

## المانهای مرزی نامحدود و کاربرد آنها در تحلیل دینامیکی خطوط راه آهن

جبار علی ذاکری\*، استادیار، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

ویدا قربانی، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

E-mail: zakeri@iust.ac.ir

دریافت: ۱۳۸۸/۱۲/۰۴ - پذیرش: ۱۳۸۹/۰۶/۳۰

### چکیده

سازه روسازی راه آهن، سازه‌ای است با طول نامحدود که مدل سازی آن همواره با قبول فرضیاتی برای شرایط مرزی صورت می‌گیرد. عملاً روشهای مختلفی برای مدلسازی، تشکیل معادلات حرکت و تحلیل دینامیکی این روسازها وجود دارد. یکی از این روشها، مدلسازی روسازی به وسیله المانهای محدود است. اغلب در چنین مدلی، طول محدودی از آن مدلسازی شده و شرایط مرزی تعریف شده اعمال می‌شوند. انتخاب شرایط مرزی، اثراتی بر روی پاسخهای دینامیکی تحمیل می‌کند و برای کاهش چنین اثراتی معمولاً طول خط آهن را تا حدی انتخاب می‌کنند که پاسخهای دینامیکی اجزای خط آهن (شتاب، تغییر مکان و سرعت ارتعاشی) در نقاط انتهایی تقریباً صفر باشد. به این ترتیب افزایش طول باعث افزایش تعداد درجات آزادی معادلات، حجم داده‌ها و طولانی شدن تحلیل می‌شود. به همین منظور، در این مقاله ترکیبی از المانهای محدود و المانهای نامحدود (دو المان انتهایی) برای مدلسازی خط آهن پیشنهاد شده است. همچنین ماتریسهای جرم، میرایی و سختی یک المان نامحدود که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار دارد، با استفاده از توابع شکل انتخابی محاسبه شده است. به این ترتیب با استفاده از دو المان نیمه محدود در طرفین مدل خط آهن به صورت تیر بر روی بستر ارتجاعی، امکان حذف اثرات شرایط مرزی فراهم می‌شود.

واژه‌های کلیدی: روسازی راه آهن، دینامیک خط آهن، المانهای نامحدود، شرایط مرزی

### ۱. مقدمه

در این تحلیل‌ها از ترکیب المانهای محدود با چند المان نامحدود یا نیمه محدود در نقاط مرزی استفاده می‌شود. المانهای نامحدود چنان فرض می‌شوند که در آنها از مصالحی استفاده شده است که تا بی نهایت ادامه داشته و در بی نهایت تغییر شکل آنها صفر می‌شود (شرایط واقعی).

یکی دیگر از مسائل مهندسی که طول بی نهایت داشته و اعمال شرایط مرزی در حوزه زمانی، در نتایج آن مؤثر است، مسائل مرتبط با تحلیل دینامیکی خطوط راه آهن است. دافی و پتیل اثر جرمهای متحرک بر روی تیر نامحدود (ریل) را بررسی کردند. [Cai, 1994, Duffy, 1990 and Patil, 1988]. کزیا نیز اندرکنش خط آهن - قطار را با تعریف المانهای نامحدود تیر، مورد تحلیل قرار داد [Xia, 1995]. مدل‌های مختلفی از المانهای نامحدود دوبعدی در مراجع مختلف از جمله مرجع [Liu, 2005] ارایه شده است. در این مقاله جزئیات مربوط به نحوه نگاشت (Mapping) یک المان نامحدود به المان محدود شکل (۱) تشریح شده و ماتریسهای جرم، میرایی و سختی محاسبه شده‌اند.

در مسایل مهندسی و فیزیکی، حوزه‌های نامحدود و نیمه محدودی وجود دارد که عموماً در مدلسازی و تحلیل رفتار دینامیکی آنها مد نظر قرار می‌گیرد. معمولاً در بررسی رفتار دینامیکی سازه‌های سه بعدی و خصوصاً در تحلیل اندرکنش سازه و خاک، سازه و خاک و آب، مدل کردن محیط پیوسته خاک برای نشان دادن رفتار واقعی ضروری است [Abdel, 2000 and Beer, 1981]. از طرفی تحلیل دینامیکی سازه‌ها در دو حوزه فرکانس و زمانی صورت می‌گیرد. در جاهایی که تحلیل در حوزه زمانی با استفاده از روشهای عددی از جمله المانهای محدود صورت می‌گیرد، لازم است طول محدودی از سازه، المان‌بندی شده و معادلات حرکت آنها تشکیل گردیده و پس از اعمال شرایط مرزی نتایج تحلیل‌ها به صورت تابع زمانی به دست آید. بنابراین در چنین تحلیل‌هایی اثرات شرایط مرزی در پاسخ‌های به دست آمده، مؤثر خواهد بود. Bettess و Zinkiewicz استفاده از المانهای نامحدود و نیمه محدود را در چنین تحلیل‌هایی تشریح کردند [Zienkiewicz, 1983 and Bettess, 1977]. عملاً

