

تغییر مکان استاتیکی تیرهای پیزوالکتریک چندلایه دو سر لولا تحت بارگذاری‌های مختلف

افشین منوچهری^{۱*}، علیرضا جلیلی^۲

* نویسنده مسئول: Manouchehri@iaukhsh.ac.ir

چکیده

در این مقاله ابتدا معادلات ساختاری پیزوالکتریک‌ها بیان شده و با بکارگیری این معادلات، انرژی داخلی تیر چندلایه پیزوالکتریک محاسبه شده است. سپس با ترکیب اصل حداقل انرژی پتانسیل و روش رایلی-ریتز، رابطه‌ای برای جابه‌جایی تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت ممان متمرکز، نیروی متمرکز، بار گسترده و ولتاژ خارجی، به طوریکه شرایط مرزی را ارضا کند حدس زده شده است و ضرایب مجهول با حداقل کردن انرژی پتانسیل به دست آمده است. در ادامه روابط به دست آمده برای تیرهای بای مورف و یونی مورف دو سر لولا ساده شده و بار الکتریکی و همچنین ولتاژ ایجاد شده در آنها در حالت حسگری به دست آمده است. جهت اطمینان از صحت و دقت روابط تحلیلی به دست آمده، نتایج تحلیلی با نتایج نرم‌افزار ANSYS ۱۰ در قالب مثال‌های عددی مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: پیزو الکتریک، تیر چندلایه، معادلات ساختاری، بای مورف، یونی مورف.

۱- استادیار دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۱- مقدمه

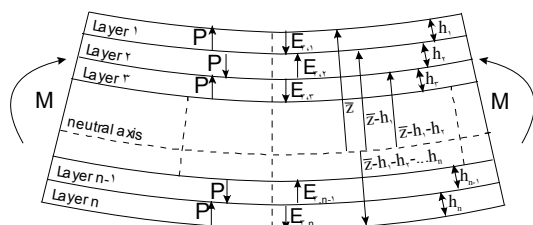
و اصل همیلتون^۴ به بررسی استاتیکی و دینامیکی تیر بای مورف سری و موازی با شرایط مرزی دو سر لولا و تحت بار گسترده و ولتاژ اعمالی پرداخته اند. بالز و همکاران [۷] با استفاده از معادلات حاکم بر پیروالکتریک ها و اصل مینیمم انرژی پتانسیل^۵، تغییر مکان تیر پیروالکتریک یک سر گیردار را تحت انواع بارگذاری به شکل بسته به دست آورده اند.

در مجموع در تحقیقات قبلی تنها به تیرهای دولایه پیروالکتریک و نوع خاصی از بارگذاری روی آنها پرداخته شده است. همچنین معیاری برای سنجش دقت و صحت روابط به دست آمده ارائه نشده است.

در این مقاله با به کارگیری معادلات ساختاری پیروالکتریک ها، انرژی هر لایه محاسبه شده و انرژی کل از مجموع انرژی تمامی لایه ها به دست می آید. سپس با ترکیب اصل مینیمم انرژی پتانسیل و روش رایلی-ریتز^۶، رابطه ای برای جابه جایی تیر چند لایه پیروالکتریک دو سر لولا، بطوریکه شرایط مرزی را ارضا کند، حدس زده شده و ضرایب مجهول با مینیمم کردن انرژی پتانسیل به دست می آید. معادلات به دست آمده برای تیرهای دو لایه پیروالکتریک ساده شده و بار الکتریکی و ولتاژ ایجاد شده در آنها در حالت حسگری محاسبه می شود. روابط تحلیلی به دست آمده در قالب چند مثال با نتایج نرم افزار ANSYS مقایسه می شود.

۲- فرضیات

در شکل (۱) هندسه تیر چند لایه نشان داده شده است.



شکل (۱). نمایش هندسه تیر چند لایه

پیروالکتریک ها^۱ موادی هستند که وقتی نیروی خارجی بر آنها وارد می شود، اتم ها و مولکولهای کریستالی آنها قطبی شده و یک میدان دو قطبی را به وجود می آورند که می توان آن را به ولتاژ الکتریکی تبدیل نمود. به طور معکوس اعمال ولتاژ الکتریکی خارجی به آنها باعث تغییر ابعاد هندسی می شود. اثر پیروالکتریک در سال ۱۸۸۰ بوسیله پیر و ژاک کوری کشف شد. در سال ۱۸۸۱ خاصیت معکوس پیروالکتریک توسط گابریل لیپمن کشف شد [۱].

