



## مدلی برای شبکه بی‌سازمان تطبیقی در حل معادلات اویلر با روش حجم محدود

سیداسماعیل رضوی<sup>۱</sup>

دانشیار

وحید فرهنگ‌مهر<sup>۲</sup>

دانشجوی دکترا

در این تحقیق، مدل بهبود یافته‌ای برای شبکه بی‌سازمان مثلثی ارائه شده است. در تولید شبکه، روش‌های جبهه پیش‌رونده و دلانی با روش ویژه‌ای ترکیب می‌شوند. کار حاضر علاوه بر به‌کارگیری مزایای روش‌های نامبرده، قابلیت تطبیق در حل معادلات جریان تراکم‌پذیر، ناپیوستگی‌ها و گرادیان‌های بزرگتر را دارد. تطبیق‌پذیری بدون افزایش سلول-ها منجر به کاهش زمان محاسبات و حافظه کامپیوتر می‌گردد. تطبیق با میانگین‌گیری وزنی از متغیرهای جریان در سلول‌های همسایه انجام می‌شود. بررسی نشان می‌دهد که میدان حل شبکه ارائه شده دارای کمترین مثلث‌های معیوب بوده و برای تحلیل جریان روش بالادست رو (Roe) در رژیم تراصوتی حول ایرفویل NACA0012 با گسسته‌سازی زمانی رانگ-کوتای مرتبه پنج تسریع شده با گام زمانی محلی استفاده می‌شود. نتایج عددی حاصل با نتایج عددی موجود در ادبیات فن مقایسه شده که توافق خوبی بین آنها وجود دارد.

واژه‌های راهنما: شبکه بی‌سازمان مثلثی، تطبیق شبکه، روش دلانی، روش جبهه پیش‌رونده، معادلات اویلر، روش رو (Roe)، جریان تراصوتی، هموارسازی شبکه مثلثی

### ۱- مقدمه

گسسته‌سازی یک میدان جریان مسطح پیوسته مرحله‌ای اساسی در شبیه‌سازی عددی مسائل مهندسی و فیزیکی با روش‌های عددی مانند روش‌های المان محدود و حجم محدود است. در دهه اخیر، شبکه بی‌سازمان با توجه به قابلیت‌های بسیار بالا مورد توجه قرار گرفته است، زیرا کیفیت شبکه می‌تواند به گونه چشمگیری در دقت جواب‌ها تأثیر بگذارد. توانایی شبکه‌های بی‌سازمان در مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده در میدان با گرادیان‌های شدید متغیرهای جریان و نیز کارایی آنها در انطباق به مرزهای متحرک از عوامل مهم کاربرد این شبکه‌اند. استفاده از شبکه بی‌سازمان در روش‌های المان محدود و حجم محدود دارای دو ویژگی منحصر به فرد است: الف) امکان تولید آسان آن در هندسه‌های پیچیده، ب) امکان تطبیق آسان اندازه شبکه با گرادیان‌های میدان [۱]. در یک شبکه با سازمان به دلیل آرایش ماتریس گونه سلول‌ها، امکان حل دقیق جریان در هندسه‌های پیچیده و ناهموار وجود ندارد. همچنین در میدان‌های با پیوند چندگانه، تولید شبکه با سازمان تنها تحت شرایط خاص و با کیفیت نامطلوب امکان پذیر است. در شرایط هندسی فوق، شبکه بی‌سازمان به دلیل ساختار محلی و غیروابسته به کل میدان از مزیت خاصی برخوردار بوده و

<sup>۱</sup> دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز [razavi@tabrizu.ac.ir](mailto:razavi@tabrizu.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشجوی دکترا، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز [vfarhangmehr@gmail.com](mailto:vfarhangmehr@gmail.com)

کیفیت مناسب تری در روش های عددی دارد. در بعد دیگر، ساختار بی سازمان شبکه امکان تغییر شبکه را به دلخواه در هر محلی از میدان ایجاد می کند و به آسانی می توان با کمینه تعداد سلول ها، اندازه آنها را با روش های تطبیق در جاهای مختلف میدان تنظیم نمود. یکی از مهم ترین خواستگاه های تولید شبکه تولید خود کار آن و کاهش دخالت تولید کننده شبکه برای پایین آوردن زمان و هزینه تولید آن است. این موضوع همراه با کیفیت شبکه از مهم ترین نیازهای تولید این نوع از شبکه هاست. یک شبکه بی سازمان مثلثی گسسته سازی میدان جریان به مثلث هایی است که تنها در لبه ها و رئوس مشترک در تماس با هم هستند. هر مثلث شبکه می بایست برای دستیابی به همگرایی خوب در روش های عددی شکل یافته باشد. چندین معیار متداول برای تولید مثلث هایی با زوایای نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک وجود دارند. بسیاری از کارها برای تولید شبکه مثلثی با کیفیت برای میدان (Planar Straight Line Graph) PLSG ارائه شده اند. از مهم ترین و کاراترین روش های تولید شبکه بی سازمان مثلثی موجود در ادبیات فن می توان روش جبهه پیش رونده (Advancing Front)، روش دلانی (Delaunay)، و روش درخت چهار تایی (Octree) را نام برد. با وجود مزیت اصلی روش جبهه پیش رونده در تولید مثلث های تاحدامکان متساوی الاضلاع در جه بندی شده و با کیفیت مطلوب و نیز حفظ پیوستگی مرزها در گسسته سازی مرز میدان برای تشکیل جبهه اولیه (برخلاف روش دلانی که در آن معمولا پیوستگی مرزها مخصوصا در میدان های پیچیده حفظ نمی شود)، در روش جبهه پیش رونده و درخت چهار تایی به دلیل پیروی نکردن از اصول هندسی خاص و اساس مبتنی بر تصمیم گیری های محلی برای تولید شبکه کیفیت مطلوبی را برای سلول ها ایجاد نمی کنند و زمان زیادی صرف بررسی شبکه از نقطه نظر بر خورد لبه ها و روی هم افتادگی سلول ها می شود و حتی ممکن است این مساله بر همگرایی تاثیر بگذارد [۱ و ۲]. روش دلانی به دلیل استفاده از یک مبنای هندسی ساده از مزیت نسبی در تولید شبکه بی سازمان مثلثی برخوردار است و در آن دایره محیطی هر مثلث شامل نقطه دیگری در فرآیند مثلث سازی نمی باشد، اما کیفیت شبکه و وابستگی زیادی به گره گذاری (Nodalization) در میدان دارد [۳]. با این شرایط، هنگامی که کیفیت شبکه و خود کار بودن فرآیند تولید آن مورد نظر باشد و برای غلبه بر مشکلات مرتبط با هر کدام از روش های مذکور، روشی ترکیبی از آنها مطرح می گردد و یا هر کدام از آنها به تنهایی با پالایش (Refining)، تطبیق (Adoption)، فشرده سازی (Clustering) و هموار سازی (Smoothing) بهبود می یابند. الگوریتم تولید شبکه پالایش دلانی عموما بر اساس Ruppert's RF Framework بوده که دو مرحله دارد: وارد کردن بخش های PSLG به شبکه با اضافه کردن نقاط میانی آنها و حذف مثلث های پوستی (Skinny Triangles)، یعنی مثلث بدون کیفیت لازم از شبکه با افزودن مرکز دایره محیطی یا خارج از مرکز آن به عنوان (Steiner Vertices) SV [۴]. هر بار که شبکه ای تولید می شود، یک پس پردازش بهبود می تواند برای بهینه سازی کیفیت آن اعمال شود. بهبود شبکه بر اساس بهینه سازی محلی که شامل حرکت ST ها و باز آرایش فرآیند مثلث سازی می باشد [۵]. در تکنیک هموار سازی ST ها برای بهبود کیفیت المان های مجاورشان حرکت داده می شوند. حرکت رئوس واقع روی بخش های PSLG می تواند متوقف شود و یا به خود بخش محدود شود. یک الگوریتم چندین بار در سرتاسر همه رئوس شبکه اعمال می شود. هنگامی که PSLG با قرار دادن یا برداشتن المان تغییر می کند، شبکه مربوط به آن می بایست برای تغییرات تطبیق داده شود. جدا از نیاز به کیفیت شبکه انتظار می رود که خصوصیات کارایی اضافی شامل بهینگی (Optimality)، محلیت (Locality) و افزایشی (Incrementality) تامین شوند. با بهینگی هدف این است که ST های اضافه شده به عنوان نتیجه تطبیق شبکه تاحدامکان کم باشند و با افزایشی هدف ارتقاده شدن شبکه PLSG بدون تولید مجدد کل شبکه می باشد و در نهایت با محلیت هدف این است که تغییرات اعمال

