ISME

ارتعاشات صفحه چند لایه هوشمند با لایه پیزوالکتریک

سیدمحمدعلي امين يزدي[۱]
دانشجوي دکتري

جليل رضائي پژند[۲]
دانشيار

در این مقاله اثر لایه پیزوالکتریک به عنوان یک خود-حسگر و خود-محرک بر روي پاسخ یک صفحه سالم چند لایه متقارن مرکب بصورت تحليلي مورد بررسي قرار گرفته است. با استفاده از اصل هميلتون معادله حرکت سيستم بدست آمده و مقادير حاصل با نتايج حاصل از مدل اجزاء محدود مقايسه شده است. با توجه به عدم وجود المانهاي لازم براي مدل کردن المانهاي پيزوالکتريک در نرم افزار از بار حرارتي معادل براي مدل کردن المانهاي پيزوالکتريک به عنوان محرک استفاده شده است. بر طبق نتايج بدست آمده تغيير زاويه الياف براي چيدمان ضربدري[۳] متقارن تاثير بسزايي بر مقدار فرکانس دارد. افزايش مقدار ولتاژ سبب کاهش زمان ميرا شدن نوسانات خواهد شد. زمان ميرايي علاوه بر مقدار ضريب ولتاژ تابع نوع چيدمان صفحه چند لايه نياز مي باشد

واژه هاي راهنما: کنترل ارتعاشات، صفحه هوشمند، لايه پيزوالکتريک، صفحه مرکب چند لايه.

۱- مقدمه

يكي از مشكلات بزرگ در صنايع چگونگي كنترل ارتعاشات نا خواسته و آلودگي هاي صوتي حاصل از عملكرد دستگاههاي مختلف مي باشد. براي حل اين مشكل مي توان از سيستمهاي كنترل انفعالي[٤] و يا فعال[٥] استفاده كرد. سيستمهاي انفعالي در شرايط محيطي ثابتي كار ميكنند كه بواسطه عملكرد ساده و راحتي كار با آنها بيش از سيستمهاي فعال مورد استفاده قرار گرفته اند.

براي تشخيص خودكار شرايط محيطي مي توان از سيستمهاي فعال استفاده نمود. در اين سيستمها پاسخ سازه بوسيله حسگرها اندازه گيري شده و پس از بررسي آن بوسيله كنترلر، فرامين لازم به محركها جهت استهلاک ارتعاشات ارسال مي شود. در طي اين فرآيند مي توان هندسه و خواص فيزيكي سازه هاي هوشمند را تغيير داد تا به نتيجه مطلوب دست يافت. همانگونه كه ذكر شد اجزاء سازه هوشمند شامل حسگرها، محركها و خود سيستم مي باشد. اين نحوه كنترل در سيستمهايي نظير شكل دهي مواد، كنترل ارتعاشات، تشخيص ترک و

---

[۱] دانشجوي دکتري، دانشکده مهندسي مکانيک، دانشگاه فردوسي مشهد
[۲] نويسنده مسئول، دانشيار، دانشکده مهندسي مکانيک، دانشگاه مشهد jrezaeep@ferdowsi.um.ac.ir

[3] Angle-ply
[4] Passive system
[5] Active system

محافظت ساختمانها و سازه ها مورد استفاده قرار مي گيرد. در اين بين استفاده از مواد پيزوالكتريک بواسطه وزن كم، ابعاد كوچک، سختي بالا و پاسخ سريع بيشتر مورد توجه مي باشند. محققين بسياري در اين زمينه تلاش نموده اند.

مين[6] [۱] در سال ۱۹۹٤ در تحقيق خود به بررسي محل بهينه و اندازه محركهاي پيزوالكتريک بر روي تير و صفحه همسانگرد با صرفنظر از ضخامت لايه چسباننده پرداخته است. كوكونيس[7][۲] نيز در همان سال با استفاده از تئوري مرتبه اول تغيير شكل برشي معادلات حركت يک صفحه مركب همراه با لايه پيزوالكتريک را بدست آورده است. چن[8] [۳] در سال ۱۹۹٦ به بررسي مد شكلهاي سازه هاي هوشمند با استفاده از مواد پيزوالكتريک پرداخت. يو[9] [٤] در سال ۱۹۹۷ از روش اجزاء محدود براي بررسي صفحات چند لايه شامل مواد پيزوالكتريک استفاده نمود. هي[10][۵] در سال ۲۰۰۲ در تحقيق خود به بررسي اثر كنترل ارتعاشات بصورت انفعالي پرداخته است. اثر چيدمان لايه ها بر مرز فلاتر صفحه سوراخدار با وصله كامپوزيتي توسط مولفين مورد بررسي قرار گرفته است كه بطور كامل در مرجع [۷] توضيح داده شده است. در مرجع [۸] نيز بررسي رفتار ائروالاستيسيته يک صفحه سوراخ دار فلزي تعمير شده با لايه ماده مركب يا پيزوالكتريک مورد بررسي قرار گرفته است. در اين تحليل اثر پارامترهاي نظير جرم لايه، محل قرار گيري لايه و همچنين اثر اعمال ولتاژ مورد بررسي قرار گرفته است. در اين مقاله سعي شده است تا با استفاده از ماده پيزوالكتريک به عنوان يک خود-حسگر، خود-محرک فركانس صفحه محاسبه شود. در اين روش ميزان ولتاژ اعمالي توسط خود سيستم كنترلي مستقل و متناسب با مقدار كرنش صفحه اعمال مي گردد.