پرکاربردترین تیرهای پیروالکتریک، تیرهای یونی مورف^۲ و بای مورف^۳ و تیرسه لایه پیروالکتریک هستند. تیر یونی مورف از یک لایه پیروالکتریک و یک لایه الاستیک تشکیل شده است. تیر بای مورف از دو لایه پیروالکتریک تشکیل شده که جهت پلاریزه لایه ها می تواند یکسان (بای مورف موازی) و یا مخالف هم (بای مورف سری) باشد [۲]. تیر سه لایه از یک لایه پیروالکتریک در مرکز و دو لایه پیروالکتریک در طرفین تشکیل شده است. پارک و مون [۳] به بررسی استاتیکی تیر پیروالکتریک بای مورف و یونی مورف با شرایط مرزی یک سر گیردار و دو سر لولا تحت بار متمرکز و ولتاژ خارجی پرداخته اند و پارامترهای به دست آمده مانند تغییر مکان و بار الکتریکی برای انتهای تیر محاسبه شده است. اسمیت و چوی [۴] با استفاده از روش انرژی به بررسی استاتیکی تیر پیروالکتریک یونی مورف پرداخته اند. در این مرجع با محاسبه مقدار انرژی سیستم، پارامترهایی چون خیز، شیب و بار الکتریکی برای انتهای تیر محاسبه شده است. یاکوم و آبرامویچ [۵] رفتار یک تیر پیروالکتریک را به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار داده اند. در این مرجع همچنین به بررسی پدیده هیستریزس در پیروالکتریک ها پرداخته شده است. پوگت و فرناندس [۶] با استفاده از معادلات حاکم بر پیروالکتریک ها

۴ - Hamilton's principle

۵ - Minimum total potential energy

۶ - Rayleigh-Ritz method

۱- Piezoelectrics

۲- Unimorph

۳ - Bimorph

فرضیات زیر در نظر گرفته می شود:

۱- رفتار تیر در خمش از تیر اوایلر برنولی پیروی می کند.

۲- هر لایه می تواند پیزوالکتریک یا الاستیک باشد.

۳- در سطح مشترک دولایه لغزشی وجود ندارد.

۴- شعاع انحنای تیر خیلی بیشتر از ضخامت آن است.

$$T_{1,i} = \frac{1}{s_{11,i}} (-zK^\circ - d_{31,i} E_{3,i}) \quad (6)$$

بنابراین ممان ایجاد شده در تیر با n لایه به صورت زیر است:

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} T_{1,i} z dz \quad (7)$$

با جایگذاری معادله (۶) در معادله (۷) و انتگرالگیری از آن:

$$M = -CK^\circ - M_{piezo} \quad (8)$$

که در رابطه (۸)

$$M_{Piezo} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} d_{31,i} E_{3,i} (h_{i,o}^2 - h_{i,u}^2) \quad (9)$$

$$C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} (h_{i,o}^3 - h_{i,u}^3) \quad (10)$$

با استفاده از رابطه (۸) شعاع انحنای تیر را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$K^\circ = -\frac{M + M_{Piezo}}{C} \quad (11)$$

چگالی انرژی داخلی برای یک لایه به صورت زیر است [۴].

$$W_i = \frac{1}{2} E_{3,i} D_{3,i} + \frac{1}{2} T_{1,i} S_{1,i} \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱۲) و انتگرال گیری حجمی، انرژی

داخلی کل W_{total} تیر چند لایه به صورت زیر به دست می آید:

$$W_{total} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^\ell \varepsilon_{33,i}^T w_i h_i E_{3,i}^2 dx$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^\ell \frac{w_i h_i}{s_{11,i}} d_{31,i}^2 E_{3,i}^2 dx \quad (13)$$

$$+ \int_0^\ell \left[\frac{M^2}{2C} + \frac{M M_{piezo}}{C} + \frac{M_{piezo}^2}{2C} \right] dx$$