شده به شبکه انتشار این اصلاحات را به کل شبکه ایجاب نکند. Coll و همکاران [۶] اخیراً روشی را پیشنهاد کردند که تکنیک‌های بهبود و پالایش دلانی را برای تطبیق شبکه پالایش شده با افزودن و حذف کردن سلول‌های میدان به صورت متقابل ترکیب می‌کرد و در مقایسه با روش‌های دیگر موجود در ادبیات فن مثلث‌های با کیفیت و با تعداد کم تولید می‌نمود. Wu و Wang [۷] روشی توسعه یافته برای تولید شبکه بی‌سازمان مثلثی تطبیقی بر اساس جبهه پیش‌رونده از دو مرز مقابل هم به جای یک مرز، حول رویه‌های سه‌بعدی متغیر پیشنهاد کردند و نتایج خوبی از نظر همگرایی و کیفیت شبکه به دست آوردند. ساختار روش درخت چهار تایی به دلیل انعطاف پذیری در تولید گره جدید در میدان، در ترکیب باروش دلانی در کیفیت شبکه بهبود چشمگیری ایجاد نمی‌کند. ترکیب باروش دلانی و جبهه پیش‌رونده الگوی مناسبی برای تولید شبکه بی‌سازمان مثلثی با کیفیت خوب و با یک فرآیند خودکار است [۸]. اخیراً ترکیبی از روش‌های دلانی و جبهه پیش‌رونده توسط El-Hamalawi [۹] معرفی شده است. در آن مرز میدان استفاده شده برای تولید جبهه اولیه با افزودن نقاطی بر اساس تراکم سلول‌های از پیش مشخص شده گسسته‌سازی می‌شود و سپس نقاط داخلی بهینه از روی جبهه‌ای که در داخل دایره دلانی واقع شده است، تعیین شده و در نهایت مثلثی متساوی‌الاضلاع یا نزدیک به آن به وجود می‌آید و شبکه حاصل با هموارسازی بهینه ترمی شود و شرایط مرزی با درونیابی تعیین می‌گردد. در کار حاضر، تولید شبکه بی‌سازمان مثلثی با ترکیب باروش دلانی و جبهه پیش‌رونده برای بهبود و پالایش شبکه بررسی شده است. برای این منظور، برنامه کامپیوتری به زبان فرترن توسط مولفان نوشته شده است. در نهایت، این روش با استفاده از هموارسازی و نیز تطبیق شبکه با حرکت دادن گره‌ها به سمت گرادیان‌های بیشتر و کاهش تعداد مثلث‌های تولید شده و سازگاری شبکه نسبت به تغییرات محلی قلمرواش یعنی اصلاح کیفیت شبکه با اضافه کردن یا حذف کردن المان‌ها (بخش‌ها، نقاط، خطوط گوشه و غیره) به یا از آن با حفظ کیفیت در حین فرآیند تولید بهبود یافته است.

## ۲- تولید شبکه بی‌سازمان مثلثی

### الف) داده‌های ورودی، شناسایی و تقسیم‌بندی مرزهای میدان

یک ویژگی مهم کار حاضر، امکان تولید شبکه برای هر نوع میدان دوبعدی است. برای هر مساله یک مرز بسته خارجی و تعدادی مرز بسته داخلی در نظر گرفته می‌شود که مرز خارجی احاطه‌کننده مرزهای داخلی است. در گام بعدی، هر مرز به صورت ترکیبی از منحنی‌ها و توابع مختلف منظور می‌شود که با اتصال به یکدیگر مرز بسته‌ای را ایجاد می‌کنند. در اینجا منحنی‌ها با وارد کردن چند نقطه (که تعداد آن کاملاً بستگی به دقت استفاده کننده دارد) و نیز استفاده از دو نوع اسپلاین [۱] (طبیعی و استفاده از شیب دو طرف منحنی) مشخص شده است. میزان فشردگی نقاط روی منحنی توسط یک تابع خاصی تنظیم می‌گردد. متغیرهای وارد شده توسط تولیدکننده شبکه عبارتند از:

- ۱- تعداد مرزهای داخلی، تعداد منحنی‌های تشکیل‌دهنده مرز داخلی و خارجی.
- ۲- تعداد نقاطی که مختصات آنها وارد می‌شود و تعداد تقسیم‌بندی مناسب برای هر منحنی.
- ۳- ضرایب تقسیم‌بندی مناسب مرزها با مشخص کردن نوع اسپلاین.
- ۴- مختصات نقاط در نظر گرفته شده برای هر منحنی.

برای استفاده از تقسیم‌بندی مناسب مرزها ابتدا باید طول کل هر منحنی محاسبه شود. این طول براساس ضریب ورودی و یک تابع خاص، اندازه تقسیمات را در طول منحنی مشخص می‌کند و در نهایت، براساس این تقسیمات نقاط روی منحنی‌ها مشخص می‌گردد. تابع استفاده شده در برنامه کامپیوتری برای تنظیم فشردگی به صورت زیر است:

$$x' = H' \frac{(1 + \beta)[(\beta + 1)(\beta - 1)]^{(2\eta - 1)} + 1 - \beta}{2\{1 + [(\beta + 1)(\beta - 1)]^{(2\eta - 1)}\}} \quad (1)$$

که  $H'$  طول منحنی،  $\eta$  مقادیر  $0/n, 1/n, \dots, n/n$  (تعداد تقسیمات)،  $X'$  طول تقسیمات و  $\beta$  ضریب تقسیم‌بندی است که بین یک و بی نهایت است و هر چه به یک نزدیک تر باشد، فشردگی نقاط در دو طرف منحنی بیشتر می‌گردد. برای هر نقطه، مختصات آن نقطه با یک متغیر مشخص کننده طول مطلوب شبکه ذخیره می‌گردد که تابع فاصله نام دارد.

### ب) دلانی کردن نقاط

پس از شناسایی مرزها و تقسیم‌بندی آنها و مشخص شدن نقاط مرزی، در مرحله بعد نقاط مرزی دلانی می‌شود. برای دلانی کردن نقاط مرزی از روش افزایشی استفاده شده است. روش افزایشی به دلیل اضافه شدن تک تک نقاط به آسانی در تطبیق شبکه هم قابل استفاده بوده و همچنین از بازدهی مطلوبی برخوردار است [۱]. در روش افزایشی ابتدا یک میدان محدب (به صورت یک یا چند مثلث و احاطه کننده کلیه نقاط میدان) در نظر گرفته می‌شود و سپس نقاط میدان تک تک به این میدان محدب اضافه شده و مثلث بندی تکمیل می‌گردد. در این روش برای هر نقطه ورودی با به دست آوردن مثلث دربرگیرنده نقطه و اتصال از نقطه مورد نظر به رئوس این مثلث، شرط دایره محیطی دلانی برای سه مثلث به وجود آمده ارضامی گردد [۱۰]. پس از تکمیل مثلث بندی، با حذف مثلث‌های موجود بین میدان و میدان محدب، شبکه بی‌سازمان مطلوب حاصل می‌گردد.

