتفاده کـرد[۶]. انتگرالهـاي مستقل از مسیر J^* که در ادامه معرفي مي شوند شکل توسعه یافتة انتگرال J براي مواد ناهمگن هستند کـه توسط ایسکن[2] [۶] فرمول بندي شده اند و امکان محاسبة ضرایب شدت تـنش مودهـاي اول و دوم را فـراهم مي کنند. ایسکن با فرض عدم تنش سطحي بر روي ترک، انتگرال هاي مستقل از مسیر J^* را برای مودهـای اول و دوم شکست به صورت (۳۵) و (۳۶) بدست آورد.

$$J_1^*=\lim_{\Gamma_\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma}\left(Wn_1-\sigma_{ij}n_ju_{i,1}\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_0}\left(W_{,1}\right)_{\text{صریح}}\mathrm{d}\Omega\right\}\qquad \text{مود اول}\ (k=1) \tag{۳۵}$$

$$J_2^*=\lim_{\Gamma_\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma}\left(Wn_2-\sigma_{ij}n_ju_{i,2}\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_0}\left(W_{,2}\right)_{\text{صریح}}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_c}\left[W^+-W^-\right]n_2^+\mathrm{d}\Gamma\right.\qquad \text{مود دوم}\ (k=2) \tag{۳۶}$$

که W چگالی انرژی کرنشی مواد الاستیک در حالت دو بعدی بوده و برای مواد الاستیک خطی همگن با توجه به (۱۲)، (۱۷) و (۱۸) به صورت زیر بدست می آید.

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۳۷}$$

---

[1] Jin and Noda
[2] Eischen

مشتق صریح تابع چگالی انرژی کرنشی نسبت به مختصات محلی نوک ترک عبارت است از:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_{\text{صریح}} = \frac{\partial}{\partial x_k} W\left(\varepsilon_{ij}, x_i\right) , \quad i, j = 1,2 \Big|_{\varepsilon_{ij}=\text{ثابت}} \quad (۳۸)$$

که x_i مختصات محلي تعريف شده در شکل۷ است. ایسکن با حل معادلة (۳۳) میدان تنش و جابجایي اطراف ترک در مادة ناهمگن را مشابه مادة همگن بدست آورد. سپس با جاگذاري میدان تنش و جابجایي در (۳۵) و (۳۶) روابط (۳۹) و (۴۰) را بین انتگرالهاي J_k^* و ضرایب شدت تنش مودهای اول و دوم بدست آورد.

$$J_1^* = \frac{K_{\text{I}}^2 + K_{\text{II}}^2}{E_{\text{tip}}^*} \quad (۳۹)$$

$$J_2^* = \frac{-2K_{\text{I}}K_{\text{II}}}{E_{\text{tip}}^*} \quad (۴۰)$$

که E_{tip}^* مقدار مدول یانگ در محل نوک ترک بوده و از رابطة (۱۹) قابل محاسبه است.

۳-۵- معیار شکست مواد هدفمند

با توجه به شباهت میدان تنش اطراف نوک ترک در مواد همگن و ناهمگن، ژو و آسارو [۹] مفهوم همگن سازي محلي در نزدیک نوک ترک را تعریف کردند. لذا استفاده از معیارهاي شکست که براي مواد همگن ارائه شده اند در مورد مواد هدفمند بلامانع است. در این تحقیق از معیار نرخ رهایي انرژي ماکزیمم که توسط هاسین[1] [۱۰] براي مواد همگن ارائه شده استفاده شده است. طبق این معیار، ترک در جهتي رشد مي کند که مقدار نرخ رهایي انرژي داراي بیشترین مقدار است و رشد ترک زماني آغاز مي شود که این مقدار به حد بحراني برسد. نرخ رهایي انرژي در حالت مود ترکیبي بر اساس حل هاسین به صورت معادلة (۴۱) بدست آمده است.

$$G(\theta) = \frac{4}{E_{\text{tip}}^*}\left(\frac{1}{3+\cos(\theta)}\right)^2 \left(\frac{1-\pi/\theta}{1+\pi/\theta}\right)^{\theta/\pi} \Big[\left(1+3\cos(\theta)\right)K_{\text{I}}^2 + 8\sin(\theta)\cos(\theta)K_{\text{I}}K_{\text{II}} + \left(9-5\cos(\theta)\right)K_{\text{II}}^2\Big] \quad (٤١)$$

زاویة رشد ترک طبق معیار نرخ رهایي انرژي ماکزیمم از (۴۲) بدست مي آید:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} < 0 \;\Rightarrow \theta = \theta_0 \quad (۴۲)$$

پس از تعیین زاویة رشد ترک، معادلة زیر شرط رشد ترک را ارضاء مي کند.