۲- معادلات حاكم بر مساله

در اين مقاله سعي شده است تا با استفاده از اصل هميلتون، معادلات حركت براي صفحه اي از جنس مواد مركب چند لايه با ابعاد ۸×۲۰۰×۲۰۰ ميليمتر كه لايه پيزوالكتريک بصورت كامل بر روي دو طرف آن قرار گرفته است (شكل ۱) بدست آورده شود. صفحه پايه از جنس گرافيک/اپوكسي و لايه پيزوالكتريک از جنس PZT مـي باشـد كه خواص مكانيكي آنها در جدول ۱ داده شده است. شرايط مرزي اعمال شده بصـورت تكيـه گاههـاي سـاده در چهار لبه صفحه مي باشد. مي توان نوشت:

$$\int_{t1}^{t2} \delta\left(T - U + W_{nc}\right)\, dt = 0 \qquad (۱)$$

كه در اين رابطه T انرژي جنبشي، U انـرژي پتانسـيل و W_{nc} كـار انجـام شـده توسـط نيروهـاي غيـر پايسـتار ميباشند. براي استفاده از رابطـه (۱) بايسـتي معادلـه حـاكم بـر مـواد پيزوالكتريـک را بدسـت آورد، مـي تـوان نوشت[۶]:

---
[6] Main
[7] Koconis
[8] Chen
[9] Yu
[10] He

$$\{\sigma\} = \left[c^E\right]\{\varepsilon\} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k E$$
$$D_k = \{e_{31} \quad e_{32} \quad 0\}\{\varepsilon\} + \varepsilon^s E \qquad (۲)$$

که در این رابطه $\{\sigma\},\{\varepsilon\},\{D\},\{E\},\left[c^E\right],\{e\}$ به ترتیب بردار ضرایب پیزوالکتریک، ماتریس سختي در ولتاژ ثابت، بردار میدان الکتریکي، بردار جابجایي الکتریکي، بردار کرنش مکانیکي و بردار تنش مکانیکي هستند. براي استفاده از اصل همیلتون مي بایست تغییرات ترمهاي مورد نظر را بدست آورد. مي توان نوشت:

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV + \int_{V_p} \delta D\ EdV \qquad (۳)$$

با توجه به قانون هوک مي توان براي کرنش صفحه نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} - zw_{,xx} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} - zw_{,yy} \\ \varepsilon_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} \end{aligned} \qquad (٤)$$

که در این روابط u,v,w به ترتیب بیان کننده جابجایي در راستاهاي x,y,z مي باشند. در مدل این مساله براي لایه پیزوالکتریک فرض شده است که جهت میدان الکتریکي و قطبیت و جابجائي ها موازي یکدیگر بوده و بر سطح لایه عمود مي باشد (عمود بر صفحه $E_3 \neq 0$)، لذا مي توان از ترمهاي مربوط به E_1,E_2 صرفنظر نمود.
با توجه به معادله بنیادین مواد پیزوالکتریک مي توان نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} - zw_{,xx} - d_{31}E_3 \\ \varepsilon_y &= v_{,y} - zw_{,yy} - d_{32}E_3 \\ \varepsilon_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} \end{aligned} \qquad (۵)$$

در این رابطه E_3 مولفه بردار الکتریکي در راستاي عمود بر صفحه، d_{31}, d_{32} ضرایب ماتریس کوپلینگ پیزوالکتریک مي باشند. در این مدل سازي باید توجه داشت که تغییرات ولتاژ باید بصورت خطي باشد. در ادامه این بحث از المان پیزوالکتریک به عنوان یک حسگر و محرک استفاده شده است، بطوریکه میزان ولتاژ اعمال شده براي کنترل ارتعاشات متناسب با میزان کرنش اندازه گیري شده توسط المان حسگر پیزوالکتریک در نظر گرفته مي شود. بنا به قانون بازگشتي در کنترل مي توان میزان ولتاژ اعمالي را با ضریب تناسب K_P به مقدار کرنش مرتبط ساخت، لذا مي توان نوشت:

$$q(t) = \int_{A_s} D_3 dA_s = \int_{A_s} e_{31}K_P\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\ dA_s \qquad (٦)$$

e_{31}, D_3 و $q(t)$ به ترتيب درايه هاي بردار جابجائي الكتريكي در راستاي عمود بر صفحه ، بردار پيزوالكتريک و ميزان جريان مي باشند. با توجه به رابطه (٤) ميزان ولتاژ خروجي برابر است با:

$$V_s^i(t) = K_P C_r^i \varepsilon_i \quad (i = x, y) \tag{۷}$$

كه در اين رابطه V_s^i ولتاژ اعمالي، C_r^i ظرفيت حسگر و K_P ضريب اعمال ولتاژ مي باشد. با توجه به مطالب ذكر شده مي توان بجاي تغييرات ميدان جابجائي الكتريكي از تغييرات ميدان كرنش استفاده نمود. اكنون مي توان تغييرات ولتاژ را بصورت زير نوشت:

$$E_3(t) = \frac{K_p}{h_a}\left[V_s^x(t) + V_s^y(t)\right] = -z\frac{K_p}{h_a}\left[C_r^x w_{,xx} + C_r^y w_{,yy}\right] \tag{۸}$$

كه h_a ضخامت لايه پيزوالكتريک و $E_3(t)$ مولف بردار ميدان الكتريكي در راستاي عمود بر صفحه مي باشد. براي محاسبه انرژي جنبشي بايد ابتدا ميدان جابجايي را مشخص نمود و سپس با استفاده از مشتق گيري نسبت به زمان ميدان سرعت را بدست آورد، مي توان نوشت:

$$\vec{u}_{,t} = \vec{u}_{0,t} + z\vec{\psi}_{,t} \tag{۹}$$

در اين رابطه $\vec{u}$ بردار جابجائي، $\vec{u}_0$ بردار جابجائي لايه مياني و $\vec{\psi}$ بردار انحناء لايه مياني مي باشند، لذا با توجه به تعريف انرژي جنبشي مي توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2}\int_{V_p} \rho_p\left[w_{,t}^2 + (zw_{,xt})^2 + (zw_{,yt})^2\right] dV_p + \frac{1}{2}\int_{V_{pe}} \rho_{pe}\left[w_{,t}^2 + (zw_{,xt})^2 + (zw_{,yt})^2\right] dV_{pe} \tag{۱۰}$$