اکنون انرژی پتانسیل کل سیستم با استفاده از عبارت زیر محاسبه می شود.

$$\Pi = W_{tot} - W_a \quad (14)$$

در عبارت فوق W_a کار نیروهای خارجی است. با جایگذاری

رابطه (۱۳) در رابطه (۱۴):

۳- حل تحلیلی

معادلات حاکم بر پیزوالکتریک ها به صورت زیر است:

$$S_i = s_{ij} T_j + d_{ki} E_k \quad (1)$$

$$D_k = d_{kj} T_j + \varepsilon_{kl} E_l$$

در رابطه فوق $i, j, k, l = 1, 2, 3$ و S کرنش، T تنش، E

میدان الکتریکی، D جابه جایی الکتریکی، d ثابت

پیزوالکتریک، s معکوس ماتریس سختی و ε ثابت

دی الکتریک است. چون تیر دارای هندسه یک بعدی است،

معادلات فوق را می توان به صورت زیر کاهش داد:

$$S_1 = s_{11} T_1 + d_{13} E_3 \quad (2)$$

$$D_3 = d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3$$

در مرجع [۷] برای یک تیر با n لایه محل تار خشی از رابطه ۳

به دست آورده شده است. در این رابطه h_i ضخامت لایه i ام و

w_i عرض لایه i ام است.

$$\bar{Z} = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i \sum_{j=1}^i h_j}{2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i} \quad (3)$$

اگر شعاع انحنای تیر خیلی بیشتر از ضخامت تیر باشد، رابطه زیر

بین کرنش و شعاع انحنا برقرار می باشد. در این رابطه K° انحنا

(عکس شعاع انحنا) است.

$$S_1(z) = -zK^\circ \quad (4)$$

کمترین و بیشترین فاصله لایه i ام از تار خشی، یعنی $h_{i,u}$ و

$h_{i,o}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$h_{i,u} = \bar{Z} - \sum_{j=1}^i h_j \quad (5)$$

$$h_{i,o} = \bar{Z} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j$$

تحریک می شوند، داریم:

$$M_{piezo} = m_p V \quad (21)$$

در رابطه فوق m_p یک ضریب ثابت است که بستگی به چگونگی اعمال ولتاژ به لایه ها دارد. با این تعریف معادله (۲۰) به صورت زیر در می آید:

$$\xi(x) = \frac{L(x-L)}{6C} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M + \frac{m_p}{2C} x(x-L)V \quad (22)$$

ب) تیر پیزوالکتریک تحت نیروی متمرکز

وقتی تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت نیروی متمرکز در وسط تیر قرار گیرد، کار نیروی متمرکز به صورت $W_a = F \cdot \xi(x)_{x=L/2}$ است. بنابراین با جایگذاری W_a در رابطه (۱۵) و استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[C \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{Piezo} \right] dx - F \left(\frac{\partial \xi}{\partial a_i} \right)_{x=L/2} = 0 \quad (23)$$

با استفاده از رابطه فوق و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت زیر است:

$$\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L) + a_3 x^3(x-L)$$

ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_1 = -\frac{FL}{16C} + \frac{M_{piezo}}{2C} \quad (24)$$

$$a_2 = -\frac{5F}{64C} \quad , \quad a_3 = \frac{5F}{64CL}$$

بنابراین با جایگذاری ضرایب مجهول در معادله تغییر مکان، خیز تیر به صورت زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = -\frac{L^3(x-L)}{16C} \left(\frac{x}{L} + \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) F + \frac{m_p}{2C} x(x-L)V \quad (25)$$

ج) تیر پیزوالکتریک تحت بار گسترده

در این قسمت فرض می شود تیر تحت بار گسترده P قرار دارد.