$$G(\theta_0) = G_{\text{cr}}\left(\mathbf{x}_{\text{tip}}\right) \quad (۴۳)$$

٦- مثال هاي عددي

٦-١- نوار شامل ترک لبه اي تحت تنش کششي یکنواخت

---

[1] Hussain

يک صفحة مستطيلي به عرض W و طول L با نسبت طول به عرض۴ تحت تنش کششی يکنواخت σ_0 در دو انتها و شامل يک ترک لبه ای افقي به طول a مطابق شکل۸ در نظر گرفته مي شود. به منظور تعيين ضريب شدت تنش در نوار ترکدار، نسبت طول به عرض صفحه، به اندازة کـافي بـزرگ در نظـر گرفتـه شـده اسـت. صفحه با استفاده از ۱۱ گره در جهت عرض و ۴۱ گره در جهت طول مدل شـده اسـت. از آنجـا کـه راسـتاي تغيير خواص موازي با امتداد ترک است مسـأله داراي تقـارن و تحـت مـود اول شکسـت مـي باشـد. نسـبت پواسون، ثابت و تغيير افقي مدول الاستيسيته مطابق رابطة (۲۷) فرض شده و مسـأله تحـت شـرايط کـرنش صفحه اي حل شده است. ضريب شدت تنش مود اول نرماليزه با مقدار تحليلي [۲] و [۱۱] به ازاي طولهـاي مختلف ترک و نسبت هاي E_2/E_1 متفاوت در جدول۲ مقايسه شده است. با توجه به نتـايج، مقـدار خطـاي حداکثر برابر با ۱/۷درصد است. همچنين افزايش شدت تغييـرات مـدول الاستيسـيته نسـبت بـه x موجـب کاهش ضريب شدت تنش مي شود و برعکس.

۶-۲- بررسي تأثير گراديان خواص موازي با ترک بر ضريب شدت تنش

يک صفحة مستطيلي با ابعاد، شرايط مرزي و گره بندي مشابه مثال قبل، مطابق شکل۸۷ در نظر گرفته مي شود. مادة هدفمند از دو فاز اکسيد آلومينيوم و نيکل با مشخصات مندرج در جدول۱ تشکيل شده است. براي بررسي تأثير گراديان خواص بر ضريب شدت تنش مود اول، نسبت حجمي فازهاي تشکيل دهنده مطابق رابطة (۳۰) در نظر گرفته شده است. براي محاسبة مدول الاستيسيته و نسبت پواسون در هر نقطه از روش موري تاناکا استفاده شده است. شکل۹ ضريب شدت تنش مود اول نرماليزه را بر حسب طول ترک براي مقادير مختلف n نشان مي دهد.

۶-۳- بررسي تأثير گراديان خواص عمود بر ترک بر ضريب شدت تنش

يک صفحة مستطيلي با ابعاد، شرايط مرزي و گره بندي مشابه مثال قبل، در نظر گرفته مي شود. جنس صفحه مشابه مثال قبل است، با اين تفاوت که خواص مکانيکي در جهت عمود بر ترک تغيير مي کنند. مدول الاستيسيته و نسبت پواسون در هر نقطه با استفاده از روش موري تاناکا محاسبه مي شوند. مطابق شکل۱۰ موقعيت ناحية دو فازي در وسط صفحه فرض شده است ($\alpha+\beta=L$). به دليل عدم تقارن مسأله، صفحه تحت شکست مود ترکيبي قرار دارد. بنابراين جهت بررسي شکست مادة هدفمند، از معيار نرخ رهايي انرژي ماکزيمم استفاده مي شود. شکل هاي۱۱ تا ۱۵ نرخ رهايي انرژي را براي طولهاي مختلف ترک بر اساس نحوة توزيع فازها نشان مي دهند. همچنين زاوية اولية رشد ترک با طولهاي مختلف در شکل هاي ۱۶ تا ۲۰ نشان داده شده است.

۷- نتيجه گيري

در اين مقاله، روش MLPG براي تحليل ترک در مادة هدفمند فرمول بندي شد و تأثير گراديان خواص بر ضريب شدت تنش و نرخ رهايي انرژي مورد بررسي قرار گرفت. همانطور که در مثال ۱-۶ نشان داده شد با استفاده از روش MLPG بدون نياز به مش بندي ريز در اطراف ترک، مقدار ضريب شدت تنش با دقت بالايي

قابل محاسبه است. پاسخ بدست آمده نشان مي دهد افزايش نرخ تغييرات مدول الاستيسيته موجب كاهش ضريب شدت تنش مي شود، اين امر به ويژه در مورد ترک هاي بزرگتر اهميت بيشتري مي يابد و مي تواند در طراحي مواد هدفمند مورد استفاده قرار گيرد.

در مثال ۲-۶ گراديان ماده، به فرم تواني و موازي با امتداد ترک فرض شده است. با توجه به شكل ۵ به دليل نزديكي شيب منحني هاي مدول الاستيسيته به يكديگر در محدودة $0.2 \le x/L \le 0.6$ مقدار n تأثير قابل توجهي بر ضريب شدت تنش ندارد. لذا مي توان ضريب شدت تنش را با استفاده از پاسخ تحليلي مثال ۱-۶ به ازاي نسبت $E_2/E_1 = 375/207$ با دقت قابل قبول محاسبه كرد.