كه زير نويس P و Pe به ترتيب مربوط به صفحه پايه و لايه پيزوالكتريک مي باشند. تغييرات انرژي جنبشي به صورت زير خواهد بود:

$$\delta T = \int_{\Omega_p}\left[I_0 w_{,t}\delta w_{,t} + I_2\left(w_{,xt}\delta w_{,xt} + w_{,xt}\delta w_{,yt}\right)\right] dxdy + \int_{\Omega_{pe}}\left[\bar{I}_0 w_{,t}\delta w_{,t} + \bar{I}_2\left(w_{,xt}\delta w_{,xt} + w_{,xt}\delta w_{,yt}\right)\right] dxdy \tag{۱۱}$$

در اين رابطه I_0, I_2 عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_P dz = \rho_P \begin{Bmatrix} h \\ h^3/12 \end{Bmatrix} \tag{۱۲}$$

چنانچه در رابطه (۱۲) ضخامت لایه پیزوالکتریک (h_a) و دانسیته لایه پیزوالکتریک (ρ_{pe}) مورد استفاده قرار گیرد مقادیر $\bar{I}_0, \bar{I}_2$ بدست خواهند آمد. همانطور که اشاره شد در اثر اعمال ولتاژ به لایه پیزوالکتریک در این لایه نیروهاي كششي و ممان خمشي بوجود مي آيند که مي بایست کار آنها را نیز بدست آورد:

$$\delta W_E = \int_A \delta D_3 \left(-L_E \frac{d^2 q}{dt^2} - R_E \frac{dq}{dt} \right) dA \tag{۱۳}$$

که در این رابطه δD_3 تغییرات مولفه بردار جابجائي الكتريكي در راستاي عمود بر صفحه، L_E ظرفیت القاء مغناطیسي، R_E مقاومت مغناطیسي و q جریان جاري در مدار است. با توجه به تعریف $q(t)$ در رابطه (٦) مي توان نوشت:

$$\delta W = -\int_A \delta D_3 dA \times \int_A \left(L_E \frac{d^2 D_3}{dt^2} + R_E \frac{dD_3}{dt} \right) dA \tag{۱٤}$$

اکنون با جایگذاري روابط (۳) تا (۱٤) در رابطه (۱) و با انتگرال گیري جزء بجزء مي توان معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات صفحه چند لایه با لایه پیزوالکتریک را بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} & A_1 w_{,xxxx} + A_2 w_{,yyyy} + A_3 w_{,xxyy} + A_4 w_{,xxxy} + A_5 w_{,xyyy} + \\ & + \left(I_0 + \bar{I}_0\right) w_{,tt} - L\left(w_{,xxtt} + w_{,yytt}\right) = F(t) - R\left(w_{,xt} + w_{,yt}\right) \end{aligned} \tag{۱٥}$$

که در این رابطه

$$A_1 = \tilde{D}_{11} - \frac{K_p d_{31}}{h_a} C_r^x D_{11}\Big|_{pe} - \frac{K_p h_a^2 C_r^x}{12}\left[2e_{31} d_{31} K_p \frac{C_r^x}{h_a} + \frac{d_{31}}{h_a^3} D_{12}\Big|_{pe} - e_{31} \right] \tag{۱٦}$$

$$A_2 = \tilde{D}_{22} - \frac{K_p d_{31}}{h_a} C_r^y D_{22}\Big|_{pe} - \frac{K_p h_a^2 C_r^y}{12}\left[2e_{31} d_{31} K_p \frac{C_r^y}{h_a} + \frac{d_{31}}{h_a^3} D_{12}\Big|_{pe} - e_{31} \right] \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned} A_3 = {} & 2\left(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}\right) + \frac{h_a^2 e_{31} K_p}{12}\left(C_r^x + C_r^y\right) - \frac{d_{31} K_P}{h_a}\left[C_r^x \left(D_{12} + D_{22}\right)\Big|_{pe} + C_r^y \left(D_{11} + D_{12}\right)\Big|_{pe} \right] \\ & - \frac{e_{31} d_{31} K_p^2 h_a}{3} C_r^x C_r^y \end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$A_4 = 2\left[2\tilde{D}_{16} - \frac{d_{31} K_p C_r^x}{h_a} \left(D_{16} + D_{26}\right)\Big|_{pe} \right] \tag{۱۹}$$

$$A_5 = 2\left[2\tilde{D}_{26} - \frac{d_{31}K_p C_r^y}{h_a}\left(D_{16} + D_{26}\right)\Big|_{pe}\right] \quad (۲۰)$$

در روابط فوق $\tilde{D}_{ij}$ ضرايب سختي معادل صفحه مركب متشكل از ماده كامپوزيتي و لايه هاي پيزوالكتريك بدون در نظر گرفتن اثر ولتاژ و D_{ij} مربوط به لايه پيزوالكتريک عملگر مي باشد. اكنون براي حل معادله (۱۵) مي توان از روش كانترويچ استفاده نمود. در اين روش پاسخ مساله بصورت $w(x,y) = F(x)\ G(y)$ فرض مي شود. پاسخ $G(y)$ بايد بصورتي انتخاب شود كه شرايط مرزي در راستاي محور y را ارضاء كند لذا پاسخ $G(y) = \sin(\pi\ y)$ فرض شده است. با ضرب طرفين معادله (۱۵) در $G(y)$ و انتگرال گيري نسبت به y مي توان معادله (۱۵) را به يک معادله ديفرانسيل كامل مرتبه چهار تبديل نمود:

$$\frac{d^4W}{dx^4} + R_1\frac{d^3W}{dx^3} + R_2\frac{d^2W}{dx^2} + R_3\frac{dW}{dx} + R_4 = 0 \quad (۲۱)$$