### پ) ایجاد نقطه جدید

از مثلث بندی حاصل از دلانی کردن نقاط مرزی به عنوان یک شبکه پس زمینه برای تنظیم اندازه شبکه تولید شده به صورت متناسب بین مرزها استفاده می‌شود. در تولید شبکه، جبهه به معنای مرز بین قسمت شبکه بندی شده و شبکه پس زمینه است. زمانی که نقاط مرزی دلانی می‌شود، جبهه در واقع همان مرزهای میدان است، چرا که هیچ ناحیه‌ای از میدان مثلث بندی نشده و همه جای میدان را شبکه پس زمینه احاطه نموده است. در مرحله ایجاد نقطه جدید، نقاط به سمت میدان و در امتداد جبهه‌ها ایجاد می‌گردند. برای این منظور، ملاکی برای خوب یا بد بودن مثلث تعیین شده و سپس با جستجوی مثلث‌های بد (از نظر اندازه و نرمی مثلث) در مقابل ضلع مرزی یا ضلعی که در همسایگی یک مثلث خوب قرار دارد، یک نقطه در جهت میدان ایجاد می‌کنیم. اگر مثلث بد منفرجه باشد، با ایجاد نقطه در مقابل هر ضلع این مثلث، سه نقطه جدید به وجود می‌آید. برای ایجاد نقطه جدید در داخل یک مثلث بد، ابتدا تغییرات تابع فاصله محلی به وسیله مقادیر تابع فاصله در رئوس مثلث حاوی نقطه در شبکه پس زمینه به صورت برداری محاسبه شده و با استفاده از این تابع مقدار  $l$  (فاصله نقطه جدید از مرکز ضلع در نظر گرفته شده در امتداد جبهه) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$l = \frac{h_M}{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}n_3\Delta h} \quad (2)$$

که در رابطه بالا  $n_3$  بردار هنجار شده عمود بر سطح جبهه در راستای حرکت جبهه است.  $h_M$  تابع فاصله نقطه  $M$  بوده و  $\Delta h$  گرادیان تابع فاصله است که از مشخصات مثلث بد در شبکه پس زمینه به دست می آید. گرادیان تابع فاصله در سطح یک مثلث از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\Delta h = \frac{1}{2S} \sum_{i=1}^3 h_i s_i \quad (3)$$

که  $S$  سطح کل مثلث،  $s$  مقدار بردار هنجار شده به سمت خارج هر ضلع مثلث و  $h$  تابع فاصله نقطه روبه روی هر ضلع  $s$  است. زمانی که تغییرات تابع فاصله زیاد باشد، برای به وجود آوردن مثلث های خوب مقدار  $l$  را در معادله (۲) به صورت زیر محدود می کنیم [۱۱ و ۱۲]:

$$\alpha \leq \frac{l}{h_M} \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \approx 0.7 \quad (4)$$

### ت) تولید شبکه

پس از تولید نقاط مرزی برای تمامی مثلث های بد، یک بررسی قبل از دلانی کردن نقاط جدید لازم است. در این بررسی نقاطی که به لبه های جبهه بیش از حد نزدیک می باشند، حذف می شوند. برای این منظور، برای هر مثلث مرز جبهه یک دایره با شعاعی بزرگتر از شعاع دایره محیطی تعریف کرده و اگر نقطه ای از نقاط جدید در درون این دایره باشد، آن را حذف می کنیم. در یک بررسی دیگر فاصله نقاط تولید شده جدید از یکدیگر کنترل می شود. اگر تابع فاصله دو نقطه  $h_a$  و  $h_b$  بوده و رابطه زیر برقرار باشد دو نقطه بیش از حد به یکدیگر نزدیک بوده و باید با حذف آنها یک نقطه جدید در محل بین دو نقطه حذف شده ایجاد نمود [۱۱].

$$d \leq \gamma' \frac{h_a + h_b}{2}, \quad \gamma' \approx 0.65 \quad (5)$$

که  $d$  فاصله دو نقطه و  $\gamma'$  یک ضریب دلخواه است.

### ۳- تطبیق شبکه

پس از حل میدان با استفاده از شبکه بی سازمان مثلثی، درک تغییرات خواص در میدان با دقت دلخواه، نیازمند تطبیق شبکه نسبت به تغییرات خواص می باشد. تجزیه و تحلیل دقیق شوک، نقاط سکون و نیز جریان های گردابی نیاز به کوچک شدن شوک، نقاط سکون و جریان های گردابی نیاز به کوچک شدن شبکه دارد. بدین منظور، در پژوهش حاضر تطبیق به وسیله حرکت دادن شبکه از مناطق با تغییرات کم به مناطق با تغییرات زیاد (بدون افزایش تعداد سلول ها) صورت می گیرد که این کار ضمن کاهش زمان محاسبات و حافظه مصرفی کامپیوتر، نتایج را بهبود می بخشد. در برنامه کامپیوتری حاضر، ابتدا تغییرات جرم حجمی در هر نقطه محاسبه شده و سپس موقعیت هر نقطه درون میدان با استفاده از یک میانگین گیری وزنی نسبت به گرادیان جرم حجمی در نقاط حول خود، به سمت گرادیان های بیشتر انتقال پیدامی کند. اگر نقطه  $P$  درون میدان در نظر گرفته شود و نقاط  $a_1, a_2, \dots, a_n$  نقاط دیگر مثلث هایی باشند که در نقطه  $P$  مشترک هستند و  $h_1, h_2, \dots, h_n$  مقادیر گرادیان جرم حجمی در نقاط مذکور باشند، برای جابجایی نقطه  $P$  خواهیم داشت:

$$Y_p = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ai} \cdot h_i}{\sum_{i=1}^n h_i} \quad \text{و} \quad X_p = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ai} \cdot h_i}{\sum_{i=1}^n h_i} \quad (۶)$$

زمانی که کل نقاط داخل میدان یک مرتبه حرکت داده می شوند، یک مرتبه تطبیق صورت گرفته است. می توان پس از هر تطبیق جریان را با شرایط جدید شبکه حل نمود و دوباره به دست آوردن گرادیان ویژگی نقاط، شبکه را حرکت داد. همچنین می توان بدون حل مجدد، شبکه را چندین مرتبه حرکت داد و در کل می توان انتخاب های متعددی را آزمایش کرد. برای بالابردن کیفیت شبکه می توان در مراحل مختلف تطبیق (به صورت حرکت شبکه) از یک مرتبه هموارسازی شبکه استفاده نمود. در حل شبکه حرکت داده شده (جدید)، استفاده از مقادیر نهایی شبکه قبلی به عنوان مقادیر اولیه شبکه جدید سرعت همگرایی را افزایش می دهد.

#### ۴- کیفیت شبکه

تقریباً تمامی شبکه های تولید شده، به هموارسازی یا اصلاح برای رسیدن به کیفیتی مطلوب نیازمندند. ساده ترین تکنیک هموارسازی، هموارسازی لاپلاسی (Laplacian Smoothing) می باشد که در آن یک گره به مرکز گره هایی که به آن وصل شده اند حرکت داده می شود، ولی با این حرکت ممکن است که شبکه ای نامعتبر تولید شود. در سال های اخیر تکنیک های هموارسازی چندی براساس بهینه سازی که از تولید المان های نامعتبر جلوگیری کرده و یک مکان بهینه برای حرکت یک گره تضمین می کند، پیشنهاد شده اند [۱۳]. یک الگوریتم موازی براساس بهینه سازی برای میدان جریان دوبعدی و سپس برای میدان جریان سه بعدی پیشنهاد شده است [۵]. در هموارسازی، محل نقاط جابجایی شود تا بتوان کیفیت شبکه را بالابرد. در کار حاضر، ملاکی برای نرمی شبکه به صورت انحراف معیار تمامی زوایای موجود در شبکه نسبت به زاویه ۶۰ درجه تعریف شده است. هموارسازی با میانگین گیری موقعیت هر نقطه با توجه به نقاط دیگر سلول هایی که در آن نقطه مشترک می باشند، صورت می گیرد. با انجام این میانگین گیری برای کلیه نقاط داخلی میدان، یک مرتبه هموارسازی در شبکه انجام شده است. با بالابردن تعداد مراحل هموارسازی، مقدار انحراف معیار زوایا از ۶۰ درجه کاهش می یابد، اما با بالارفتن تعداد مراحل هموارسازی، آهنگ کاهش انحراف معیار، کم می شود. جدول (۱) مقادیر این انحراف معیار را برای یک شبکه نمونه نشان می دهد. همچنین شکل (۱) درصد زوایای موجود، قبل و بعد از هموارسازی را نشان می دهد.