مثال ۳-۶ داراي هندسه و خواص مشابه مثال قبل است. با اين تفاوت كه گراديان خواص عمود بر امتداد ترک فرض شده است. همانطور كه در شكل هاي۱۱ تا ۱۵ مشاهده مي شود با كاهش ضخامت ناحية دوفازي و در نتيجه افزايش شدت گراديان خواص، نرخ رهايي انرژي ماكزيمم افزايش مي يابد. شكل هاي ۱۶ تا ۲۰ نيز نشان دهندة افزايش زاوية اولية رشد ترک هستند.

منابع و مراجع

[1] Ching, H.K., and Yen, S.C., "Meshless Local Petrov-Galerkin Analysis for 2D Functionnally Graded Elastic Solids under Mechanical and Thermal Loads", Composites: Part B, Vol. 36, pp. 223-240, (2005).

[2] Erdogan F., "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials", Composites Eng., Vol. 5, pp. 753-770, (1995).

[3] Atluri, S.N., and Zhu, T.L., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", Comp. Mech., No. 22, pp. 117-127, (1998).

[4] Duflot, M., "A Meshless Method with Enriched Weight Functions for Three-dimensional Crack Propagation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 65, pp. 1970–2006, (2006).

[5] Mori, T., and Tanaka, K., "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", Acta Metallurgica, Vol. 21, pp. 571–574, (1973).

[6] Eischen, J.W., "Fracture of Nonhomogeneous Materials", Int. J. Fract. Vol. 34, pp. 3–22, (1987).

[7] Jin, Z.H., and Noda, N., "Crack-tip Singular Fields in Nonhomogeneous Materials", J. Appl. Mech. Vol. 61, pp. 738-740, (1994).

[8] Rice, J.R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", J. Appl. Mech. Vol. 35, pp. 379–386, (1968).

[9] Gu, P., and Asaro, R.J., "Crack Deflection in Functionally Graded Materials", Int. J. Solids. Struct., Vol. 34, pp. 3085-3098, (1997).

[10] Hussain, M.A., Pu, S.L., and Underwood, J., "Strain Energy Release Rate for a Crack under Combined Mode I and Mode II, "Fracture Analysis, ASTM STP 560, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 2-28, (1974).

[11] Anderson, T.L., "*Fracture Mechanics: Fundamentals and Application*", CRC Press, (1995).

فهرست نمادهاي انگليسي

$\mathbf{u}_I$: پارامتر گره اي در گرة Iام

$\mathbf{u}^{h}$: متغير ميدان آزمايشي

w_I : تابع وزن گرة Iام

$\mathbf{f}_I$: بردار نيروي گرة Iام

$\mathbf{c}$: ماتريس نرمي

$\mathbf{K}_I$: ماتريس سختي گرة Iام

W : چگالی انرژی کرنشی

K_{I} : ضريب شدت تنش مود اول

K_{II} : ضريب شدت تنش مود دوم

G : نرخ رهايي انرژي

$G_{\mathrm{cr}}\left(\mathbf{x}_{\mathrm{tip}}\right)$: حد بحراني نرخ رهايي انرژي در محل نوک ترک

فهرست نمادهاي يوناني

φ : تابع تنش ایری

ϕ_I : تابع شکل گرة Iام

μ : مدول برشي

κ : مدول بالک

∇^2 : عملگر دو بعدی لاپلاس

θ_0 : زاوية شروع رشد ترک

جدولها

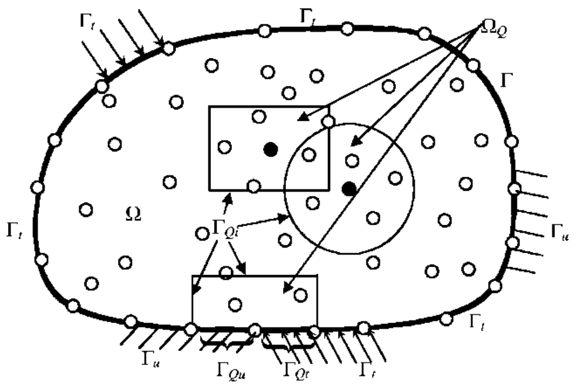
جدول۱- خواص مکانيکي اکسيد آلومينيوم و نيکل

ماده	مدول يانگ E (GPa)	نسبت پواسون ν	چقرمگي شکست K_{Ic} ($GPa\sqrt{m}$)
اکسيد آلومينيوم	360	0.2	4
نيکل	200	0.33	100

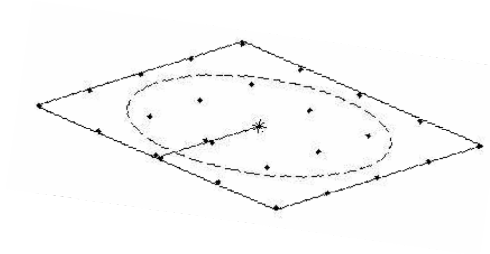
جدول۲- ضريب شدت تنش نرماليزة مود اول ترک لبه اي در نوار تحت تنش کششي يکنواخت