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(4 + 3\xi)\xi^2(\xi - 1)^2$$

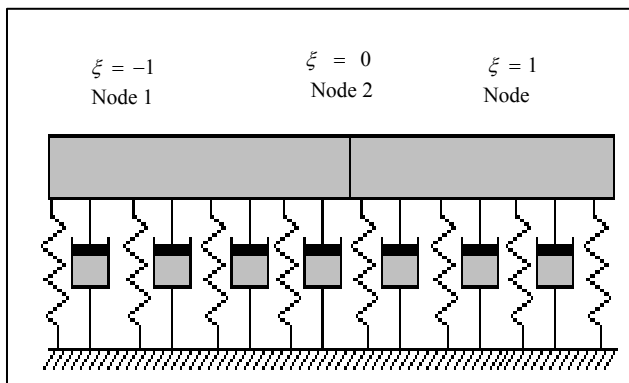
$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)\xi^2(\xi - 1)^2$$

$$N_3(\xi) = (1 - 4\xi)(\xi + 1)^2(\xi - 1)^2$$

$$N_4(\xi) = \xi(\xi + 1)^2(\xi - 1)^2$$

$$N_5(\xi) = \frac{1}{4}(4 - 3\xi)\xi^2(\xi + 1)^2$$

$$N_6(\xi) = \frac{1}{4}(\xi - 1)\xi^2(\xi + 1)^2 \quad (5)$$



شکل ۲. نگاشت ریل با بستر ویسکو الاستیک نامحدود به المان تیری

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5 \quad (6)$$

شش تابع شکل فوق به صورت شماتیک در شکل (۳) ترسیم شده است، که در تعیین ماتریس جرم و سختی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

### ۳. محاسبه ماتریس جرم

مشتق دوم توابع شکل فوق در محاسبه ضرایب سختی ماتریس سختی استفاده خواهد شد. برای تیری با سه گره، تغییر مکان قائم هر مقطعی به فاصله  $x$  در طول تیر به صورت زیر بیان می شود.

$$w(x) = \sum_{j=1}^6 N_j u_j = [N] \{u\}^e \quad (7)$$

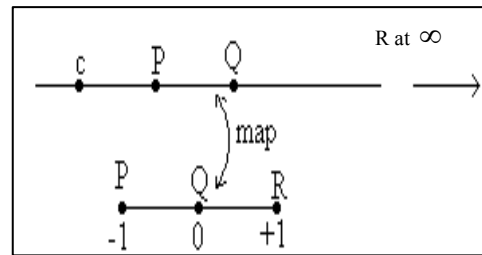
$$\{u\}^e = [w_1, w_{x1}, w_2, w_{x2}, w_3, w_{x3}]^T$$

با توجه به اینکه تغییر مکان و شیب ریل در بی نهایت (گره سوم) صفر است، بنابراین می توان معادلات فوق را به شرح زیر نوشت:

$$w(x) = \sum_{j=1}^4 N_j u_j = [N]_4 \{u\}_4^e \quad (8)$$

$$[N]_4 = [N_1, N_2, N_3, N_4]$$

$$\{u\}^e = [w_1, w_{x1}, w_2, w_{x2}]^T$$



شکل ۱. المان نامحدود و نگاشت آن

### ۲. تابع نگاشت

شکل (۱) اصل کلی تابع نگاشت را نشان می دهد، ابتدا تیر نیمه بی نهایت CPQ جهت نگاشت در راستای محور  $x$  فرض می شود به این ترتیب می توان نوشت:

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi}x_c + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right)x_q \quad (1)$$

که در آن:

$$\zeta = 0 \text{ مرتبط با } x_Q$$

$$\zeta = 1 \text{ مرتبط با } x_\infty$$

$$\zeta = -1 \text{ مرتبط با } x = \frac{x_Q + x_c}{2} \text{ (نقطه}$$

فرضی در وسط تیر نامحدود و محدود)