#### ۵- حل میدان جریان

شکل حجم محدود معادلات اوپلر مانند زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} U dA + \oint_{\partial\Omega} (\vec{H} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (۷)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(e + \frac{V^2}{2}) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho(e + \frac{V^2}{2})u + pu \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho(e + \frac{V^2}{2})v + pv \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = F\vec{i} + G\vec{j}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

برای محاسبه شارهای جابجایی از روش رو (Roe) که براساس مشخصه‌ها، انتشار امواج صوتی و تجزیه بردار شار می‌باشد، بهره‌جسته‌ایم [۱۴]. داریم:

$$\bar{H}_{rl} = \frac{1}{2}(\bar{H}_L + \bar{H}_R) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \bar{\lambda}_i \Delta \bar{w}_i \bar{R}_i \quad (۸)$$

که  $\bar{R}_i, \Delta \bar{w}_i, \bar{\lambda}_i$  به ترتیب مقادیر ویژه، قدرت موج و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب معادلات اوپلر می‌باشند. به‌عنوان نمونه، برای محاسبه  $\bar{H}_{rl}$  در مرز (۱۲) از سلول مثلثی (۱۲۳) مطابق شکل (۲)، اگر مقادیر  $\bar{H}_L$  و  $\bar{H}_R$  به ترتیب مقادیر ماتریس زیر در سلول‌های چپ و راست آن، یعنی سلول‌های (۱۲۳) و (۱۲۴) باشند، داریم:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \rho q \\ \rho q u + p \frac{dy}{ds} \\ \rho q v - p \frac{dx}{ds} \\ \rho q E + p q \end{bmatrix} \quad (۹)$$

که در آن  $q$  سرعت در جهت عمود بر مرز سلول می‌باشد و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q = u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds} \quad (۱۰)$$

و با توجه به شکل (۲) برای مرز (۱۲) داریم:

$$dx = x_2 - x_1, \quad dy = y_2 - y_1, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (۱۱)$$

در معادله (۷) مقادیر ویژه ماتریس ضرایب معادلات اوپلر به صورت زیرند:

$$\bar{\lambda} = \begin{bmatrix} q_h - c_h \\ q_h \\ q_h \\ q_h + c_h \end{bmatrix}, \quad c_h = \frac{c_L \sqrt{\rho_L} + c_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad q_h = \frac{q_L \sqrt{\rho_L} + q_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (۱۲)$$

$$c^2 = \gamma(\gamma - 1)E - \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2}(u^2 + v^2) \quad (۱۳)$$

هر متغیری که دارای زیرنویس  $h$  می‌باشد، بدین معنی است که آن متغیر از میانگین‌گیری وزنی بر اساس جرم حجمی بین سلول‌های راست و چپ برای لحاظ کردن میزان تاثیر سلول‌های بالادست و پایین دست جریان در محاسبه شارهای جابجایی به دست آمده است و زیرنویس‌های  $R, L$  معرف سلول‌های راست و چپ می‌باشند. در معادله (۷) برای مقادیر قدرت موج ( $\Delta \bar{w}$ ) داریم:

$$\Delta \bar{w} = \begin{bmatrix} \frac{dp - \rho_h c_h \times dq}{2c_h^2} \\ \frac{\rho_h dr}{c_h} \\ -\frac{dp}{c_h^2} + d\rho \\ \frac{dp + \rho_h c_h \times dq}{2c_h^2} \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$d\rho = \rho_R - \rho_L, \quad dq = q_R - q_L, \quad dr = r_R - r_L, \quad \rho_h = \sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}, \quad dp = p_R - p_L$$

مقدار  $\Gamma$  در روابط فوق سرعت در جهت مماس بر مرز سلول است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} \quad (15)$$

برای بردارهای ویژه ماتریس ضرایب معادلات اوپلر داریم:

$$\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_h - c_h \frac{dy}{ds} \\ v_h + c_h \frac{dx}{ds} \\ H_h - q_h c_h \end{bmatrix}, \quad \vec{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_h \\ v_h \\ \frac{1}{2}(u_h^2 + v_h^2) \end{bmatrix}, \quad \vec{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_h \frac{dx}{ds} \\ c_h \frac{dy}{ds} \\ r_h c_h \end{bmatrix}, \quad \vec{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_h + c_h \frac{dy}{ds} \\ v_h - c_h \frac{dx}{ds} \\ H_h + q_h c_h \end{bmatrix}, \quad (16)$$

که آنتالپی H از رابطه زیر محاسبه می‌گردد. اولین مقدار ویژه و بردار ویژه مربوط به آن یک تغییر در امتداد سرعت را بیان می‌کند و به عنوان موج برشی در نظر گرفته می‌شود که با سرعت سیال در امتداد انتشار  $\vec{n}$  حرکت می‌کند. دومی یک موج آنتروپی را معرفی می‌کند که با سرعت سیال انتشار می‌یابد. سومی و چهارمی اغتشاش‌های صوتی هستند.

$$H = E + (\gamma - 1) \left[ E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (17)$$

برای گسسته سازی زمانی، از رانگ- کوتای مرتبه پنج به دلیل همگرایی مطلوب و محدوده پایداری وسیع استفاده شده است.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\Omega} \sum_1^3 \bar{H}_{r_l} d_{r_l} \quad (18)$$

که  $d_{r_l}$  طول مرز سلول و  $\Delta t$  مقدار گام زمانی محاسبه شده برای هر سلول است که بر اساس معیار پایداری و شتاب دهنده همگرایی گام زمانی محلی تنظیم می‌شود. با جایگزینی طرف راست معادله اخیر با Q شامل عبارت‌های جایجایی داریم [۱۵]:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + Q(U) = 0 \quad (19)$$

$$U^{(m)} = U^{(0)} - \alpha_m \Delta t Q^{(m-1)}(U) \quad , \alpha_m = 1/4, 1/6, 3/8, 1/2, 1 \quad , m = 1, \dots, 5 \quad (20)$$

گام زمانی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta t = \text{Max} \left( \frac{CFL \times \Omega}{LMu}, \frac{CFL}{\text{Max}_m(\eta_m)} \right) \quad (21)$$

$$\eta_m = \text{Max} \{ (|\lambda_{(1)}|, |\lambda_{(2)}|, |\lambda_{(3)}|, |\lambda_{(4)}|) ds \} \quad , m = 1, 2, 3, 4$$

مقدار LMu باید در تک تک مرزهای یک سلول محاسبه شود و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$LMu = \sum_{i=1}^3 LM_i \quad (22)$$

که در هر مرز (برای مثال شکل (۲) و مرز (۱۲) داریم:

$$LM_{12} = (|q_h| + c_h) ds \quad (23)$$

شرایط مرز دور، شکل (۳) همان خواص جریان آزاد می‌باشد. در درون مرز جامد یک سلول غیر حقیقی، شکل (۴) در نظریه گیریم. مقادیر  $\rho, p, e$  در این سلول همان مقادیر سلول حقیقی هستند که حل روی آن انجام می‌گردد و در مرز جامد قرار دارد، اما مقادیر  $u, v$  متفاوت می‌باشند. برای محاسبه این مقادیر در سلول غیر حقیقی، باید مقدار بردار سرعت را در سلول حقیقی درون میدان نسبت به مرز جامد به صورت قرینه در آورده و آن را مجدداً تجزیه کرده و



مولفه‌های سرعت را به دست آورد. زمانی که مقادیر جدید برای  $u, v$  در سلول غیر حقیقی به دست می‌آید، باید مقادیر  $q, r$  نیز از مقادیر جدید  $u, v$  طبق معادلاتی که قبلاً بیان شده، محاسبه شوند، اما اگر مقادیر  $u, v$  را در سلول حقیقی درون میدان برابر با  $u_L, v_L$  بگیریم و این مقادیر را در سلول غیر حقیقی درون مرز جامد برابر با  $u_R, v_R$  فرض کنیم، با انجام یک سری اعمال مثلثاتی نتایج زیر حاصل خواهد شد:

$$v_R = v_L \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + 2u_L \frac{dydx}{ds^2} - v_L \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \quad \text{و} \quad u_R = u_L \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + 2v_L \frac{dydx}{ds^2} - u_L \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \quad (24)$$