روش	E_2/E_1	$\frac{K_I}{\sigma_0\sqrt{\pi a}}$				
		$a/w=0.5$	$a/w=0.4$	$a/w=0.3$	$a/w=0.2$	$a/w=0.6$
حاضر	0.1	1.3034	1.8522	2.5534	3.5576	5.1205
	0.2	1.3880	1.8290	2.4339	3.3333	4.7729
	1	1.3742	1.6688	2.0894	2.8087	4.0482
	5	1.1390	1.3818	1.7676	2.3878	3.4836
	10	1.0192	1.2507	1.6172	2.2097	3.2702
تحليلي [۲و۱۱]	0.1	1.2965	1.8581	2.5699	3.5701	5.1880
	0.2	1.3956	1.8395	2.4436	3.3266	4.7614
	1	1.3734	1.6628	2.1066	2.8298	4.0302
	5	1.1318	1.3697	1.7483	2.3656	3.4454
	10	1.0019	1.2291	1.5884	2.1762	3.2124

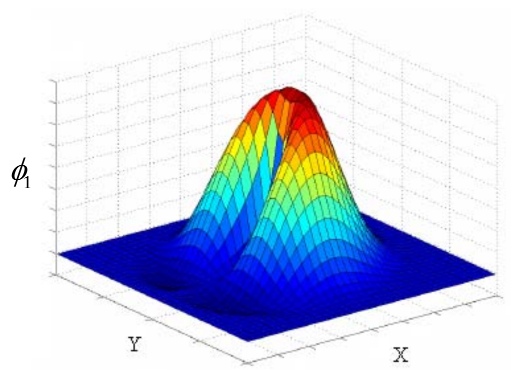
شکلها



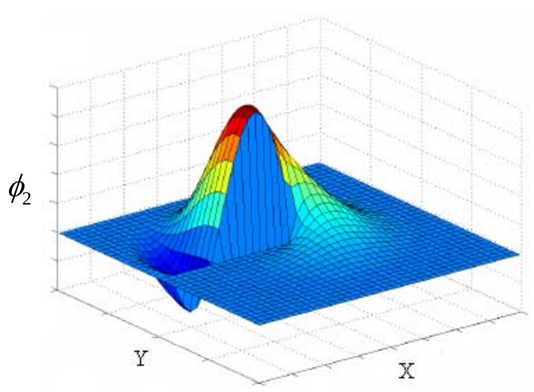
شکل ۱- دامنه و مرزها در روش MLPG : Ω دامنهٔ مسأله، Γ_u مرز اساسي، Γ_t مرز طبيعي، Ω_Q دامنهٔ تربيع و محدود به مرز Γ_Q، Γ_{Qu} قسمتي از مرز اساسي که با مرز Ω_Q تلاقي دارد، Γ_{Qt} قسمتي از مرز طبيعي که با دامنهٔ Ω_Q تلاقي دارد.



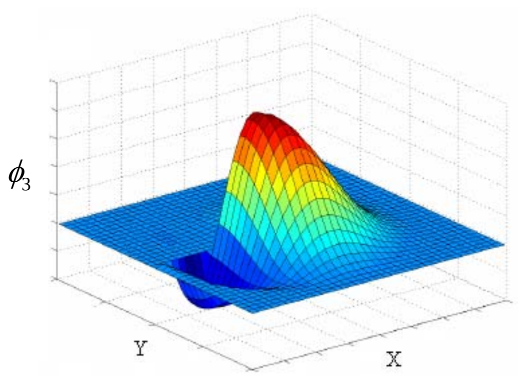
(الف)



(ب)

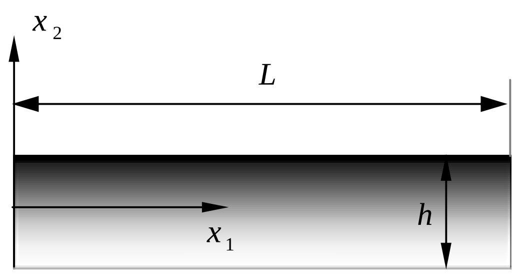


(پ)

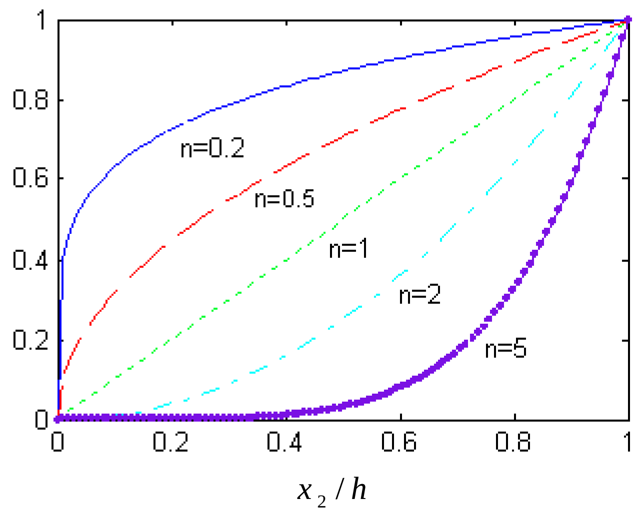


(ت)