كه در اين معادله ضرايب R_1, R_2, R_3, R_4 عبارتند از:

$$R_1 = 4\frac{A_4}{A_1}\frac{\int_0^l y' y\,dy}{\int_0^l y^2\,dy} \quad (۲۲)$$

$$R_2 = \frac{1}{A_1}\left(2A_3\frac{\int_0^l y'' y\,dy}{\int_0^l y^2\,dy}\right) \quad (۲۳)$$

$$R_3 = \frac{1}{A_1}\left(4A_5\frac{\int_0^l y''' y\,dy}{\int_0^l y^2\,dy}\right) \quad (۲٤)$$

$$R_4 = \frac{1}{A_1}\left(+A_2\frac{\int_0^l y'''' y\,dy}{\int_0^l y^2\,dy} - \hat{I}_0\,\omega^2\right) \quad (۲۵)$$

$$\hat{I}_i = I_i + \overline{I_i} \quad (i = 0,2) \quad (۲٦)$$

جواب معادله (۲۱) را مي توان بصورت زير در نظر گرفت:

$$W = A_1 e^{p_1 x} + A_2 e^{p_2 x} + A_3 e^{p_3 x} + A_4 e^{p_4 x} \quad (۲۷)$$

که $P_i\left(i=1,2,3,4\right)$ ريشه هاي معادله مشخصه و A_i ضرايب مجهولي مي باشند که با اعمال شرايط مرزي بدست مي آيند. با فرض شرايط مرزي تکيه گاهي ساده مي توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 \\ e^{p_1} & e^{p_2} & e^{p_3} & e^{p_4} \\ p_1^2 e^{p_1} & p_2^2 e^{p_2} & p_3^2 e^{p_3} & p_4^2 e^{p_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (۲۸)$$

براي داشتن جواب غير بديهي مي بايست دترمينان ضرايب در رابطه (۲۸) مساوي صفر باشد. اکنون با در اختيار داشتن حل تحليلي مي توان به بررسي پارامترهاي مختلف پرداخت. قبل از اين بحث جهت اطمينان از صحت حل تحليلي و بررسي دقت آن در بخش بعد مدل اجزاء محدود مساله ارائه شده است و نتايج حاصل از دو روش با هم مقايسه شده است.

۳- مدل اجزاء محدود

اکنون براي اطمينان از صحت نتايج بدست آمده از روش توضيح داده شده در قسمت قبل مدل اجزاء محدود مساله بکمک نرم افزار MSC.NASTRAN درست و نتايج حاصل از دو روش در جدول ۲ با يکديگر مقايسه شده است. در اين بخش به بيان مدل اجزاء محدود مساله پرداخته شده است.

براي المان بندي صفحه کامپوزيتي از ۲۵۰ المان چهارگرهي (سه جابجائي و يک چرخش) CQUAD4 استفاده شده است. همانطور که قبلاً نيز بيان شده در مدل اين مساله از دو لايه پيزوالکتريک يکي به عنوان حسگر و ديگري بعنوان محرک استفاده شده است. به منظور استفاده از ماده پيزو صرفاً به منظور يک حسگر از المان MPC-4 استفاده شده است که بر اساس آن جابجائي لايه پيزو وابسته به جابجائي صفحه مي باشد. لازم به يادآوري است که در اين قسمت نيز براي المان بندي لايه پيزو از ۲۵۰ المان CQUAD4 استفاده شده است. در نتيجه در هر مرحله مقدار کرنش صفحه توسط اين المانها در فايل DAM ذخيره مي گردد. در اين مراحل اعمال ولتاژ توسط لايه پيزو مدنظر نمي باشد. در ادامه لايه پيزوالکتريکي که به عنوان محرک استفاده شده است مقدار ولتاژي متناسب با مقدار کرنش ذخيره شده در فايل DAM اعمال مي کند. اين مقدار ولتاژ متغيير با زمان مي باشد. براي استفاده از لايه پيزو به عنوان محرک المان خاصي در اين بسته نرم افزاري وجود ندارد لذا از بارگذاري حرارتي براي مدل کردن لايه پيزو به عنوان محرک استفاده شده است. با توجه به قانون هوک مي توان اثرات حرارت در تنش را بصورت زير بيان نمود[۶]:

$$\left[\sigma\right]=\left[c^{E}\right]\left\{\varepsilon\right\}-\left[c^{E}\right]\left\{\alpha\right\}\Delta\theta \qquad (۲۹)$$

كه در اين رابطه $\{\alpha\}$ بردار ضريب انبساط حرارتي و$\Delta\theta$ اختلاف درجه حرارت مـي باشـد. مطـابق بـا اسـتاندارد $IEEE$ مي توان اثر مستقيم و معكوس در مواد پيزوالكتريک را بصورت خطي در قالب مدل رياضي نظيـر رابطـه (۲) به كميتهاي تنش، كرنش، ميدان الكتريكي و جابجائي الكتريكي مـرتبط سـاخت. چنانچـه رابطـه (۲۹) را بـا رابطه (۲) مقايسه شود مي توان نتيجه گرفت:

$$\left[d\right]^{T}\left\{E\right\}=\left\{\alpha\right\}\Delta\theta \qquad (۳۰)$$