بنابراین کار نیروی خارجی از رابطه $W_a = Pw \int_0^L \xi(x) dx$ با جایگذاری W_a در رابطه (۱۵) و استفاده از

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^L \varepsilon_{33,i}^T w_i h_i E_{3,i}^Y dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^L \frac{w_i h_i}{s_{11,i}} d_{31,i}^Y E_{3,i}^Y dx \quad (15)$$

$$+ \int_0^L \left[\frac{M^Y}{2C} + \frac{M_{piezo}}{C} + \frac{M_{piezo}^Y}{2C} \right] dx - W_a$$

با استفاده از روش رایلی-ریتز، جابه جایی تیر دو سر لولا را به صورت زیر فرض می شود:

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^k a_j x^j (x-L) \quad (16)$$

هدف پیدا کردن ضرایب مجهول a_j است، به نحوی که $\xi(x)$ به دست آمده از رابطه (۱۶) را حداقل کند. بنابراین:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (17)$$

الف) تیر پیزوالکتریک تحت ممان متمرکز

اگر تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت ممان متمرکز در انتهای تیر قرار گیرد، کار نیروی خارجی از رابطه

$$W_a = M \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L}$$

در رابطه (۱۵) و استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[C \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{Piezo} \right] dx - M \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \quad (18)$$

با استفاده از عبارت فوق و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به

صورت $\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L)$ ، ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{M}{C} + \frac{3M_{piezo}}{C} \right) \quad , \quad a_2 = \frac{M}{6LC} \quad (19)$$

با جایگذاری ۱۹ در معادله تغییر مکان، خیز تیر در اثر ممان متمرکز به صورت زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = \frac{L(x-L)}{6C} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M + \frac{M_{piezo}}{2C} x(x-L) \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (۹) و توجه به اینکه تمامی لایه ها با یک ولتاژ

$$\xi(x) = -\frac{s_{11}L^3(x-L)}{16h^3} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) P \quad (32)$$

روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[C \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{Piezo} \right] dx \quad (26)$$

۴- تغییر مکان تحت ولتاژ اعمالی:

$$-Pw \int_0^L \frac{\partial \xi}{\partial a_i} dx = 0$$

$$\xi(x) = \frac{3d_{31}}{8h^2} x(x-L)V \quad (33)$$

با استفاده از رابطه (۲۶) و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت زیر است:

$$\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L) + a_3 x^3(x-L)$$

ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

۵- بار الکتریکی ایجاد شده در تیر بای مورف

برای به دست آوردن بار الکتریکی بایستی از D_3 ، انتگرال گرفت تا بار الکتریکی به دست آید [۸] بنابراین:

$$a_1 = -\frac{wL^2}{24C} P + \frac{M_{piezo}}{2C} \quad (27)$$

$$q = w \int D_3 dx = w \int (d_{31}T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3) dx \quad (34)$$

با استفاده از روابط (۶) و (۸) و (۲۹) و جایگذاری در رابطه فوق:

$$a_2 = -\frac{wL}{24C} P, \quad a_3 = \frac{w}{24C} P$$

$$q = \frac{wl\varepsilon_{33}}{4h} \left(2 + \frac{d_{31}^2}{s_{11}\varepsilon_{33}^T} \right) V \quad (35)$$

بنابراین با جایگذاری ضرایب مجهول، تغییر مکان تحت بار گسترده از رابطه زیر به دست می آید:

با توجه با رابطه $q = C_p V$ و معادله (۳۵) ظرفیت تیر بای مورف به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\xi(x) = -\frac{wL^3(x-L)}{24C} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) P \quad (28)$$

$$C_p = \frac{wl\varepsilon_{33}}{4h} \left(2 + \frac{d_{31}^2}{s_{11}\varepsilon_{33}^T} \right) \quad (36)$$

$$+ \frac{m_p}{2C} x(x-L)V$$

حال می توان ممان ایجاد شده در تیر در اثر بار مکانیکی خارجی را محاسبه و با جایگذاری در رابطه $T_1 = \frac{M \cdot \xi}{I}$ و استفاده از رابطه (۳۴) بار الکتریکی را برای نقاط مختلف تیر بای مورف محاسبه نمود. نتایج به صورت زیر می باشد:

۴- تغییر مکان تیر بای مورف دو سر لولا

تیر پیزوالکتریک بای مورف سری، تیری است که از دو لایه پیزوالکتریک با جهت پلاریزه متفاوت تشکیل شده است. ضخامت هر لایه h فرض می شود. بنابراین با استفاده از روابط

$$(9) \text{ و } (10) \text{ و جایگذاری } E_3 = -\frac{V}{2h} \text{ داریم:}$$

۱- بار الکتریکی تولید شده تحت بار متمرکز در وسط:

$$q = \frac{3d_{31}F}{8h^2} x^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (37)$$

$$C = \frac{2}{3} \frac{w}{s_{11}} h^3, \quad M_{piezo} = -\frac{wd_{31}h}{2s_{11}} V \quad (29)$$