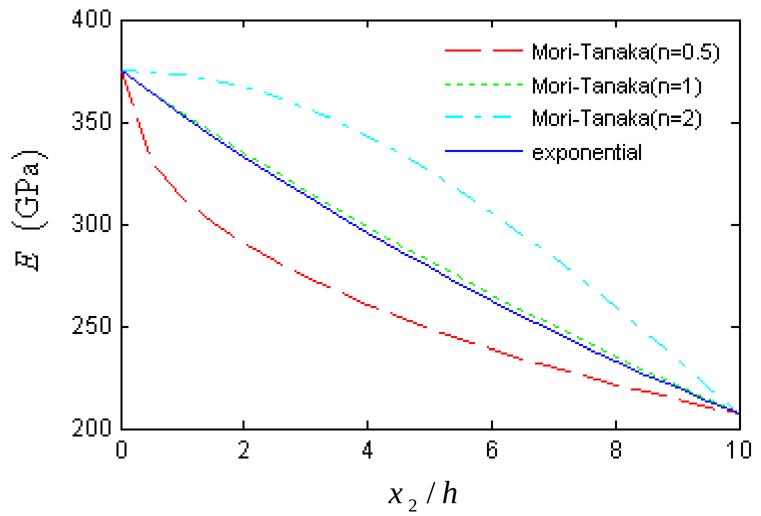
شکل ۲- توابع شکل بدست آمده از توابع وزن رابطهٔ (۲۶): (الف) صفحهٔ ترکدار، ب) Φ_1، پ) Φ_2 ، ت) Φ_3



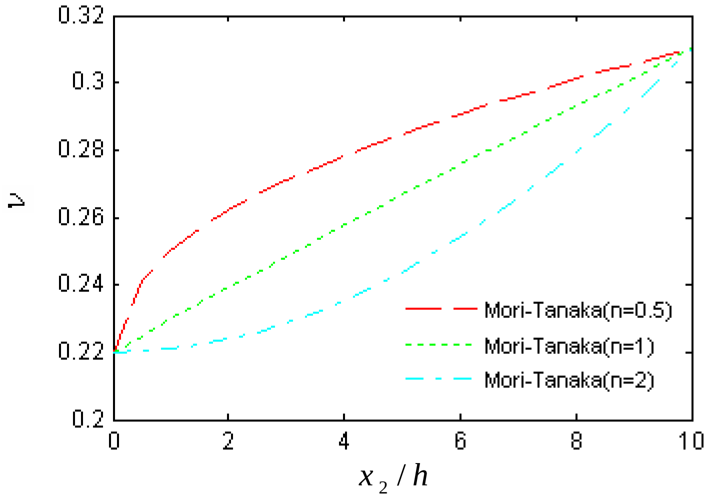
شکل٣- مدل دو بعدي مادة هدفمند



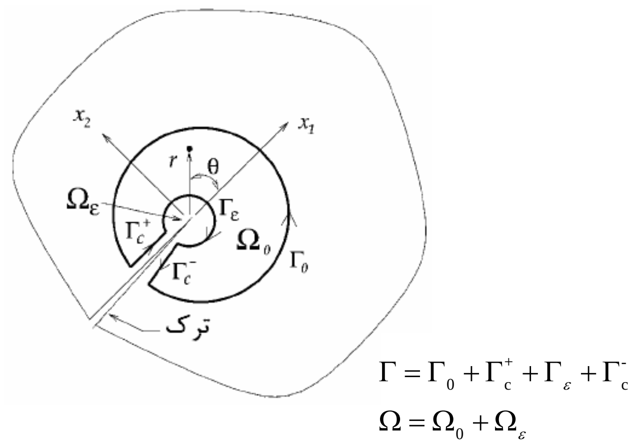
شکل٤- تغيير نسبت حجمي فاز سراميکي بر حسب ضخامت بدون بعد براي مقادير مختلف n



شکل٥- تغيير مدول الاستيسيتة بدست آمده از روش موري- تاناکا و تابع نمايي (٢٧) بر حسب ضخامت بدون بعد



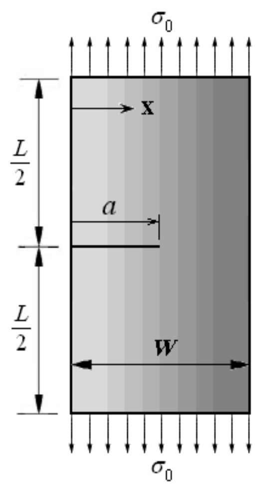
شکل٦- تغییر نسبت پواسون بدست آمده از روش موري- تاناکا بر حسب ضخامت بدون بعد