با فرض  $x_p = a$  و  $x_Q = 2a - a$  فاصله محور تا محور تراورس می توان نوشت:

$$x = \frac{2a}{1-\xi}, \quad \xi = 1 - \frac{2a}{x} \quad (2)$$

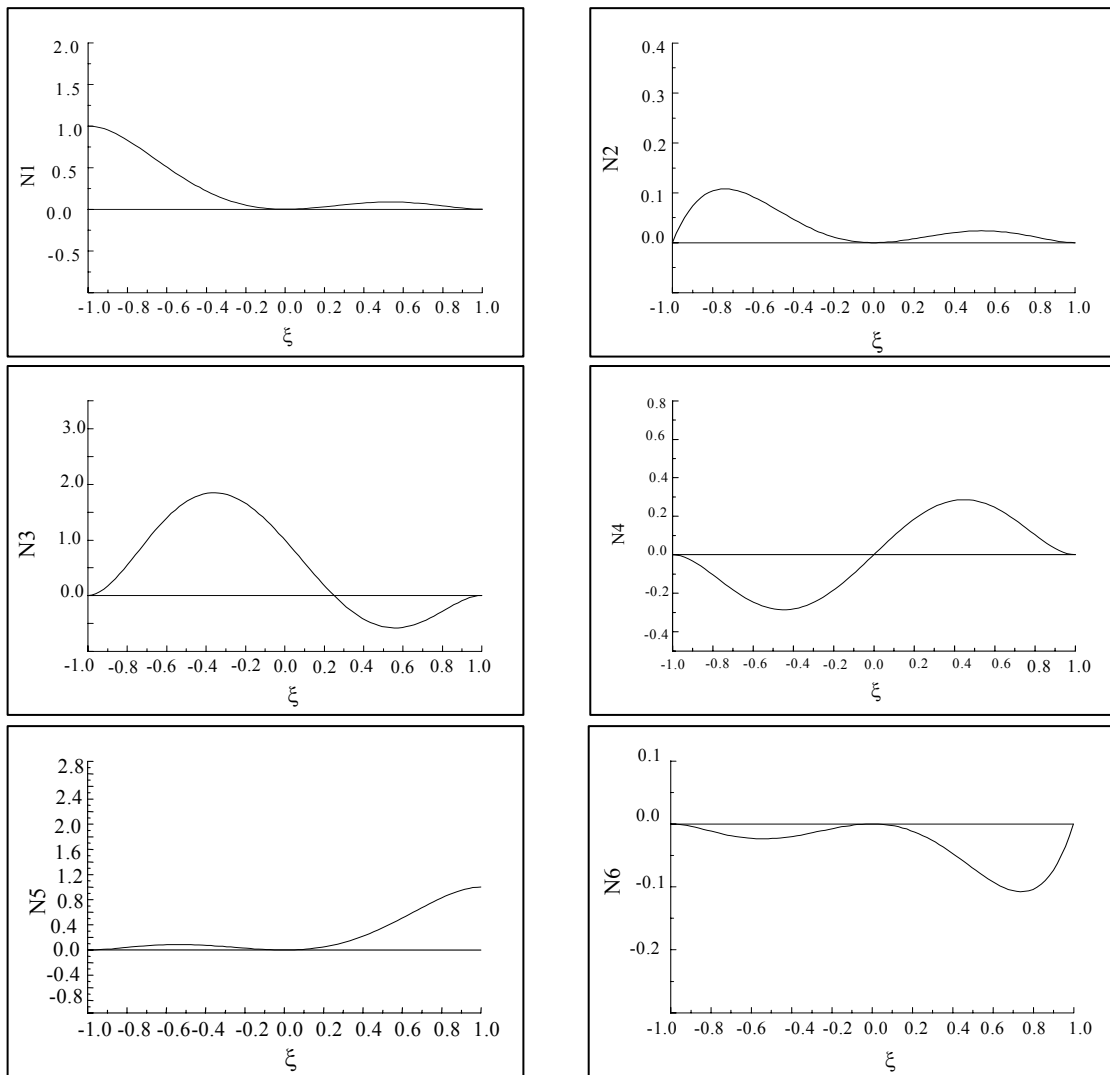
مطابق روش المان محدود، می توان برای المان خاص PR می توان نوشت:

$$[u]^e = Na \quad (3)$$

در این مورد خاص (خط راه آهن) می توان از تئوری مقاومت مصالح با بیان کرنش ها به صورت مشتق دوم تغییر مکان کمک گرفت البته بایستی از پیوستگی تغییر مکان و شیب آن در بین المانها اطمینان حاصل کرد. با در نظر گرفتن  $w_x$  و  $w$  بعنوان تغییر مکان و شیب نقطه  $x$  می توان نوشت:

$$[u]_i = \left\{ \begin{matrix} w_i \\ w_{xi} \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