۲- بار الکتریکی تولید شده تحت بار گسترده:

با جایگذاری رابطه (۲۹) در روابط (۲۰)، (۲۵) و (۲۸) تغییر مکان تیر بای مورف دوسر لولا تحت انواع بار گذاری به صورت زیر به دست می آید.

$$q = \frac{3d_{31}w}{4h^2} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) P \quad (38)$$

۱- تغییر مکان تحت ممان متمرکز:

ولتاژ ایجاد شده در نقاط مختلف را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\xi(x) = \frac{s_{11}L(x-L)}{4wh^3} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M \quad (30)$$

$$V = \frac{q}{C_p} \quad (39)$$

۲- تغییر مکان تحت نیروی متمرکز:

۶- تحلیل تیر یونی مورف

خیز تیر یونی مورف را می توان از روابط (۲۲) و (۲۵) و (۲۸)

$$\xi(x) = -\frac{3s_{11}L^2(x-L)}{32wh^3} \left(\frac{x}{L} + \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{5}{6} \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) F \quad (31)$$

۳- تغییر مکان تحت بار گسترده:

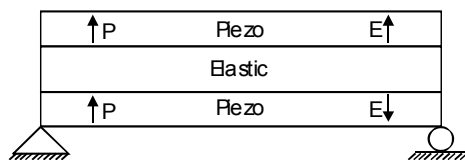
مثال عددی ۱- یک تیر پیزوالکتریک سه لایه و دو سر لولا مطابق شکل ۲ به طول تیر $0.15m$ و عرض $0.01m$ تحت ولتاژ $250V$ در هر لایه قرار دارد. ضخامت لایه الاستیک $0.01m$ و ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک $0.005m$ می‌باشد. مدول الاستیسیته لایه الاستیک برابر $200GPa$ و لایه‌های پیزوالکتریک از جنس PZT-5A در نظر گرفته شده که خواص آن در زیر آمده است [۸]. هدف تعیین تغییر مکان تیر با استفاده از رابطه (۳۳) و مقایسه آن با حل عددی نرم افزار ANSYS می‌باشد.

ماتریس سختی ماده پیزوالکتریک به صورت زیر است:

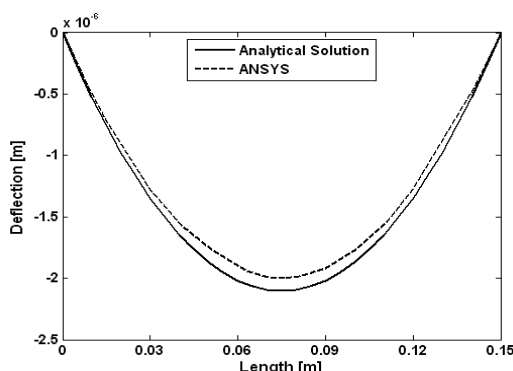
$$C = \begin{bmatrix} 121 & 75/9 & 75/4 & 0 & 0 & 0 \\ 75/9 & 1121 & 75/4 & 0 & 0 & 0 \\ 75/4 & 75/4 & 111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22/6 \end{bmatrix} GPa$$

ثابت پیزوالکتریک به صورت زیر است:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 12/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12/3 & 0 \\ -5/4 & -5/4 & 15/8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{C}{m}$$



شکل (۲) نمایش تیر سه لایه پیزوالکتریک دو سر لولا



شکل (۳) مقایسه حل تئوری و نرم افزار ANSYS برای تغییر مکان تیر

سه لایه و دو سر لولا تحت ولتاژ 250 volt

در شکل (۳) مقایسه بین حل تحلیلی و نرم افزار ANSYS

به دست آورد. در این روابط باید به جای C, M_{piezo} با استفاده از روابط (۹) و (۱۰)، مقادیر زیر را قرار داد:

$$M_{piezo} = \frac{d_{31} w}{2} \frac{h_m (h_p + h_m)}{(h_m s_p + h_p s_m)} V \quad (40)$$

$$C = \frac{w A}{12 s_m s_p (h_m s_p + h_p s_m)}$$

که در این رابطه

$$A = (h_p^4 s_m^2 + 4 h_p^3 h_m s_m s_p + 6 h_m^2 h_p^2 s_m s_p + 4 h_m^3 h_p s_m s_p + h_m^4 s_p^2)$$

در رابطه فوق زیر نویس m مربوط به ماده الاستیک و زیر نویس p مربوط به خواص ماده پیزوالکتریک می‌باشد.

