

## شبیه سازی عددی بالاروی امواج بلند با استفاده از رهیافت نگاشت به فضای محاسباتی

علی مهدوی<sup>۱\*</sup>، ناصر طالب بیدختی<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: تاریخ پذیرش:

### چکیده

از دیدگاه شبیه سازی عددی، بالاروی و به دنبال آن پایین آمدن امواج بر روی ساحل، در محدوده ی مسائل با مرز متحرک می گنجد. با توجه به این در این نوع مسائل، طول ناحیه ی حل با زمان تغییر می کند، اعمال صحیح شرایط مرزی در هر گام زمانی مستلزم تعیین مرز متحرک است. در مطالعه ی حاضر، معادلات غیر خطی آب کم عمق به همراه شرایط مرزی آن، با استفاده از یک نگاشت هندسی از فضای فیزیکی (واقعی) به فضایی محاسباتی منتقل می گردند، بطوری در فضای جدید، طول ناحیه ی حل در خلال فرایند بالا-پایین روی موج بدون تغییر باقی می ماند و مرز متحرک به مرزی ثابت تبدیل می گردد. معادلات حاکمه که پس از اعمال نگاشت، عبارتهای غیرخطی جدیدی در آنها پدیدار می شود، با استفاده از الگوی تفاضل محدود دو مرحله ای ریچمایر- لکس- وندروف گسسته سازی شده و با اعمال شرایط مناسب مرزی حل می گردند. برای این منظور برنامه ای در محیط فرترن ۹۰ نوشته شده است. در انتها، مقایسه ای بین نتایج حاصل از این شبیه عددی با داده های موجود آزمایشگاهی ارائه می گردد.

واژه های کلیدی: معادلات غیر خطی آب کم عمق، مرز متحرک، تبدیل لاگرانژی- اویلری، موج منفرد

1- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه های هیدرولیکی، دانشکده ی مهندسی دانشگاه شیراز.

2- استاد بخش مهندسی راه و ساختمان، دانشکده ی مهندسی دانشگاه شیراز.

\* نویسنده ی مسوول مقاله: amahdavi.ir@gmail.com

## مقدمه

بررسی فرایند انتشار و بالاروی امواج بلند بر روی ساحل شیب‌دار در زمره‌ی مسائل کلاسیک نمونه‌ی آب پویایی<sup>۱</sup> (هیدرودینامیک) سواحل بشمار می‌آید، که معمولاً در مطالعه‌ی اثرات ناشی از امواج سونامی بر نواحی ساحلی مطرح می‌گردد. در سالهای اخیر، بررسی انتشار و بالاروی امواج بلند موضوع بسیاری از مطالعات تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی بوده است. تاکنون از معادلات غیر خطی آب کم عمق<sup>۲</sup> (NLSW) برای شبیه سازی فرایندهای انتشار و بالاروی امواج بلند به طور گسترده استفاده گردیده است. برای اولین بار، کریر و گرینسپن (۱۹۵۸) با استفاده از معادلات غیر خطی آب کم عمق، روشی را برای تبدیل این معادلات به دستگاهی از معادلات خطی با قابلیت حل تحلیلی پیشنهاد نمودند. این محققین به کمک روش خود به بررسی بالاروی امواج دوره‌ای با شکل موجهای اولیه گوناگون بر روی سطح شیب دار پرداختند [۳]. تاک و هوانگ (۱۹۷۲) به توسعه‌ی تبدیل کریر و گرینسپن پرداختند و از آن برای حل بالا روی امواج بلند تحت پیکر بندی های اولیه اختصاص داده شده به سطح آب استفاده کردند [۹]. سینولاکیس (۱۹۸۶)، بر اساس آزمایش‌های خود، که در مقایسه با کارهای پیشین از روش‌های دقیقتری در آنها استفاده شده بود، روابطی را برای پیش بینی بیشینه‌ی بالاروی امواج منفرد غیر شکننده و شکننده ارائه داد [۷]. از آنجا که محققین بسیاری برای تعیین میزان دقت شبیه‌های تحلیلی و عددی خود از نتایج آزمایشگاهی مذکور استفاده کرده‌اند، نتایج شبیه ارائه شده در این تحقیق نیز با این داده‌ها مقایسه می‌گردند. تیتوف و سینولاکیس (۱۹۹۵) به کمک روش تفاضلات محدود به حل شکل مشخصاتی معادلات غیر خطی آب کم عمق پرداختند و از آن برای شبیه سازی انتشار و بالاروی امواج منفرد<sup>۳</sup> استفاده کردند. این محققین برای جلوگیری از بروز مسأله‌ی ناپایداری عددی، معادلات مشخصه را با الگوی عددی گودونوف<sup>۴</sup> حل کردند [۸]. در شبیه آنها خط متحرک ساحلی با روش هیبرت و پرگرین (۱۹۷۹)