معمولاً كارخانه هاي سازنده مواد پيزوسراميک اطلاعات مربـوط بـه مـاتريس كوپلينـگ پيزوالكتريـک $[d]$ را ارائه مي دهند كه براي محاسبه ماتريس$[e]$ مي توان از آن استفاده نمود:

$$\left[e\right]^{T}=\left[c^{E}\right]\left[d\right]^{T} \qquad (۳۱)$$

با توجه به آنكه تنها مقادير d_{31},d_{32},d_{33} مخالف صفر مي باشـند، مـي تـوان رابطـه (۳۰) را بصـورت زيـر نوشت[۶]:

$$d_{3i}\frac{\Delta\phi_3}{h_a}=\alpha_i\Delta\theta \quad \left(i=1,2,3\right) \qquad (۳۲)$$

كه در اين رابطه $\Delta\phi_3$ اختلاف ولتاژ دو سر الكترود مي باشد. بر اساس اين روش مقادير ولتاژ متناسب با اخـتلاف درجه حرارت و مقادير ضرايب پيزوالكتريک متناسب با ضرايب انبساط حرارتي در آناليز حرارتي مي باشد

٤- بحث بر روي نتايج

براي اطمينان از صحت نتايج بدست آمده در اين تحقيق مقادير فركانس هاي اول تا سوم صفحه هاي چند لايه ارتوتروپيک و صليبي بازاي چيدمانهاي مختلف با نتايج اجزاء محدود در جدول ۲ مقايسه شده است. در شكل ۲ نيز زمان ميرا شدن نوسانات براي چيدمان $(\pm 10)_S$ حاصل از اين تحقيق با مدل اجزاء محدود مقايسه شده است كه كمتر از ۱ درصد اختلاف دارند. با توجه به نتايج حاصل مي توان نتيجه گرفت كه حل حاضر داراي دقت مناسبي مي باشد.

با توجه به تقارن موجود در چند لايه هاي ارتوتروپيک و ضربدري هيچگونه كوپلينگ خمشي-كششي در ماتريس ضرايب وجود ندارد و در نتيجه معادلات حركت با يكديگر كوپل نمي شوند. در شكل هاي ۳ و ٤ تغييرات فركانسهاي اول، دوم و سوم بازاي زواياي الياف مختلف براي صفحه ارتوتروپيک و چند لايه ضربدري نشان داده شده است.

در شکل ۳ مقادير فرکانس پايه و فرکانسهاي دوم و سوم براي صفحه چهار لايه مرکب با چيدمان $(\pm\theta)_S$ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه مي شود با افزايش زاويه الياف تا ٤٥ درجه براي فرکانسهاي اول و دوم مقدار فرکانس افزايش مي يابد و در ادامه با همان شيب قسمت قبل شروع به کاهش مي نمايد. در مورد فرکانس سوم اين روند تغييرات تا زاويه ۳۰ درجه شبيه حالت قبل است وليکن در فاصله زاويه الياف بين ۳۰ تا ٤٥ اين روند افزايشي شروع به کاهش مي کند. نکته اي ديگري که مي توان به آن اشاره نمود تغييرات کم فرکانس اول با زاويه الياف مي باشد.

در شکل ٤ مقادير فرکانسهاي اول تا سوم براي صفحه ارتوتروپيک چهار لايه $(\theta)_4$ نشان داده شده است. با مقايسه نتايج اين قسمت با شکل ۳ مشاهده مي شود که با افزايش زاويه الياف در صفحه چند لايه با چيدمان $(\pm\theta)_S$، مقادير فرکانس هاي دوم و سوم بيشتر نسبت به صفحه ارتوتروپيک افزايش مي دهد. به عبارت ديگر وجود ترمهاي D_{16}, D_{26} در معادله حرکت سبب تغيير فرکانس و افزايش آن مي گردد. اما بايد توجه داشت که اين روند تغييرات در مورد فرکانس اول صادق نيست. تغييرات زاويه الياف و چيدمان صفحه تاثير چنداني بر فرکانس اول نخواهند داشت. همانطور که ملاحظه مي شود تغييرات فرکانس نسبت به زاويه الياف در اين شکل داراي تقارن مي باشد. در اين شکل مقدار فرکانس تا زاويه ٤٥ براي فرکانسهاي دوم و سوم افزايش يافته و سپس شروع به کاهش مي کند.

در شکل ٥ مد شکلهاي براي صفحه مرکب $(\pm 45)_S$ براي ضرايب ولتاژ (K_p) مختلف رسم شده است. با توجه به نتايج بدست آمده مي توان گفت که افزايش مقدار ضريب ولتاژ K_P باعث تغيير شکل مد مي شود. افزايش مقدار K_P از ۰/۲ به ۲ باعث مي شود که مد شکل صفحه از يک نصف سينوس به سه نصف سينوس تبديل شود. مد شکل صفحه چند لايه تنها تابعي از مقدار K_P نمي باشد. چيدمان صفحه عامل موثر ديگري بر مد شکل صفحه مي باشند. اين مطلب در شکل ٦ نشان داده شده است.

در شکل ۷ به بررسي اثر K_P بر زمان ميرا شدن نوسانات صفحه با چيدمان $(\pm 45)_S$ پرداخته شده است. بر اساس نتايج ارائه شده در اين شکل با افزايش مقدار K_P از صفر به ۲ زمان نشست نوسانات نيز از ٤/٥٩ ثانيه به ۳/٤٧ ثانيه کاهش مي يابد. اين مطلب در شکل ۸ نيز نشان داده شده است. در اين شکل زمان ميرا شدن براي چيدمانهاي مختلف براي K_P=۲ نشان داده شده است. زمان ميرا شدن نوسانات براي چيدمانهاي $(\pm 45)_S$، $(\pm 30)_S$ و $(\pm 60)_S$ بدون اعمال ولتاژ ۴/۵۹، ۵/۹ و ۵/۱۹ ثانيه است که در نتيجه اعمال ولتاژ به ترتيب به ۳/۴۷، ۴/۱۲ و ۴/۲۳ ثانيه کاهش مي يابد. کاهش دامنه نوسانات براي چيدمانهاي ذکر شده بصورت تصاعد هندسي است.