ظرفیت تیر یونی مورف و بار الکتریکی ایجاد شده در آن را می‌توان به طریق مشابه تیر بای مورف محاسبه نمود، که نتیجه به صورت زیر است:

$$C_p = \frac{hw}{h_p} \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2 h_m (s_m h_p^2 + s_p h_m^2)}{A} \right) \quad (41)$$

بار الکتریکی ایجاد شده در تیر یونی مورف در اثر نیروی متمرکز F در وسط و همچنین تحت بار گسترده P به ترتیب از روابط (۴۲) و (۴۳) به صورت زیر به دست می‌آید.

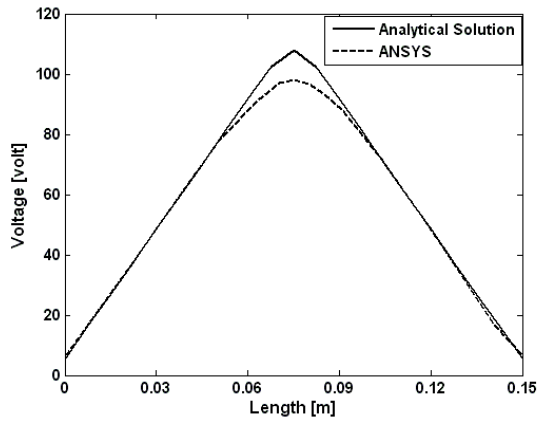
$$q = \left[\left(\frac{3 d_{31} S_m}{2 A} (2 h_p h_m s_p + h_m^2 s_p + h_p^2 s_m) \right) x^2 \right] F \quad (42)$$

$$q = \left(\frac{6 d_{31} w S_m}{A} (2 h_p h_m s_p + h_m^2 s_p + h_p^2 s_m) \right) \times \left(\frac{Lx}{4} - \frac{x^3}{6} \right) P \quad (43)$$

برای محاسبه ولتاژ ایجاد شده نیز کافیت با توجه به رابطه (۳۹) بار الکتریکی بر ظرفیت تیر یونی مورف تقسیم شود.

۷- مثال عددی

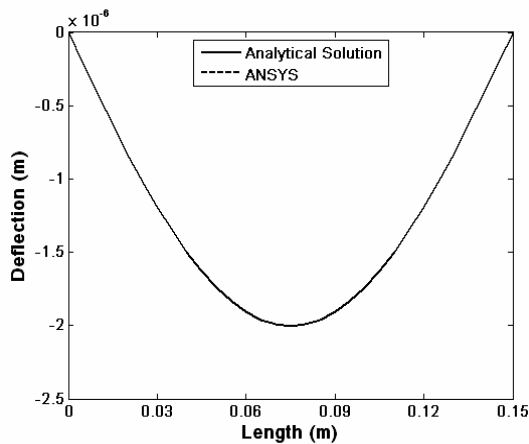
در این قسمت جهت اطمینان از صحت روابط تحلیلی به دست آمده در قسمتهای قبل در قالب مثال‌هایی، تغییر مکان تیر سه لایه پیزوالکتریک، تغییر مکان تیر بای مورف و یونی مورف و همچنین ولتاژ ایجاد شده در آنها بررسی شده و نتایج به دست آمده با نرم افزار ANSYS مقایسه خواهد شد. لازم به ذکر است، در محاسبات تحلیلی از برنامه نوشته شده برای تیر n لایه پیزوالکتریک دو سر لولا تحت انواع بارگذاری، توسط نرم افزار MATLAB استفاده شده است.