با محاسبه مقادیر  $q_R, r_R$  در سلول غیر حقیقی مشخصات آن مشخص شده و می‌توان مقادیر جدید را برای سلول مرز جامد به دست آورد. چهار متغیر مستقل عدد ماخ، زاویه حمله مقطع ایرفویل  $\alpha'$  و  $u, \rho$  مقداردهی اولیه می‌شوند و با مشخص بودن آنها متغیرهای دیگر به دست می‌آید. علت انتخاب شدن عدد ماخ این است که نوع جریان به این عدد بستگی دارد. همچنین زاویه حمله مقطع ایرفویل از آن جهت یک متغیر مستقل است که در صورت معلوم بودن مقدار  $u$  و این زاویه می‌توان مقدار  $v$  را محاسبه نمود. مثلاً اگر زاویه حمله برابر با صفر باشد مقدار  $v$  برابر با صفر است. در واقع در کل شبکه و مقطع ایرفویل این دو متغیر ثابت می‌باشند و برای زوایای حمله مختلف فقط کافی است مقدار  $u$  و  $v$  را در ارتباط با یکدیگر تنظیم نمود. متغیرهای دیگر را می‌توان از این چهار متغیر به دست آورد.

$$v = u \times \tan \alpha', \quad p = \frac{(u^2 + v^2) \rho}{\gamma \times Mach^2}, \quad E = \frac{p}{(\gamma - 1) \times \rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (25)$$

## ۶- نتایج عددی

در ابتدا چگونگی تولید نقطه در امتداد جبهه در شکل (۵) و سپس مراحل مختلف تولید شبکه مثلثی در شکل (۶) برای میدان با اتصال دو گانه شامل مرز خارجی و مقطع ایرفویل NACA0012 نشان داده شده است. در نظر گرفتن میدان محدب و پیشروی جبهه تا مثلث بندی نهایی در این شکل دیده می‌شود. در شکل (۷) تاثیرات ضریب تقسیم مرزهای میدان، بر روی شبکه به نمایش درآمده است. همان طور که ملاحظه می‌شود، مقدار فشردگی نقاط با تغییرات ضریب تقسیم، در جلو و پشت مقطع ایرفویل متفاوت بوده و در نتیجه شبکه تولید شده نیز در دو حالت متفاوت است (تعداد کل تقسیمات در هر شکل ثابت است). شکل (۸) ویژگی خاص شبکه بی‌سازمان (تولید آن در میدان‌های با اتصال چند گانه) را نشان می‌دهد. پس از تولید و هموار سازی، میدان جریان حول مقطع ایرفویل با ماخ  $0.8$  حل شده است که کانتورهای ماخ و فشار پس از حل در شکل (۹) نشان داده شده است. همچنین نمودار فشار و ماخ روی سطح مقطع ایرفویل در شکل (۱۰) دیده می‌شود. همان طوری که پیش بینی می‌شود در محل شوک کاهش آنی عدد ماخ و افزایش آنی فشار دیده می‌شود. شکل (۱۱) مقادیر ماخ روی مقطع ایرفویل را با حل قبل و بعد از هموار سازی شبکه نشان می‌دهد. در این شکل علی‌رغم اینکه هموار سازی تاثیر چندانی روی منحنی شوک و محل آن نداشته، اما تاثیر قابل ملاحظه‌ای روی نرم سازی کانتورهای ماخ و یا توزیع سرعت خواهد داشت. مقدار عمود بودن منحنی ماخ و فشار بسته به تعداد تقسیمات روی مقطع ایرفویل و همچنین ضریب فشردگی نقاط روی مقطع دارد. هر چه فشردگی نقاط در محل شوک بیشتر باشد، دقت نتایج حاصل بالاتر می‌رود. این تاثیرات در شکل (۱۲) نشان داده شده است. در مرحله بعد با توجه به گرادیان‌های حاصل از حل، تطبیق شبکه به صورت حرکت شبکه به سمت گرادیان‌های بالا صورت می‌گیرد و شبکه در محل شوک فشرد ترمی گردد. با فشرد شدن شبکه در محل شوک انتظار داریم که تغییرات ماخ روی مقطع در محل

شوک آنی تر باشد. شکل (۱۳) فشرده شدن شبکه در محل شوک و شکل (۱۴) تاثیرات تطبیق بر تغییرات عددماخ را روی سطح مقطع نشان می دهد. لازم به ذکر است که برای حفظ کیفیت شبکه پس از هر دو تطبیق یک هموارسازی بر روی شبکه صورت گرفته است. عدم حرکت نقاط مرزی باعث می شود تا دقت حل روی مرزها به اندازه داخل مرزها بالا نرود. شکل (۱۵) نتایج برنامه کامپیوتری حاضر را با نتیجه مرجع [۱۶ و ۱۷] مقایسه می نماید. با توجه به این شکل ملاحظه می گردد، علی رغم وجود اختلاف در نزدیکی محل شوک، روند مشابه و سازگاری خوبی بین نتایج حاصله از مرجع [۱۴ و ۱۳] و روش حاضر دیده می شود. با توجه به شکل (۹) اختلاف موجود بین دو نتیجه می تواند از اختلاف روش های عددی کار حاضر و کار پیشین بالحاظ تعداد تقسیمات استفاده شده روی مقطع ایرفویل یکسان برای هر دو باشد که در مرجع [۱۶ و ۱۷] از ۶۵ تقسیم استفاده شده است و در کار حاضر نیز از ۶۵ تقسیم استفاده شده است.

## ۷- نتیجه گیری

در کار حاضر، یک روش تولید شبکه بهینه از ترکیب روش های دلانی و جبهه پیش رونده ارائه شده است که عیب های دوروش مزبور را ندارد. در این روش نقاط به صورت بهینه و پیش رونده از مرزها به سمت میدان حل تولید شده و پس از اصلاح با روش دلانی شبکه تولید می گردد. گرچه در حل میدان، هدف جریان حول یک ایرفویل نمونه بود، ولی یکی از ویژگی های روش حاضر امکان مرزبندی هر نوع هندسه پیچیده و تقسیم بندی نقاط مرزی به فاصله های دلخواه با کمترین اطلاعات ورودی می باشد. نوع ورود اطلاعات به صورت مختصات نقاط یک منحنی، شناسایی مرزها به صورت اتصال چندین منحنی و استفاده از اسپلاین و تقسیم بندی آنها به صورت مناسب تا جای امکان سازمان یافته و کلی برنامه ریزی شده تا بتواند تا حد امکان برای هندسه های دیگر نیز کاربرد داشته باشد. این مساله در کنار خاصیت تولید آسان شبکه بی سازمان برای هندسه های پیچیده و با چند مرز مختلف می تواند هماهنگی لازم برای تولید شبکه در هندسه های پیچیده را ایجاد نماید. یکی دیگر از خواص الگوریتم کار حاضر قابل تعمیم بودن آن به حالت سه بعدی می باشد که کمی پیچیده تر از حالت دوبعدی خواهد بود. همچنین یک روش ساده و درعین حال مفید برای بالابردن کیفیت شبکه پس از تولید استفاده گردید. در آن بدون اینکه اتصال نقاط جابجا شود، نقاط به مرکز هندسی چند ضلعی ای که در آن محصور بودند، منتقل می شدند. روش ارائه شده محدودیت هایی نسبت به گوژ (محدب) بودن سطح ندارد و برای سطوح گوژ نیز جوابگوست و همچنین مثلث های تولید شده تا حد خوبی نزدیک به مثلث متساوی الاضلاع هستند. یک عیب روش حاضر کوچک شدن نامتناسب مثلث ها در نزدیکی جسم جامد است. علت آن سعی این روش برای حل خودکار مساله است. در روش دلانی این کار با فشرده سازی نقاط درون سطح در نزدیکی جسم جامد انجام می گیرد، به عبارتی دیگر خودکار نیست. در نهایت، شبکه نرم شده و معادلات اویلر با روش رو (Roe) در میدان ایرفویل NACA0012 حل شده و نتایج حاصل با نتایج عددی دیگر مقایسه شده که توافق خوبی بین آنها وجود دارد.

## مراجع

- [1] Thompson, J.F., Soni, B.K., and Weatherill, N.P., "Handbook of Grid Generation", CRC Press, Taylor and Francis, LLC, USA, (1999).
- [2] Peraire, J., and Morgan, K., "Unstructured Mesh Generation Including Directional Refinement for Aerodynamic Flow Simulation", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 25 (3-4), pp. 343-355, (1997).