با فرض سه گره (با شش متغیر) می توان تابع شکل زیر را با ضرایب  $a_1$  تا  $a_6$  تعریف کرد. با تغییر متغیر  $x$  و  $\xi$  می توان توابع شکل را به شرح زیر بیان کرد (شکل ۲)



شکل ۳. توابع شکل المان نیمه بی نهایت

$$|J_b| = \frac{2a}{(1-\xi)^2}$$

با انتگرال گیری از این معادلات می توان نوشت:

$$[R_1] = \frac{a}{315} \begin{bmatrix} 72 & 10.5 & 0 & 24 \\ 10.5 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -8 & 1280 & -320 \\ 24 & 8 & -320 & 128 \end{bmatrix} \quad (11)$$

به این ترتیب ماتریس جرم به راحتی و به صورت زیر

به دست می آید:

$$[M]^e = m_r [R_1] = \frac{m_r a}{315} \begin{bmatrix} 72 & 10.5 & 0 & 24 \\ 10.5 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -8 & 1280 & -320 \\ 24 & 8 & -320 & 128 \end{bmatrix} \quad (12)$$

قبل از محاسبه ماتریسهای جرم و سختی لازم به ذکر است که سرعت ارتعاش با پارامتر  $\dot{w}$  مشخص شده و انرژی جنبشی تیر به صورت زیر بیان می شود:

(9)

$$T = \frac{m}{2} \int_{X_1}^{\infty} \frac{1}{2} m_r \dot{w}^2(x) dx = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \int_{X_1}^{\infty} m_r [N(x)]^T [N(x)] dx \{\dot{u}\}^e \\ = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M]^e \{\dot{u}\}^e$$

که در آن:

$$[M]^e = m_r \int_{X_1}^{\infty} [N(x)]_4^T [N(x)]_4 dx \quad (10)$$

$$[M]^e = m_r [R_1] \text{ OR}$$

$$[R_1] = \int_{X_1}^{\infty} [N(x)]_4^T [N(x)]_4 dx = \int_{-1}^1 [N(\xi)]_4^T [N(\xi)]_4 |J_b| d\xi$$

بنابراین داریم:

$$[K_f]^e = k_{eq}[R_1] = \frac{k_{eq}a}{315} \begin{bmatrix} 72 & 10.5 & 0 & 24 \\ 10.5 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -8 & 1280 & -320 \\ 24 & 8 & -320 & 128 \end{bmatrix}$$

نهایتاً با ترکیب دو بخش اول و دوم می‌توان ماتریس سختی تیر نامحدود را به دست آورد.

$$[K]^e = [K_s]^e + [K_f]^e \quad (۱۶)$$

مشابه همین روش و با استفاده از ماتریسهای سختی و جرم می‌توان ماتریس میرایی را به شرح زیر به دست آورد:

$$[C]^e = [C_s]^e + [C_f]^e = \alpha[M]^e + \beta[K_s]^e + c_{eq}[R_1] \quad (۱۷)$$

## ۵. اثرات طول خط و شرایط مرزی در پاسخ‌های

### خط آهن: مطالعه موردی

دو پارامتر طول مدل انتخابی و شرایط مرزی، در پاسخ دینامیکی خط آهن در حوزه زمان نقش مهمی را ایفا می‌کنند. در انتخاب طول مدل بسیار بزرگ‌تر در مدلسازی خط آهن و تحلیل دینامیکی کل سیستم، به دلیل افزایش بیش از اندازه ابعاد ماتریسهای سختی، جرم و میرایی، زمان تحلیل به شدت افزایش یافته و غیر اقتصادی می‌شود. در خصوص شرایط مرزی نیز ایجاد قیود مرزی غیر واقعی، در پاسخ دینامیکی اجزای خط آهن خصوصاً شتاب ارتعاشی ریل و بازگشت شتابهای برگشتی تأثیر گذاشته و نتایج دست بالاتری را نشان می‌دهند. مروری بر متون فنی [Zakeri, 2008, Grassie, 1996 and Cai, 1994] نشان می‌دهد که برای یک بار یا جرم متحرک ۲۰-۳۰ تراورس (۱۱ تا ۱۵ متر) در مدل خط با شرایط مرزی ساده یا گیردار یا ارتجاعی مورد استفاده قرار گرفته است.