شکل (۵) مقایسه ولتاژ ایجاد شده در تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز بین حل تحلیلی و نرم افزار ANSYS

مثال عددی ۳- یک تیر یونی مورف دو سر لولا تحت بار

گسترده 10 KN/m^2 قرار دارد. طول تیر 0.15 m و ضخامت لایه الاستیک 0.1 m است. همچنین مدول الاستیک لایه الاستیک برای 200 GPa و لایه پیزوالکتریک از جنس PZT-5A می باشد. هدف محاسبه خیز تیر و ولتاژ ایجاد شده در تیر است.

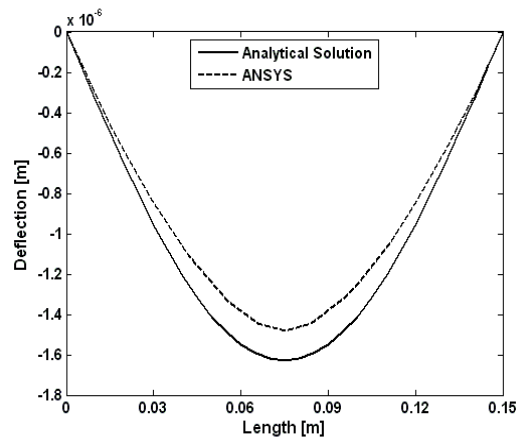


شکل (۶) خیز تیر یونی مورف تحت بار گسترده به روش تحلیلی

در شکل (۶) خیز تیر فوق نشان داده شده است. حداکثر اختلاف بین حل تئوری و نرم افزار ANSYS برابر ۷٪ است. در شکل (۷) نیز ولتاژ ایجاد شده در تیر در حالت حسگری نمایش داده شده است. حداکثر ولتاژ ایجاد شده در تیر برابر 49.5 volt است. با توجه به شکل (۷) حداکثر اختلاف بین ولتاژ تئوری و ANSYS برابر ۲٪ است.

صورت گرفته است. حداکثر اختلاف در این مورد ۴٪ می باشد که مربوط به نقطه مرکز تیر است.

مثال عددی ۲- یک تیر پیزوالکتریک بای مورف سری، دو سر لولا از جنس PZT-5A تحت نیروی متمرکز 1 N در مرکز تیر قرار دارد. طول تیر 0.15 m و ضخامت هر لایه 0.1 m و پهنای تیر 0.01 m است. هدف محاسبه خیز تیر با استفاده از رابطه (۳۱) و ولتاژ ایجاد شده در آن با استفاده از رابطه (۳۹) مقایسه آن با حل عددی نرم افزار ANSYS می باشد.



شکل (۴) مقایسه نتایج تحلیلی و نرم افزار المان محدود برای تغییر مکان تیر بای مورف تحت نیرو

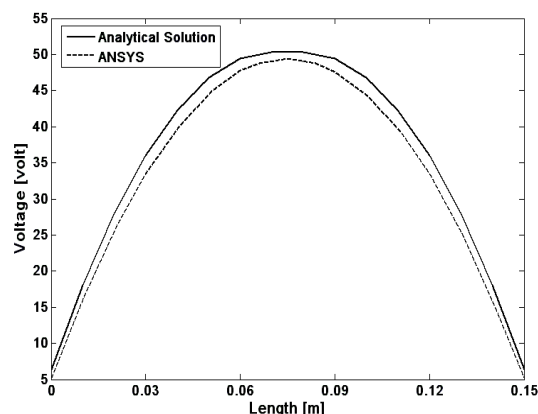
در شکل (۴) مقایسه بین حل تحلیلی و المان محدود صورت گرفته است. حداکثر اختلاف در این مورد برابر ۹٪ است. با جایگذاری روابط (۳۶) و (۳۷) در رابطه (۳۹) ولتاژ تولید شده در تیر بای مورف را می توان محاسبه نمود. در شکل (۵) مقایسه بین حل تحلیلی صورت گرفته و حل عددی برای ولتاژ ایجاد شده در تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز نشان داده شده است.