- [3] Loze, M.K., and Saunders, R., "Two Simple Algorithms for Constructing a Two-dimensional Constrained Delaunay Triangulation", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 11, pp. 403-418, (1993).
- [4] Har-Peled, S., and Ungor, A., "A Time-optimal Delaunay Refinement Algorithm in Two Dimensions, in: 21<sup>st</sup> Annual ACM Symposium on Computational Geometry (ScCG), pp. 228-229, Pisa, Italy, (2005).
- [5] Freitag, L., "On Combining Laplacian and Optimization-based Mesh Smoothing Techniques", *AMD Trends in Unstructured Mesh Generation*, ASME 220, pp. 37-43, Evanston, Illinois, USA, (1997).
- [6] Coll, N., Guerrieri, M., and Sellares, J.A., "Combining Improvement and Refinement Techniques: 2D Delaunay Mesh Adoption under Domain Changes", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 201, pp. 527-546, (2008).
- [7] Wu, B., and Wang, SH., "Automatic Triangulation over Three-dimensional Parametric Surfaces Based on Advancing Front Method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 41, pp. 892-910, (2005).
- [8] Frey, P.J., Borouchaki, P.L., and George, P.L., "3D Delaunay Mesh Generation Coupled with an Advancing-front Approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 157, pp. 115-131, (1998).
- [9] El-Hamalawi, A., "A 2D Combined Advancing Front-delaunay Mesh Generation Scheme", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 967-989, (2004).
- [10] Barth, T.J., "On Unstructured Grids and Solvers", *Computational Fluid Dynamics*, Vol. 6, pp. 66-80, (1990).
- [11] Muller, J.D., Roe, P.L., and Deconink, H., "A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 17, pp. 241-255, (1993).
- [12] Marcum, D.L., and Weatherill, N.P., "Unstructured Grid Generation using Iterative Point Insertion and Local Reconnection", *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 9, September, (1995).
- [13] Amenta, M., Bern, M.W., and Epstein, D., "Optimal Point Placement for Mesh Smoothing", *Journal of Algorithms*, Vol. 30, No. 2, pp. 302-322, (1999).
- [14] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solver, Parameter Vectors and Deference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 135, No. 2, pp. 250-258, (1997).
- [15] Jameson, A., "Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics1: Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and their Effect on Accuracy and Multi-grid Convergence", *International Journal of Computational Fluids Dynamics*, Vol. 4, No. 3, pp. 171-218, (1995).

- [16] Jameson, A., "Transonic Aerofoil Calculations using the Euler Equations", Proceedings of IMA Conference on Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics, pp. 289-308, (1982).
- [17] Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite-volume Methods using Runge-Kutta Time-stepping Schemes", AIAA 14<sup>th</sup> Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, USA, (1981).

### فهرست نمادهای انگلیسی

- c : سرعت صوت
- CFL : عدد کورانت - فردریک - لویی
- E, e : انرژی داخلی و انرژی کل واحد جرم سلول
- G, F : شارهای جابجایی در امتداد محورهای X و Y در هر مرز سلول مورد نظر
- $\vec{H}$  : بردار شار جابجایی قائم
- Mach : عدد ماخ
- $\vec{n}$  : بردار یکه قائم یا جهت انتشار امواج
- p : فشار
- q : مولفه سرعت عمود بر مرز سلول
- r : مولفه سرعت موازی با مرز سلول
- $\vec{R}$  : بردار ویژه
- t : زمان
- V, v, u : مولفه‌های سرعت و اندازه سرعت
- U : بردار حالت
- y, x : مختصات مکانی

### فهرست نمادهای یونانی

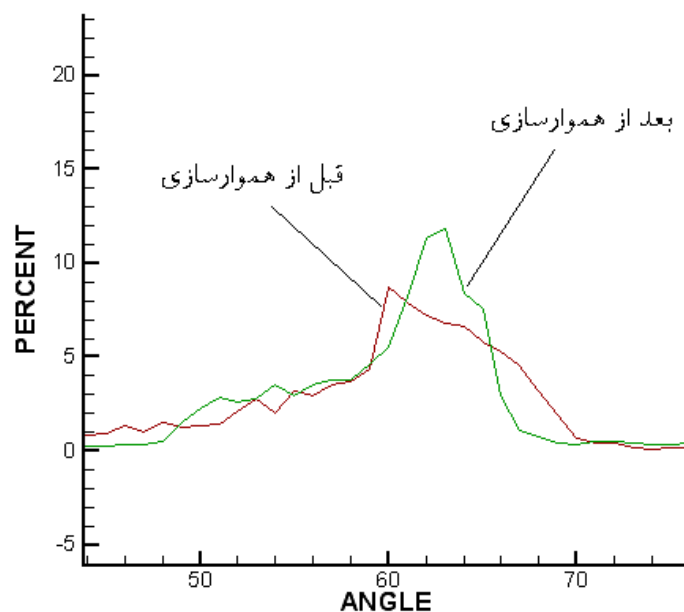
- $\Omega, \partial\Omega$  : مساحت و محیط سلول مورد نظر
- $\gamma$  : نسبت ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت به ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت
- $\lambda$  : مقدار ویژه
- $\rho$  : چگالی
- $\alpha'$  : زاویه حمله

## جدولها

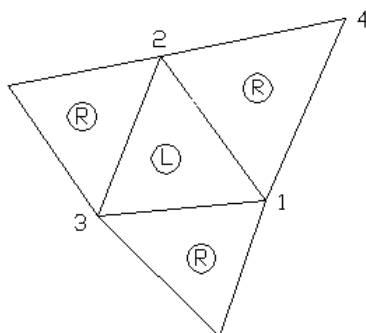
جدول ۱- مقدار انحراف معیار زوایا نسبت به تعداد مراحل هموارسازی

مرحله هموارسازی	انحراف معیار	مرحله هموارسازی	انحراف معیار
۰	۸/۶۷۴۶۴۱	۱۲	۶/۲۴۲۹۸۶
۱	۷/۱۵۲۶۷۰	۱۳	۶/۲۲۸۱۰۷
۲	۶/۸۱۳۹۷۸	۱۴	۶/۲۱۴۹۴۷
۳	۶/۶۴۶۸۲۴	۱۵	۶/۲۰۳۱۹۱
۴	۶/۵۴۰۷۶۸	۱۶	۶/۱۹۲۵۹۸
۵	۶/۴۶۵۴۶۶	۱۷	۶/۱۸۲۹۸۰
۶	۶/۴۰۹۱۷۲	۱۸	۶/۱۷۴۱۸۸
۷	۶/۳۶۵۶۵۵	۱۹	۶/۱۶۱۰۱
۸	۶/۳۳۱۱۲۶	۲۰	۶/۱۵۸۶۱۸
۹	۶/۳۰۳۰۷۰	۲۱	۶/۱۵۱۶۵۴
۱۰	۶/۲۷۹۷۶۱	۲۲	۶/۱۴۵۱۴۰
۱۱	۶/۲۶۰۰۰۹	۵۰	۶/۰۲۵۸۶۱

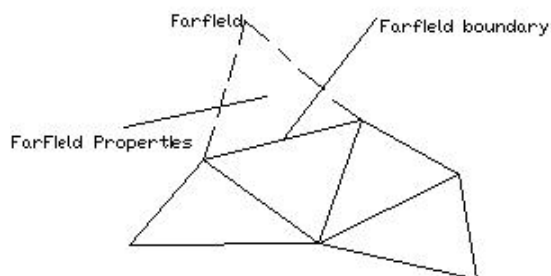
## شکلها



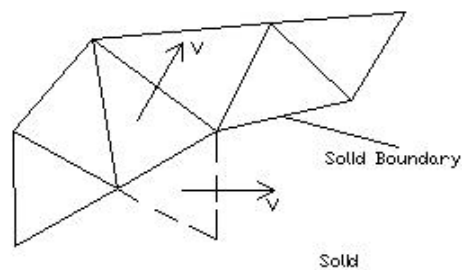
شکل ۱- درصد زوایای موجود در شبکه قبل و بعد از هموارسازی



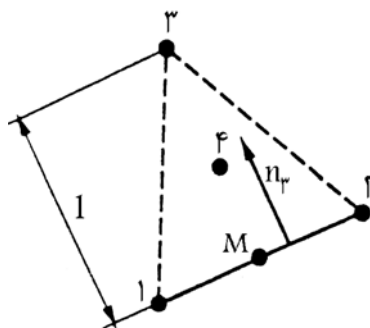
شکل ۲- یک سلول و همسایه‌های آن در محاسبه شار