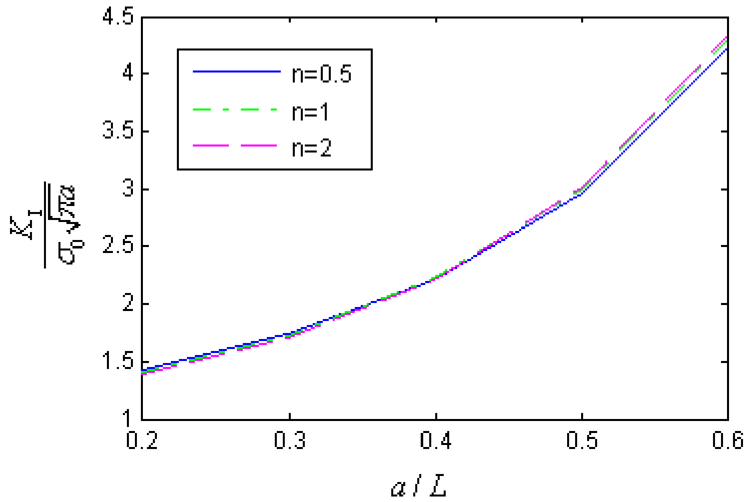
$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ + \Gamma_\varepsilon + \Gamma_c^-$$

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_\varepsilon$$

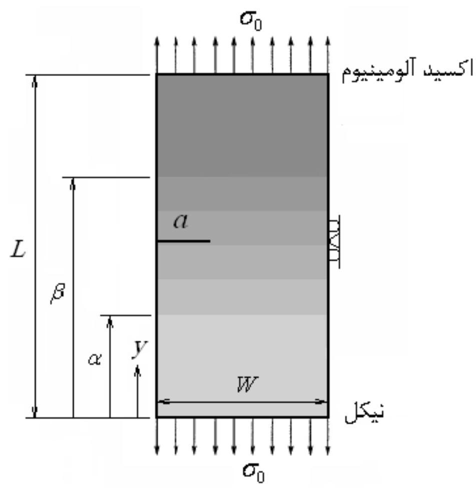
شکل ۷- الگوي استفاده از روش انتگرال J



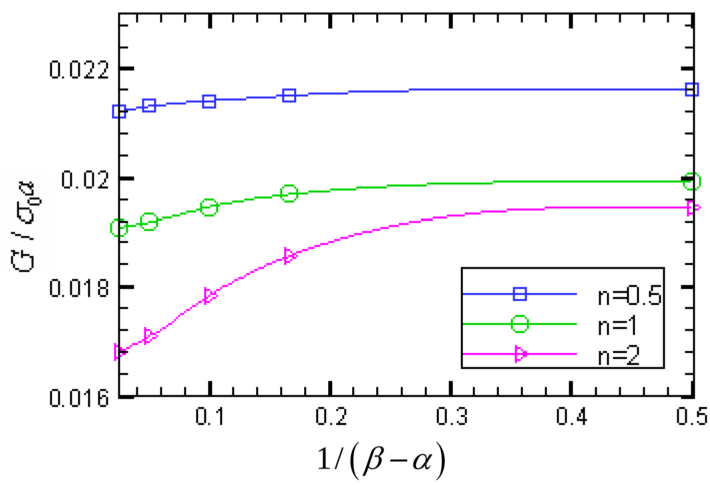
شکل ۸- هندسه و بارگذاري نوار از جنس مادة هدفمند با گرادیان موازي با ترک لبه اي



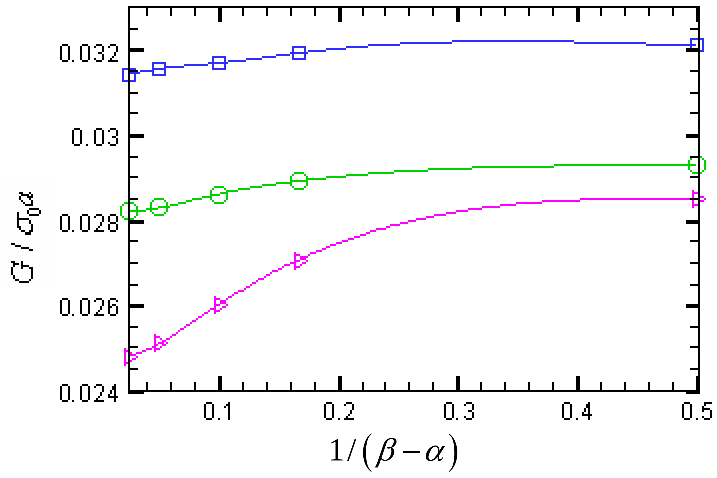
شکل ۹- ضريب شدت تنش نرماليزة مود اول ترک لبه اي بر اساس روش موري تاناکا براي مقادير مختلف n



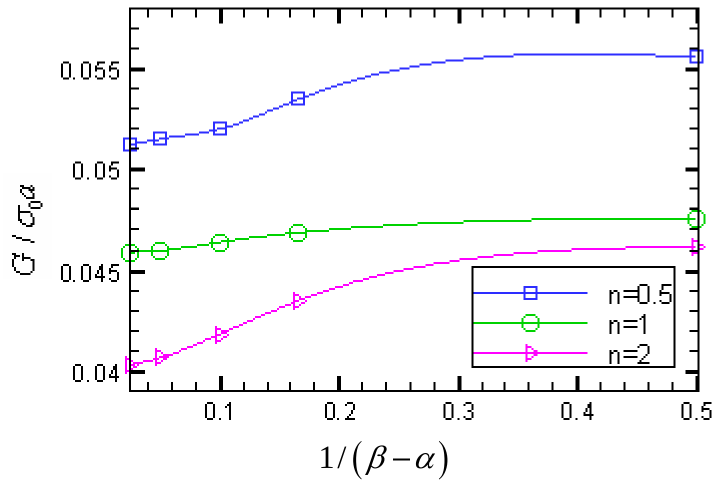
شکل ۱۰- هندسه و بارگذاري نوار هدفمند با گراديان عمود بر ترک لبه اي