۹- فهرست علائم

C	ماتریس سختی N/m^2
D	جابه‌جایی الکتریکی C/m^2
d	ثابت پیزوالکتریک C/N
E	میدان الکتریکی N/C
e	ثابت پیزوالکتریک
h	ضخامت m
K°	انحناء
l	طول m
M	ممان $N.m$
q	بار الکتریکی
S	کرنش
T	تنش N/m^2
V	ولتاژ
W	کار
w	عرض m
\bar{Z}	تار خنثی
ε	ثابت دی‌الکتریک F/m
π	انرژی پتانسیل
	زیرنویس:
i, j, k	شمارنده
m	ماده الاستیک
p	ماده پیزوالکتریک

۱۰- مراجع

- [۱] Reza Moheimani S.O., Fleming A.J., Piezoelectric transducers for vibration control and damping. - (Advances in industrial control), Springer-Verlag London Limited, UK, ۲۰۰۶.
- [۲] Gordan T.L., Ounaies Z., Piezoelectric Ceramics Characterization, ICASE Report, NO.۲۸, ۲۰۰۱.
- [۳] Park J.K., Moon W.K., Constitutive Relations for Piezoelectric Benders Under Various Boundary



شکل (V) مقایسه ولتاژ تولید شده در تیر یونی مورف در حالت حسگری به روش تئوری و نرم‌افزار ANSYS

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل و روش رایلی - ریتز معادلات تغییر مکان تیر چندلایه پیزوالکتریک تحت شرط مرزی دو سر لولا برای بارگذاری‌های مختلف به‌دست آورده شد. سپس نتایج تحلیلی به‌دست آمده برای تیرهای بای مورف و یونی مورف ساده شده و بار الکتریکی و ولتاژ تولید شده در آنها در حالت حسگری محاسبه گردید. برای بررسی صحت روابط به‌دست آمده تغییر مکان تیر سه‌لایه تحت ولتاژ خارجی، تغییر مکان تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز و ولتاژ ایجاد شده در آن در حالت حسگری و تغییر مکان تیر یونی مورف تحت بار گسترده و ولتاژ ایجاد شده در آن، به صورت تحلیلی و به کمک نرم‌افزار ANSYS مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت، که مطابقت خوبی را نشان داد. نتایج نشان داد حداکثر ولتاژ ایجاد شده در تیرهای بای مورف و یونی مورف دو سر لولا در حالت حسگری در وسط تیر می‌باشد که تیر بیشترین خیز را در اثر بارگذاری دارد. همچنین افزایش ولتاژ متناسب با افزایش خیز تیر است و هرچه از تکیه‌گاه تیر دورتر شویم، دقت داده‌های مساله کاهش پیدا می‌کند. در نهایت اینکه با استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک در حالت حسگری می‌توان خیز تیرها را با استفاده از ولتاژ ایجاد شده در لایه پیزوالکتریک نمایش داد. همچنین می‌توان در حالت عملگری با اعمال ولتاژ خارجی به لایه پیزوالکتریک خیز تیرها را کنترل نمود (خیز را می‌توان کم یا زیاد کرد).

Conditions, *Journal Sensors and Actuator A: Physical*, volume ۱۱۷, ۲۰۰۵, pp. ۱۵۹-۱۶۷.

- [۴] Smits J.G., Choi W., The Constituent Equations of Piezoelectric Heterogeneous Bimorphs, *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Volume ۳۸, No.۳, ۱۹۹۱.
- [۵] Yocum M., Abramovich H., Static Behavior of Piezoelectric Actuated Beams, *Computers & Structures*, Volume ۸۰, Number ۲۳, ۲۰۰۲, pp. ۱۷۹۷-۱۸۰۸
- [۶] Fernandes A., Pouget J., Analytical and numerical approaches to piezoelectric bimorph, *International Journal of Solid and Structures*, Volume ۴۰, ۲۰۰۳, pp. ۴۳۳۱- ۴۳۵۲.
- [۷] Balls R.G., Schlaak H.F., Schmid A.J., The Constituent Equations of Piezoelectric Multilayer Bending Actuators in Closed Analytical Form and Experimental Results, *Journal Sensors & Actuators .A: Physical*, ۲۰۰۴, pp. ۱-۷.
- [۸] Yang J., An Introduction to The Theory of Piezoelectricity, Department of Engineering Mechanics University of Nebraska-Lincoln, U.S.A., ۲۰۰۵.