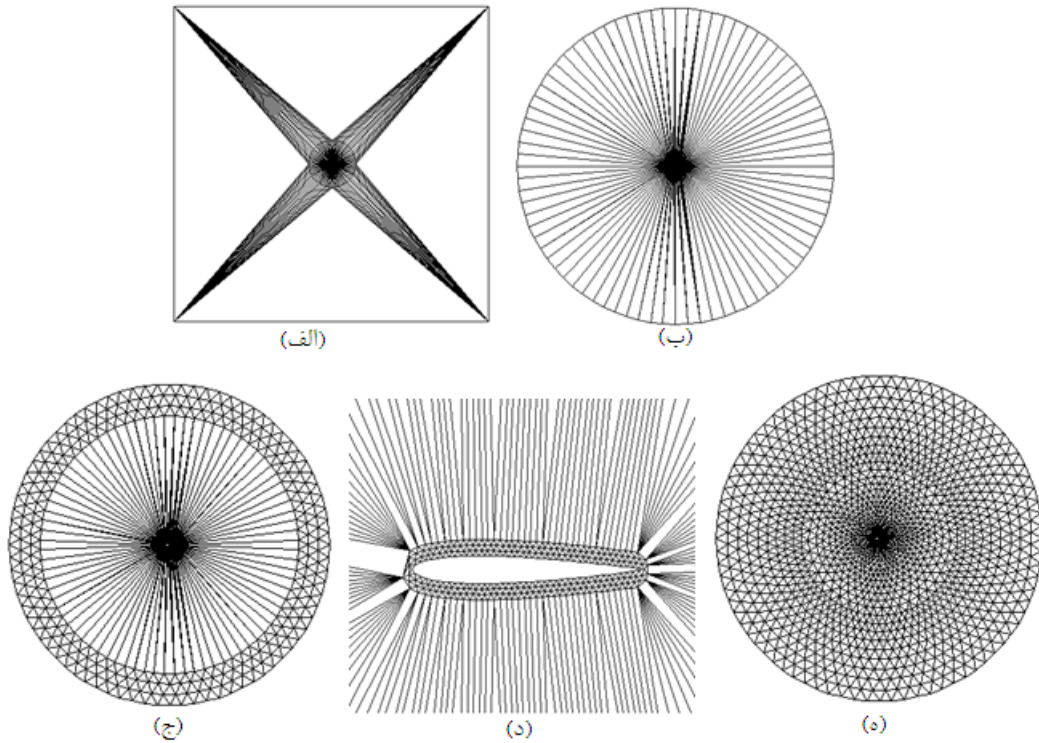
شکل ۳- شرایط مرزی در مرز دور



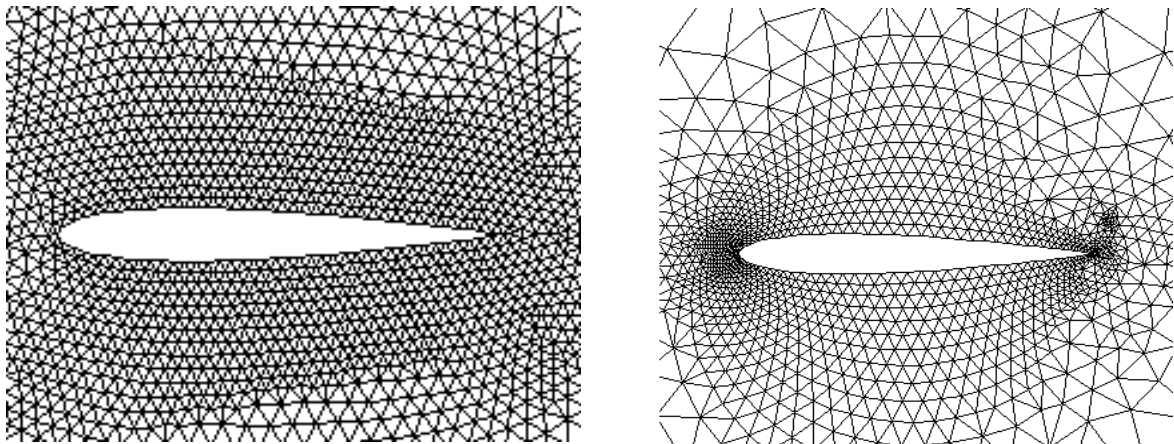
شکل ۴- شرط مرزی بردار سرعت در مرز جامد



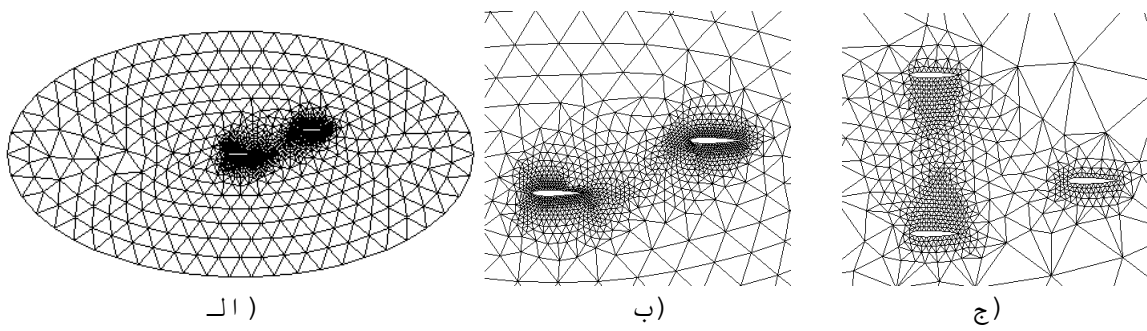
شکل ۵- چگونگی تولید نقطه در امتداد جبهه



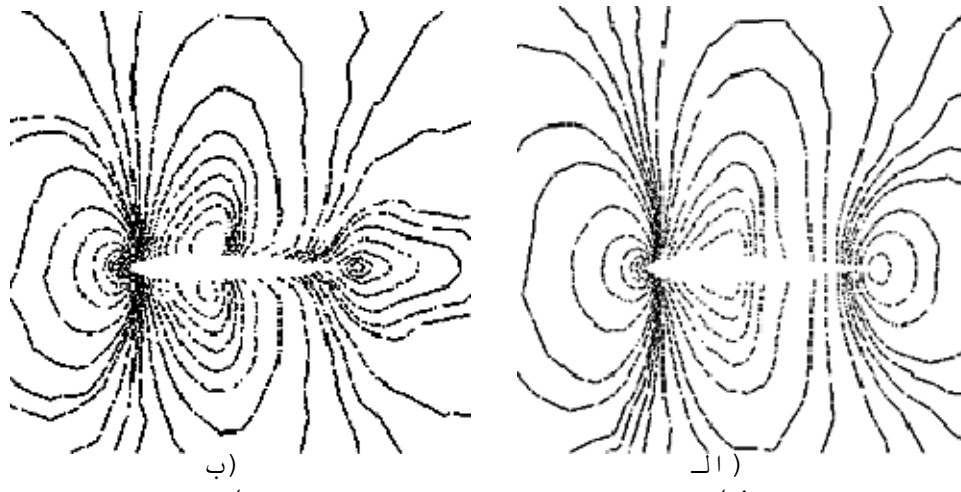
شکل ۶- مراحل مختلف تولید شبکه بی‌سازمان



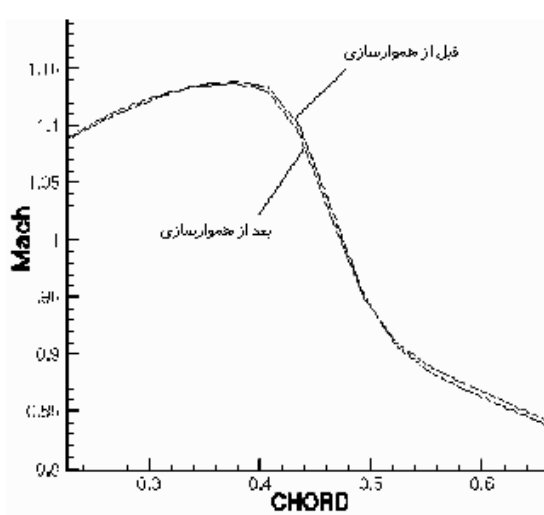
شکل ۷- تاثیرات ضریب تقسیم‌بندی مرزها بر روی شبکه