۵- نتيجه گيري

با توجه به نتايج حاصل از اين تحليل مي توان گفت:

- در صفحه کامپوزيتي با چيدمان ضربدري تغيير زاويه الياف سبب تغيير مقدار فرکانس شده و فرکانس تابع زاويه الياف مي باشد.

- در مورد صفحه ارتوتروپيک تغييرات فرکانس اول و ساير فرکانسها با تغيير زاويه الياف شبيه يکديگر نمي باشد حال آنکه اين روند در مورد صفحه با چيدمان ضربدري متفاوت مي باشد.
- تغييرات ضريب ولتاژ K_P سبب تغيير مدشکلهاي صفحه خواهد شد.
- افزايش ضريب ولتاژ K_P سبب کاهش زمان نشست در صفحه خواهد شد. اين مطلب تابع نوع چيدمان نيز مي باشد.

به عنوان پيشنهاد براي کارهاي آينده مي توان تاثير پارامترهاي نظير نيروهاي داخل صفحه، بارهاي حرارتي و بررسی اثر چيدمانها و تعداد لايه هاي متفاوت برای صفحه را در حل مساله حاضر لحاظ نمود.

۶- منابع و مراجع

[1] Main, J.A., and Garcia, E., Howars, D., “Optimal Placement and Sizing of Paired Piezo Actuators in Beams and Plates,” Journal of Smart Materials and Structures. Vol. 3, pp. 373–381, (1994).

[2] Koconis, D.B., Kollar, L.P., and Springer, G.S., "Shape Control of Composite Plates and Shells with Embedded Actuators", Journal of Composite Materials. Vol. 2, pp. 415–458, (1994).

[3] Chen, C.Q., Shen, Y.P., and Wang, X.M., "Exact Solution of Orthotropic Cylindrical Shell with Piezoelectric Layers Under Cylindrical Bending", International Journal of Solids Structure, Vol. 33, pp. 4481–4494, (1996).

[4] Yu, Y., and Xia, R., "Study on Finite Element Analysis and Shape Control of Composite Laminate Containing Piezoelectric Actuator/ Sensor", Act. Mater. Compos. Sinica, Vol. 14(2), pp. 114–119, (1997).

[5] He, X.Q., Ng, T.Y., Sivashanker, S, and Liew, K.M., "Active Control of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Sensors and Actuators", Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 1641–1655, (2001).

[6] Cote, F., Masson, P., Mrad, N., and Cotoni, V. "Dynamic and Static Modeling of Piezoelectric Composite Structures using a Thermal Analogy with MSC/NASTRAN", Journal of Composite Structure, Vol. 65, pp. 471-484, (2004).

[۷] رضائي پژند، جليل، امين يزدي، سيد محمد علي،” اثر چيدمان لايه ها بر مرز فلاتر صفحه فلزي سوراخ دار”، ششمين کنفرانس هوافضاي ايرانAero2007، تهران، دانشگاه خواجه نصير الدين طوسي، (۱۳۸۵).

[۸] امين يزدي، علي، ” فلاتر صفحه فلزي سوراخ دار با لايه کامپوزيتي يا پيزوالکتريک” ، پايـان نامـه کارشناسـي ارشـد مکانيـک، طراحي کاربردي، دانشگاه فردوسي مشهد،(۱۳۸۵).

فهرست نمادهاي انگليسي

a: طول صفحه

A_i : ضرایب معادله حرکت

C_r : ظرفيت حسگر

$\{D\}$: بردار جابجايي الكتريكي

D_{ij} : ضرایب ماتريس سختي

$[e]$: ماتريس ضرایب پيزوالكتريک

$\{E\}$: بردار ميدان الكتريكي

h_a : ضخامت لایه پيزوالكتريک

K_p : ضریب اعمال ولتاژ

L_E : امپدانس الكتريكي

N_X , N_y : نيروهاي فشاري داخل صفحه بر واحد طول

$q(t)$: مقدار جريان الكتريكي وابسته به زمان

R_E : مقاومت الكتريكي

T: انرژي جنبشي

U: انرژي كرنشي

W_{nc}: كار نيروهاي غير پایستار

فهرست نمادهاي یوناني

$\{\sigma\}$: *بردار تنش*

$\{\varepsilon\}$: *بردار كرنش*

ρ: *دانسيته صفحه*

θ: *زاویه الياف*

ω_n: *فركانس زاویه اي*

زیر نویس

P: صفحه

Pe: لایه پيزوالكتريک

جدولها

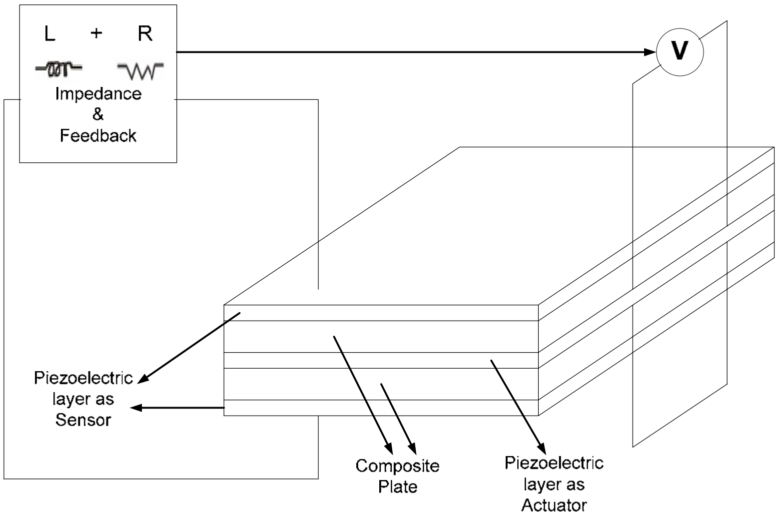
جدول۱- خواص مکانیکي ماده مرکب و ماده پیزوالکتریک