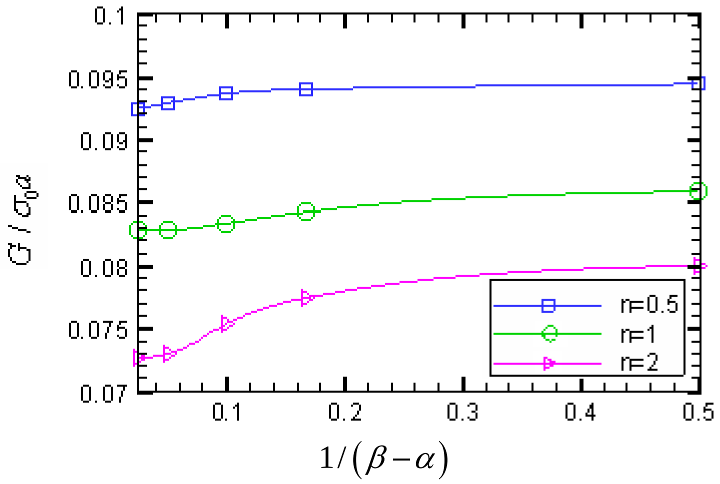
شکل ۱۱- نرخ رهايي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.2\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



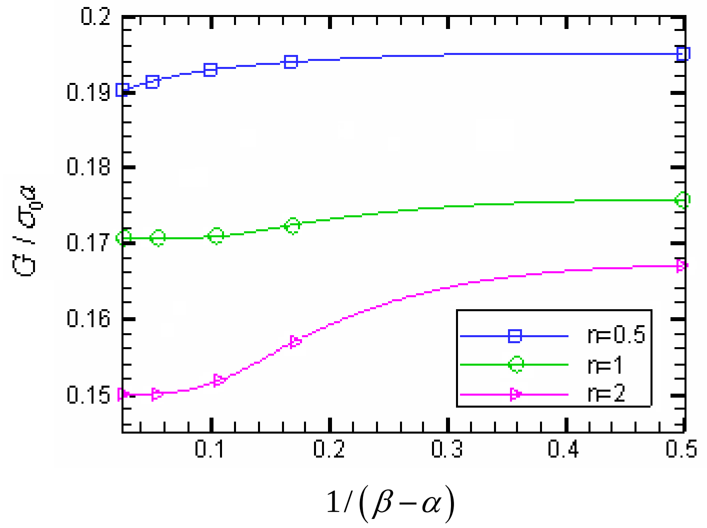
شکل ۱۲- نرخ رهايي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.3\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



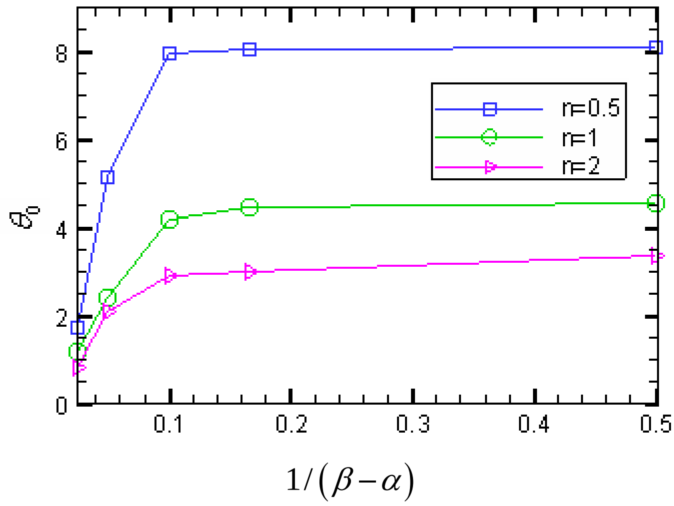
شکل ۱۳- نرخ رهايي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.4\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



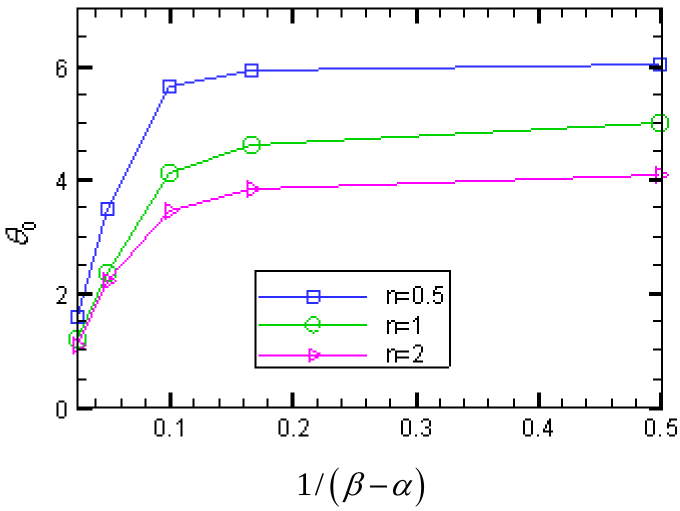
شکل ١٤- نرخ رهايي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.5\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