در این مقاله، پاسخ دینامیکی خط آهن در یک نقطه مشخص (نقطه میانی مدل) با در نظر گرفتن یک وسیله نقلیه متحرک بر روی خط انتخابی، محاسبه شده و با استفاده از المانهای نامحدود مرزی، شرایط مرزی واقعی اعمال شده و نتایج با تغییر طول مدل، ارایه شده‌اند. این مدل در شکل (۴) نشان داده شده است. تحلیل دینامیکی با کمک برنامه کامپیوتری DTTI که در مرجع [Zakeri] تشریح شده صورت گرفته است.

## ۴. محاسبات ماتریسهای سختی و میرایی

همان گونه که در شکل (۲) نشان داده شده است، المانهای تیر نامحدود بر روی بستر ارتجاعی قرار دارد. به این ترتیب ماتریسهای میرایی و سختی دارای دو بخش مستقل اند. بخش اول ناشی از سختی و میرایی مصالح المان و بخش دوم ناشی از بستر ارتجاعی آن است. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$[K]^e = [K_s]^e + [K_f]^e \quad (۱۳)$$

اولین قسمت ماتریس سختی المان تیری با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل آن تعیین می‌شود. با مراجعه به مکانیک سازه‌ها می‌توان نوشت:

(۱۴- الف)

$$U_s = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2} EI [w''(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \{u\}^{eT} \int_{x_1}^{\infty} EI [N'']^T [N''] dx \{u\}^e$$

$$U_s = \frac{1}{2} \{u\}^{eT} [K_s]^e \{u\}^e, \quad [K_s]^e = \int_{x_1}^{\infty} EI [N'']^T [N''] dx$$

$$[K_s]^e = EI [R_2]$$

$$[R_2] = \int_{x_1}^{\infty} [N''(x)]^T [N''(x)] dx = \int_{-1}^1 J_b [N''(x)]^T [N''(x)] d\xi$$

$$N_j'' = \frac{d^2 N}{dx^2} = \frac{1}{J^3} \left( \frac{d^2 N}{d\xi^2} J_b - \frac{dN}{d\xi} \frac{dJ_b}{d\xi} \right)$$

با قرار دادن توابع شکل بند قبلی در این معادلات و انتگرال‌گیری از آنها، می‌توان نوشت:

(۱۴- ب)

$$[K_s]^e = \frac{EI}{3003a^3} \begin{bmatrix} 221536 & 135786 & -725312 & 139104 \\ 135786 & 102488 & -407200 & 74656 \\ -725312 & -407200 & 2578320 & -488960 \\ 139104 & 74656 & -488960 & 97280 \end{bmatrix}$$

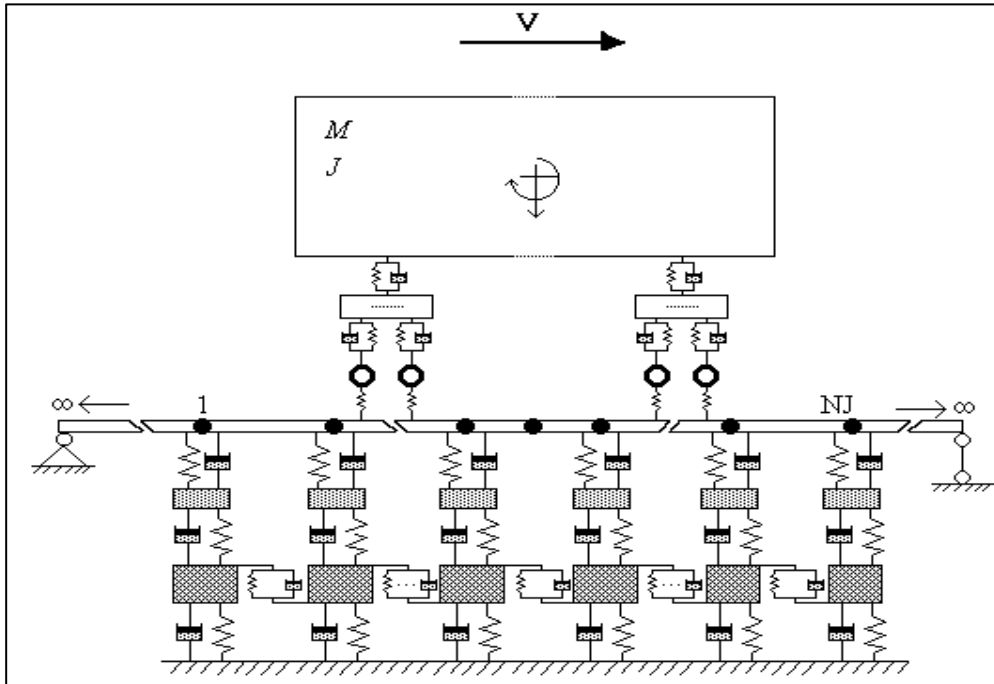
بخش دوم ماتریس سختی المان تیری با در نظر گرفتن سختی بستر  $K_{eq}$  و استفاده از انرژی پتانسیل تیر (ریل) تعیین می‌شود، مجدداً با مراجعه به مکانیک سازه‌ها می‌توان نوشت:

(۱۵)

$$U_f = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2} k_{eq} [w(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \{u\}^{eT} \int_{x_1}^{\infty} k_{eq} [N]^T [N] dx \{u\}^e$$

$$U_f = \frac{1}{2} \{u\}^{eT} [K_f]^e \{u\}^e, \quad [K_f]^e = \int_{x_1}^{\infty} k_{eq} [N]^T [N] dx$$

$$[K_f]^e = k_{eq} [R_1]$$



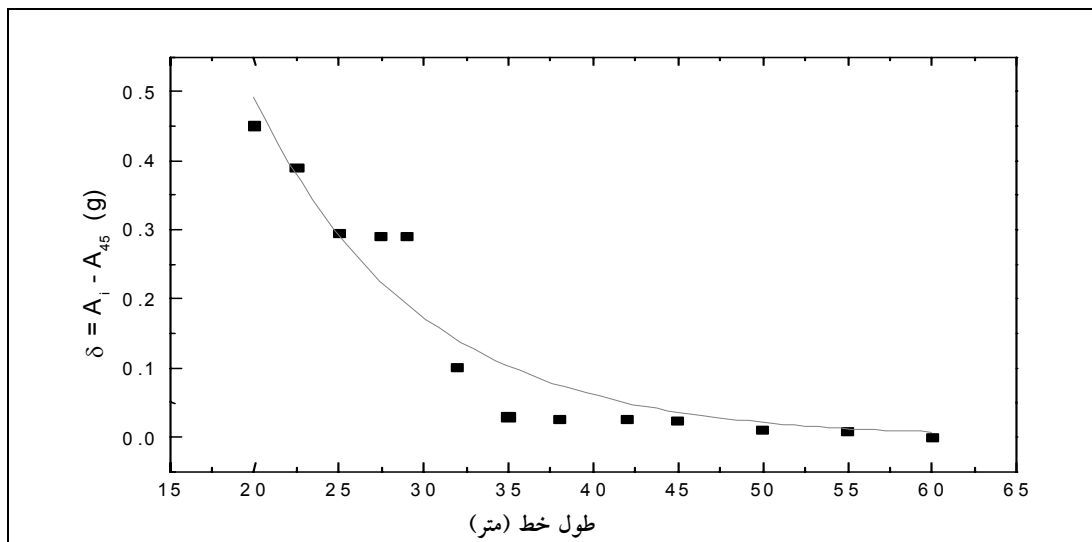
شکل ۴. مدل سیستم خط آهن - قطار با المانهای مرزی نامحدود

ارتجاعی با مدل‌سازی تراورس و بالاست به صورت توده جرمهای متمرکز که به وسیله فنرها و میراگرها به یکدیگر متصل شده‌اند، مشخص گردیده‌اند. وسیله نقلیه نیز با فرض یک بدنه و دو بوژی که هر کدام دارای دو درجه آزادی است، به همراه چهار یا شش چرخ مدل‌سازی شده است. با توجه به این که طول محوری ثابت وسیله نقلیه حدود ۲۱/۵ متر انتخاب شده، بنابراین محاسبات در دو حالت: الف- با شرایط مرزی گیردار به طولهای ۲۲/۵ تا ۶۰ متر و ب- با استفاده از دو المان نیمه بی نهایت و طول کلی بزرگ تر از ۱/۵ برابر طول وسیله نقلیه، صورت گرفته و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه شده‌اند. ضمن تعریف و محاسبه المان نامحدود برای دو انتهای خط آهن، سیستم دینامیکی خط آهن - قطار، مدل‌سازی و تحلیل شد. همان‌گونه که در نتایج محاسبات ارایه شد، تغییرات بیشینه مقدار تغییر مکان قابل توجه نیست، ولی در حالتی که شرایط مرزی گیرداری اعمال شده است، اغتشاش در تغییر مکان وسط دهانه که حاصل برگشت امواج و منعکس کننده شتابهای برگشتی است، به وجود می‌آید. نتایج محاسبات در شرایطی که طول مدل انتخابی کمتر از ۱/۵ برابر طول وسیله نقلیه باشد، کاهش حداکثر تغییر مکان را نشان می‌دهد. همچنین با انتخاب طول مدل به اندازه ۱/۵ برابر وسیله نقلیه، اثر شرایط مرزی به حداقل رسیده و اغتشاشات در تاریخچه زمانی شتاب ریل و تغییر مکان خصوصاً قبل از بوژی دوم از بین می‌رود.