Properties	PZT-4	Graphite/epoxy T300/976
$E_{11}(GPa)$	81.3	275.8
$E_{22}(GPa)$	81.3	6.89
$G_{12}(GPa)$	30.6	4.14
$G_{13}(GPa)$	25.6	4.14
$G_{23}(GPa)$	25.6	3.45
v_{12}	0.33	0.25
$d_{31}(m/V)$	-122×10^{-12}	-
$d_{32}(m/V)$	-122×10^{-12}	-

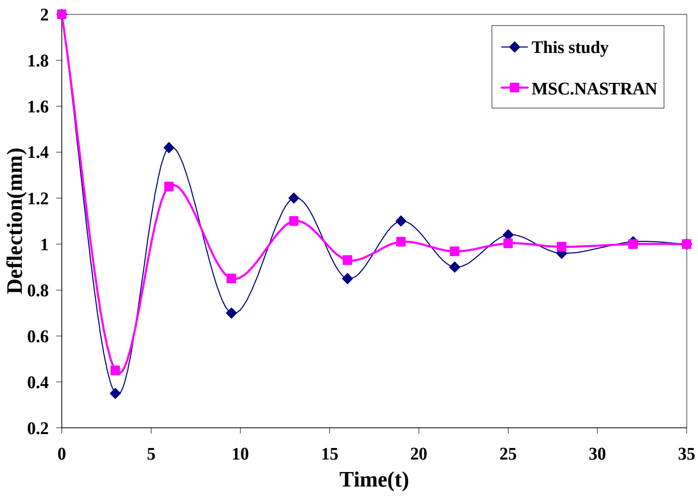
جدول۲- مقایسه فرکانس هاي صفحه چند لایه با نتایج اجزاء محدود

	فرکانس اول		فرکانس دوم		فرکانس سوم	
Stacking sequence	حل حاضر	FEM	حل حاضر	FEM	حل حاضر	FEM
$(0)_4$	۵۳۴/۱۶	۵۳۰/۶۱	۶۶۷/۶۴	۶۶۲/۶	۱۰۱۶/۲۵	۱۰۱۱/۴۴
$(0/90)_S$	۵۳۵/۰۳	۵۳۰/۸۸	۹۷۱/۰۱	۹۶۶	۱۹۶۰/۷۵	۱۹۵۷
$(90/0)_S$	۵۳۴	۵۲۹/۴۵	۹۹۰	۹۸۶/۱۵	۱۹۴۶	۱۹۴۲/۰۸

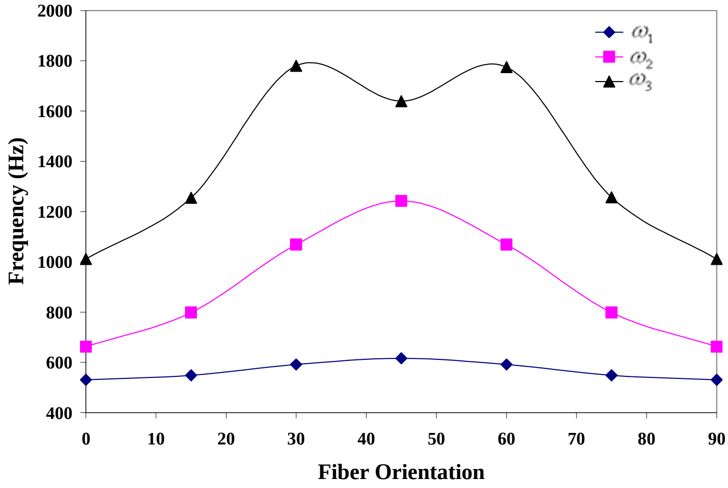
شکلها



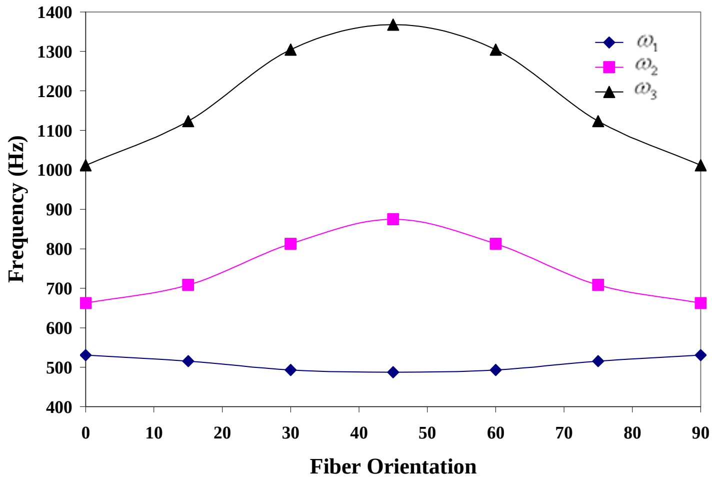
شکل۱- ابعاد هندسي صفحه و لايه هاي پيزوالكتريک و محل قرار گيري لايه ها در صفحه ميزبان