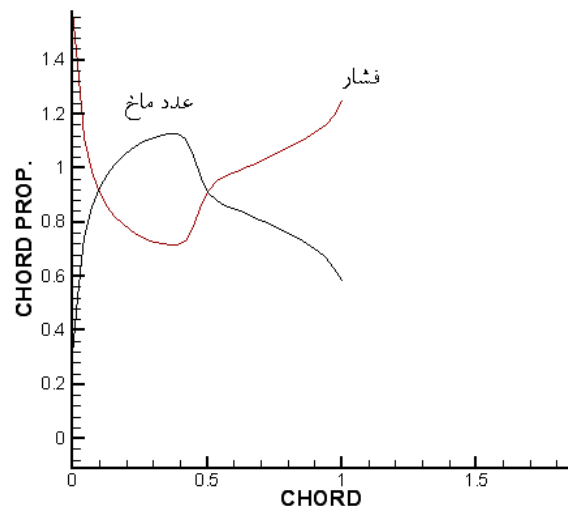
شکل ۸- تولید شبکه بی‌سازمان مثلی برای میدان‌های با اتصال چندگانه



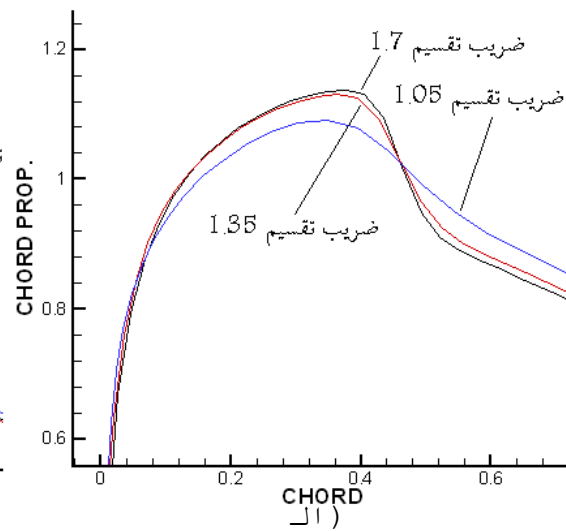
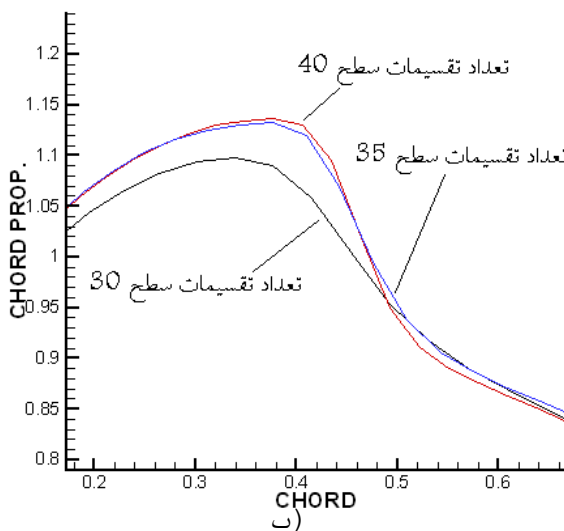
شکل ۹- کانتورهای فشار (الف) و ماخ (ب) برای جریان  $M_\infty$  و اطراف NACA0012



شکل ۱۱- تاثیر هموارسازی شبکه بر عدد ماخ روی مقطع ایرفویل

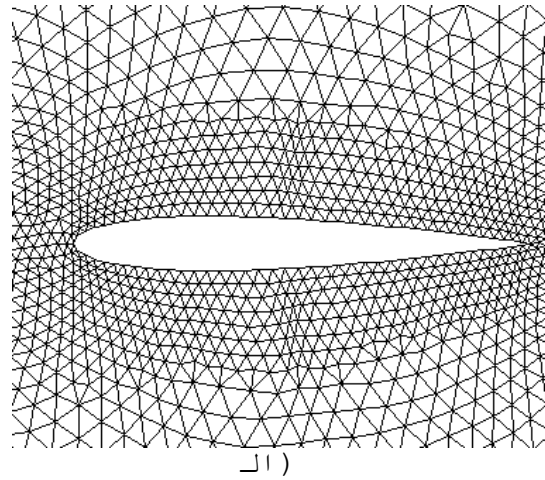
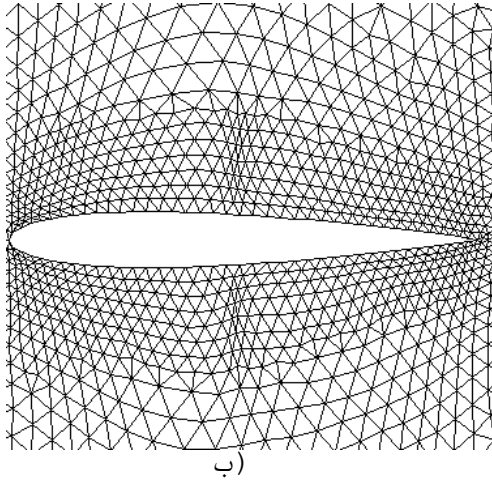


شکل ۱۰- مقادیر فشار و عدد ماخ بر روی مقطع ایرفویل



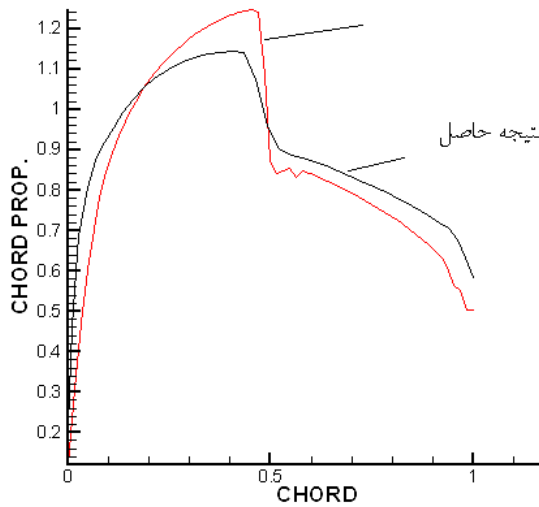
شکل ۱۲- تاثیر تعداد تقسیمات و ضریب تقسیم‌بندی مرزها برشوک (مقدار عدد ماخ)



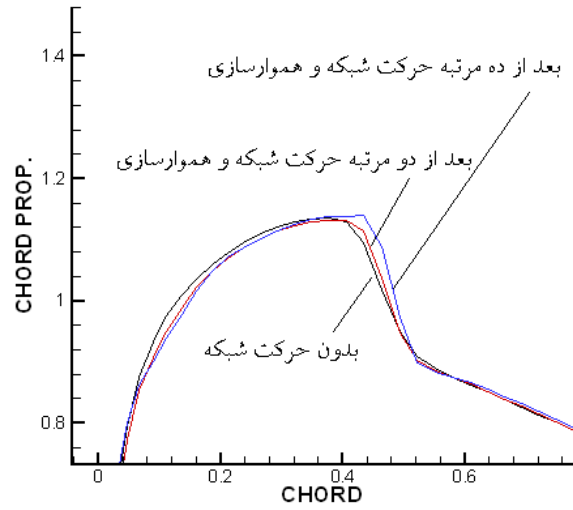


شکل ۱۳- فشرده‌شده شبکه در محل شوک با حرکت شبکه

نتیجه مقاله جیمسون



شکل ۱۵- مقایسه نتایج حاصل (در تعداد تقسیمات مختلف روی ایرفویل)



شکل ۱۴- تاثیر تطبیق شبکه بر مقدار ماخ در شوک

## Abstract

In this investigation, an improved model has been presented for triangular unstructured grid. Advancing front and Delaunay methods are combined in a special method for grid generation. In addition to utilize the advantages of both mentioned methods, this work has adoption capability in solution of compressible flow equations, discontinuities and intense gradients. Adoptability without increase in cells count leads to decrease in calculation time and computer memory usage. Adoption has been done with weighted averaging of flow variables between neighbor cells. Study shows that the solution domain of presented grid has the minimum defected triangular. To analyze flow field, Roe's upwind method in transonic regime over NACA0012 with fifth-order Runge-Kutta scheme accelerated by local time stepping for marching in time has been used. The obtained numerical results have been compared with other available numerical results in literature. There is a good agreement between them.