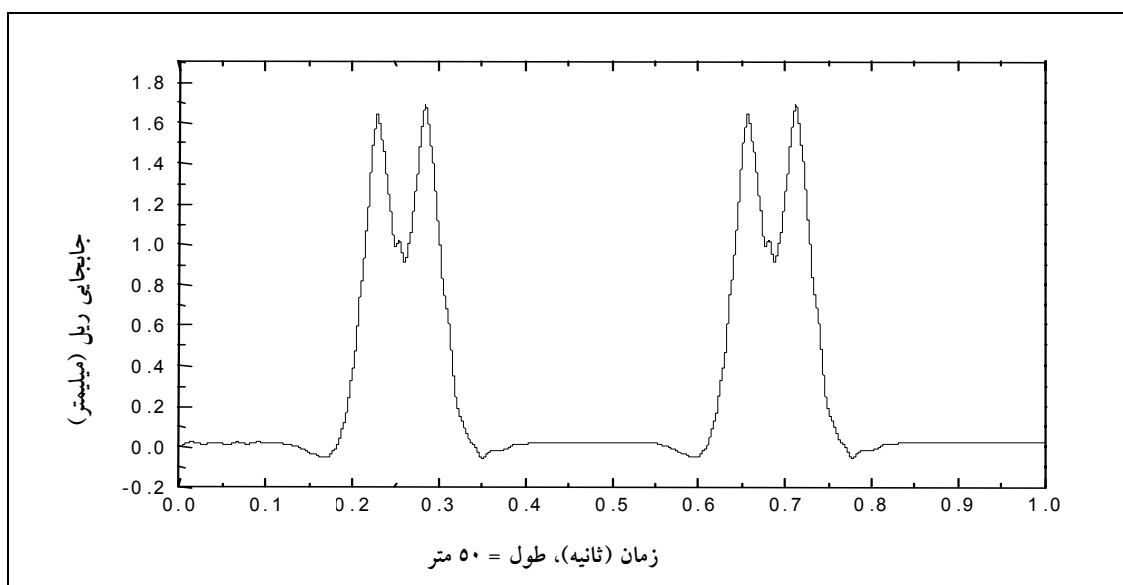
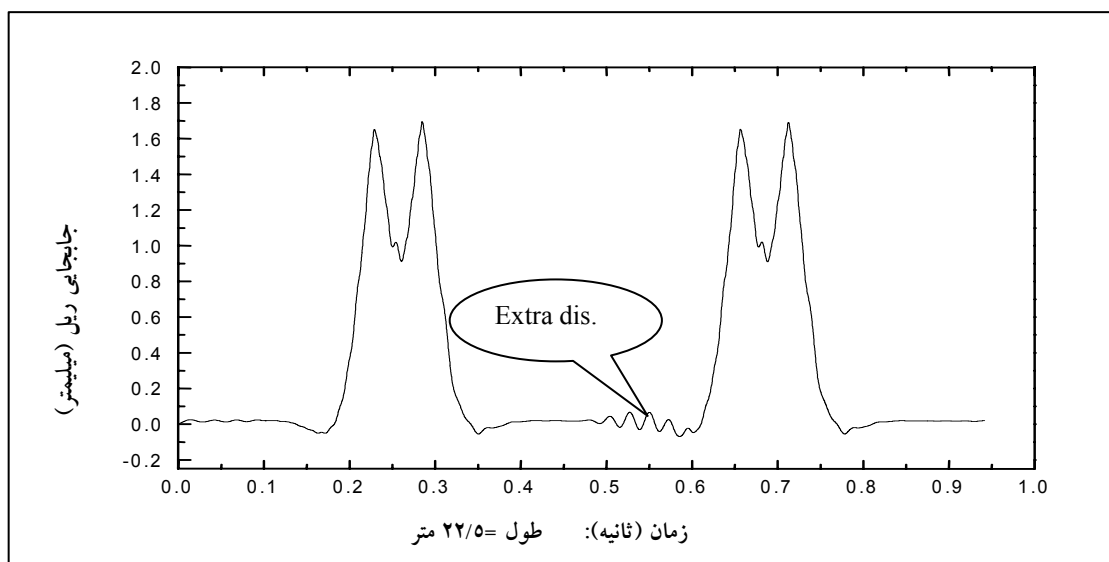
در اولین گام، حداقل طول مدل انتخابی با توجه به فاصله ثابت محوری ۲۱/۵ متر وسیله نقلیه و ۴۱ فاصله تراورس (۲۲/۵ متر) در مدل انتخابی تعیین شده است. سرعت وسیله انتخابی نیز ۱۶۰ کیلومتر بر ساعت انتخاب شده و پاسخها در وسط مدل بررسی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که اثرات شرایط مرزی غیر واقعی در شتاب ارتعاشی ریل در فاصله عبور بین دو بوژی ظاهر می‌شود. آشکار است که طول کوتاه‌تر مدل (برابر طول وسیله نقلیه انتخابی) و شرایط مرزی غیر واقعی باعث انعکاس و برگشت امواج و افزایش شتابهای ارتعاشی می‌شود. به این ترتیب انتخاب طول مدل برابر طول وسیله نقلیه کافی نیست. در ادامه محاسبات برای طولهای ۲۵، ۲۷/۵، ۲۹، ۳۲، ۳۵، ۴۰، ۴۵، ۵۰، ۵۵، ۶۰ و ۶۵ متر انجام شده و بیشینه تفاضل شتابهای ارتعاشی ریل مقایسه شده و به نتایج شکل (۵) دستیابی شده است. درخصوص تاریخچه زمانی تغییر مکان ریل نیز می‌توان گفت که با انتخاب طول محدودتر و شرایط مرزی غیر واقعی، اثرات آنها قبل از عبور بوژی دوم ظاهر می‌شود. شکل (۶) نتایج محاسبات برای دو طول متفاوت و شرایط مرزی متفاوت را نشان می‌دهد.