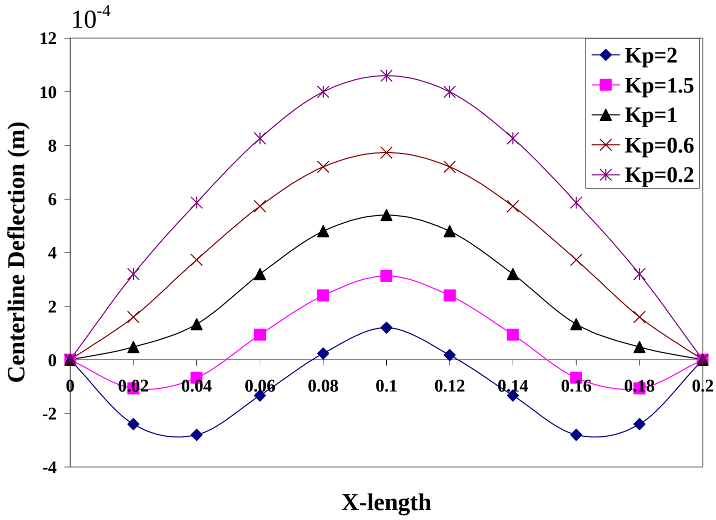
شکل۲- مقايسه نتايج حل تحليلي و مدل اجزاء محدود براي صفحه مركب $(\pm 10)_S$



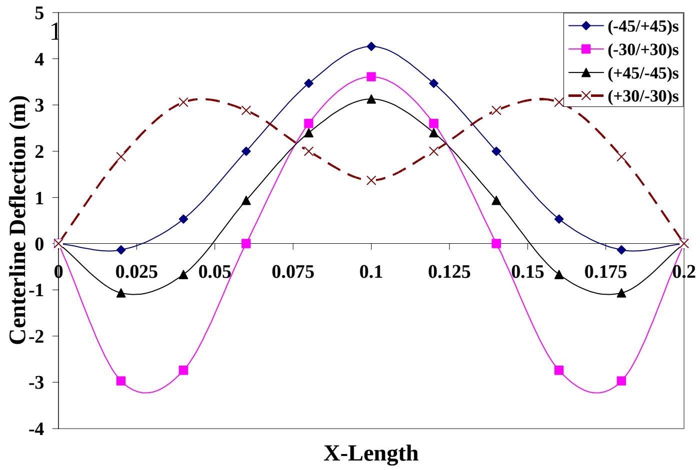
شكل٣- مقادير فركانسهاي اول، دوم و سوم براي صفحه مركب $(\pm\theta)_S$



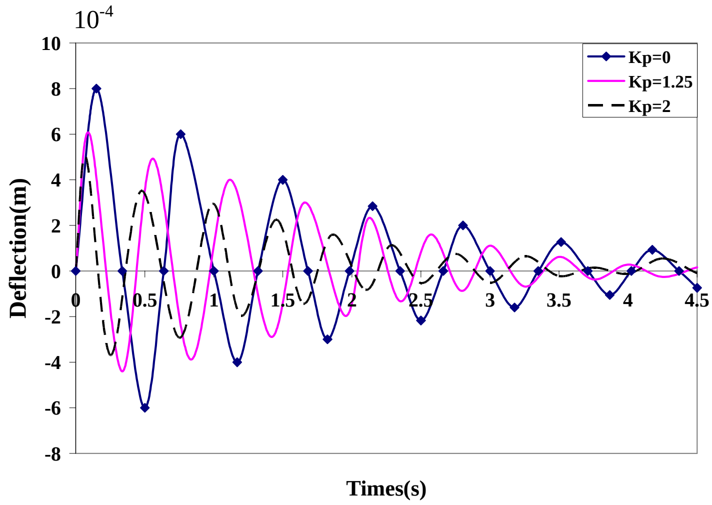
شكل٤- مقادير فركانسهاي اول، دوم و سوم براي صفحه ارتوتروپيک $(\theta)_4$ بازاي زواياي مختلف الياف



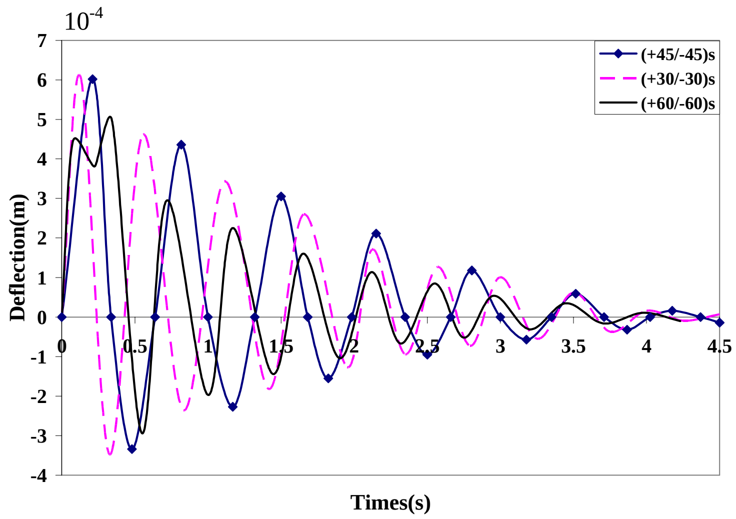
شكل٥- جابجائي نقاط مياني صفحه مركب $(\pm45)_s$ بازاي ولتاژهاي مختلف



شكل ٦- جابجائي نقاط مياني صفحه چند لايه بازاي چيدمانهاي مختلف بازاي $K_P = 1.5$



شكل۷: تغییرات دامنه نوسانات چند لایه متقارن $(\pm 45)_s$ با زمان



شكل ٨- تاثير چيدمان لايه ها بر زمان ميرا شدن نوسانات بازاي $K_P = 2$

Abstract

The effect of piezoelectric actuation on vibration of laminated composite plate is investigated in this study. The governing equation for vibration of symmetric composite plate with piezoelectric layers is derived using Hamilton's principle. To validate the present approach, the analytical results were compared with the results of finite element method. A thermal analogy was used to represent voltage at nodes as equivalent temperatures. The presented results clearly indicate that, for angle-ply configuration, fiber orientation and applied voltage have significant effect on settling time of laminated smart plates.