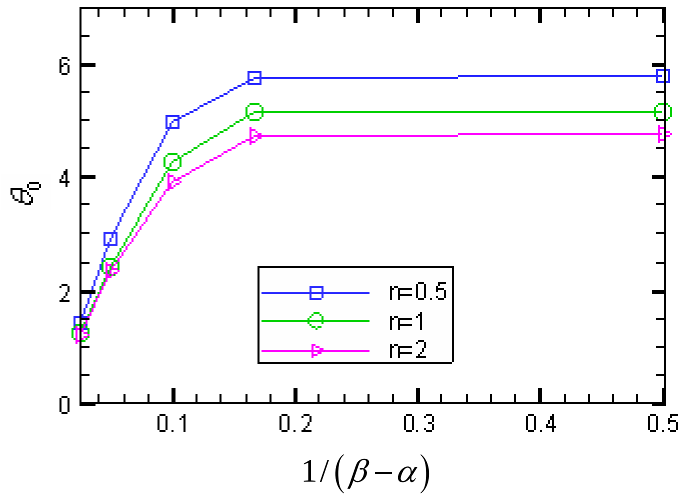
شكل ١٥- نرخ رهايي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.6\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



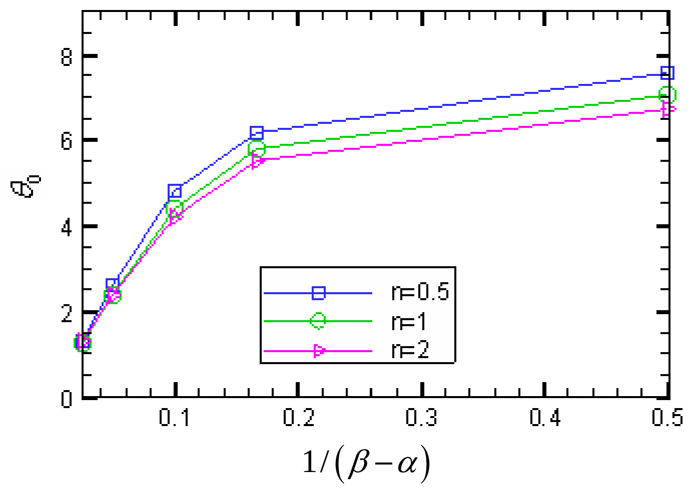
شكل ١٦- زاوية اولية رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.2\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



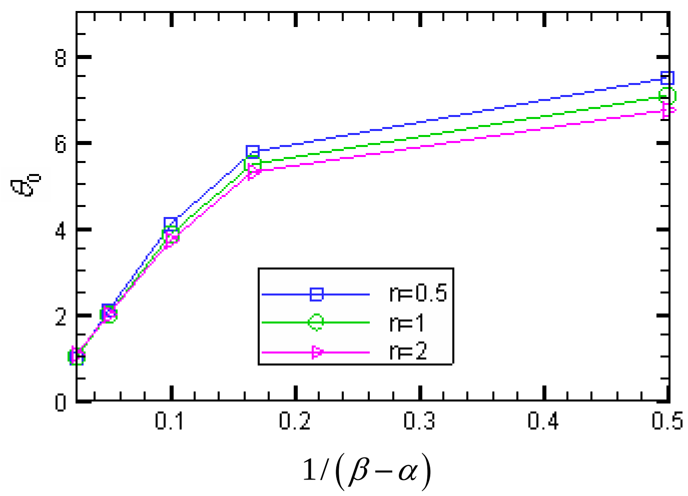
شكل ١٧- زاوية اولية رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.3\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



شکل ۱۸- زاوية اولية رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.4\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



شکل ۱۹- زاوية اولية رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.5\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



شکل ۲۰- زاوية اولية رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.6\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n

Abstract

This paper presents crack analysis in a finite Functionally Graded plate using one of mesh-free methods called the Meshless Local Petrove-Galerkin (MLPG). Shape functions are obtained by Moving Least Squares approximation method. In order to solve fracture problems without need to any additional nodes, the weight function is modified. The path independent *J* integrals developed for non-homogeneous materials are used to calculate the stress intensity factors (SIFs) in mixed-mode problems. Assuming that the crack is parallel to the material gradient, an example including an edge-cracked plate is presented to evaluate the accuracy of numerical method. A good agreement is obtained between the results of the presented method and the reference solutions. Then the effect of direction and intensity of material gradient on SIFs and energy release rate is considered by solving some examples. The results reveal the inverse relation between the intensity of elastic modulus gradient and SIF in mode-I fracture condition. Also the energy release rate and the crack initiation angle increase with increasing the intensity of compliancy gradient normal to crack direction.