## ۶. نتیجه‌گیری

مطالعه موردی با تحلیل دینامیکی خط- قطار صورت گرفته است. مدل سازه خط آهن، تیر تیموشنکو بر روی تکیه‌گاههای گسسته ارتجاعی انتخاب شده است و تکیه‌گاههای گسسته



شکل ۵. تفاضل شتاب ارتعاشی ریل در طولهای انتخابی مختلف



شکل ۶. تاریخچه زمانی تغییر مکان نقطه وسط مدل در دو حالت مختلف

۷. مراجع

- Grassie, S. L. (1996) " Models of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies: result of benchmark test", Veh. Sys. Dyn. Supplement 25, pp. 243-262.
- Liu, D. S. and Chiou, D. Y. (2005) "2-D infinite element modeling for elastostatic problems with geometric singularity and unbounded domain", Computers & Structures , V. 83, pp. 2086-2099.
- Patil, S. (1988) " Response of infinite railroad track to vibrating mass", J. Eng. Mech. 114(4) pp. 688-703.
- Zakeri, J. A. and Xia, H. (2008) "Sensitivity analysis of track parameters on train- track dynamic interaction", Journal of Mechanical Science and Technology. V. 22 (No.7), pp. 1299-1304.
- Xia, H., Zhang, M., Wei, N. and Wen, J. (1995) "Study of vibration effects of underground trains on surrounding environments", Advances in Structural Engineering (Edited by H. Xia, and Y. J. Chen,) China Railway Publishing House, pp.116-122.
- Zienkiewicz, O. C., Emson, C. and Bettess, P. (1983) "A novel boundary infinite element" Int. J. for Num. Methods in Eng., 19, pp. 393-404.
- Abdel-Fattah, T. T. , Hodhod, H. A. and Akl, A. Y. (2000) " A novel formulation of infinite elements for static analysis", Computers & Structures , V. 77, pp. 371-379.
- Beer, G. and Meek, J. L. (1981) "Infinite domain elements", Int. J. for Num. Methods in Eng., 17, pp. 43-52.
- Bettess, P. (1977) "Infinite elements", Int. J. for Num. Methods in Eng., 11, pp. 53-64.
- Cai, C., Cheung, Y. and Chan, H.(1988) "Dynamic response of infinite continuous beams subjected to a moving force- An exact method", J. Sound Vib., 123 (3), pp. 461-472.
- Cai, Z. and Raymond, G. (1994) "Use of a generalized beam/spring element to analyze natural vibration of rail track and its application", Int. J. Mech. Sci. 36(9). pp. 863-876.
- Duffy, D. (1990) "The response of an infinite railroad track to a moving, vibrating mass" J. Appl. Mech. 57 (3), pp.66-73.