[۵]، یعنی افزودن و کم کردن نقاط محاسباتی مطابق با موقعیت خط ساحلی شبیه سازی گردید. داد (۱۹۹۸) با حل معادلات غیر خطی آب کم عمق به کمک حل کننده‌ی ریمنان از نوع<sup>۵</sup> که در پویایی<sup>۶</sup> (دینامیک) گازها بکار می‌رود، بالاروی موج را بررسی کرد. در روش این محقق، یک عبارت برای بیان اتلاف کارمابه<sup>۷</sup> (انرژی) در معادلات حاکمه اعمال شد و یک عمق موضعی حداقل  $d_{min}$ ، نیز تعریف گردید. چنانچه عمق سیال در یک سلول محاسباتی کمتر از  $d_{min}$  باشد، آن سلول خشک و در غیر این صورت تر در نظر گرفته می‌شد. خط ساحلی به عنوان خطی که سلول‌های تر را از خشک جدا می‌کند، تعریف گردید. شبیه سازی‌های این محقق از تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی برخوردار بود [۴].

از آنجا که در شبیه سازی عددی بالاروی موج، برخی گره‌های محاسباتی قبل از رسیدن موج به آنها خشک هستند، تعیین طول ناحیه‌ی حل، و به بیان دیگر، مکان‌یابی مرز متحرک خشک-تر در هر گام زمانی مشکلی عمده محسوب می‌گردد. در این مطالعه با اعمال یک نگاشت مختصاتی، معادلات و شرایط مرزی آن به فضای محاسباتی منتقل می‌گردند. در مختصات جدید، موقعیت خط ساحلی با زمان تغییر نکرده، و اعمال شرایط مرزی تا حدودی ساده‌تر صورت می‌پذیرد. تمامی شبیه سازی‌ها به وسیله‌ی برنامه‌ای که به همین منظور در محیط فرترن ۹۰ نوشته شده است، صورت می‌پذیرد. برای سنجش کارایی شبیه عددی، نتایج حاصل از آن با جواب تحلیلی حاصل از نظریه‌ی نمونه‌ی کلاسیک امواج و داده‌های آزمایشگاهی سینولاکیس (۱۹۸۶) مقایسه می‌گردند.

## معادلات حاکمه

همان طور که در قسمت قبل اشاره گردید، تاکنون محققین بسیاری برای شبیه سازی انتشار و بالاروی امواج بلند از معادلات غیر خطی آب کم عمق (NLSW) استفاده کرده‌اند. این معادلات، که در واقع بقای جرم و بقای اندازه‌ی حرکت را بیان می‌کنند، معمولاً برای شبیه سازی جریان آزاد سیالی تراکم ناپذیر و غیر لزج تحت اثر

<sup>1</sup> - hydrodynamics

<sup>2</sup> Non-Linear Shallow Water equations (NLSW)

<sup>3</sup> solitary waves

<sup>4</sup> Godunov scheme

<sup>5</sup> Reo-type Riemann solver

<sup>6</sup> - dynamic

<sup>7</sup> - energy

### روش نگاشت به فضای محاسباتی

هنگام بکار بردن معادلات NLSW برای تحلیل بالا روی موج مشکلاتی در زمینه ی تعیین موقعیت خط ساحلی پیش می‌آید. از آنجا که این موقعیت در خلال فرایند بالا روی ثابت نیست، باید در شبیه عددی تدبیر خاصی در جهت تعریف خط ساحلی اتخاذ کرد. در اینجا از روش نگاشت به فضای محاسباتی که به وسیله ی ژانگ و همکاران در سال (۲۰۰۱) معرفی گردید استفاده می‌شود [۱۰].

در این روش سادگی روش اولر حفظ شده، و از رهیافت لاگرانژی برای تعیین موقعیت خط ساحلی استفاده می‌گردد. بدین منظور، با استفاده از تبدیل مختصات زیر، معادلات (۱) و (۲) از فضای واقعی  $(x, t)$ ، به فضای محاسباتی  $(\bar{x}, \bar{t})$  نگاشت می‌گردند.

$$x = g(\bar{x}) + \xi(\bar{t})f(\bar{x}), \quad t = \bar{t}. \quad (3)$$

که در آن  $\xi(\bar{t})$  به موقعیت خط ساحلی در فضای واقعی اشاره دارد. توابع  $f(\bar{x})$  و  $g(\bar{x})$  به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$g(\bar{x}) = \bar{x}, \quad f(\bar{x}) = 1 + \frac{\bar{x}}{L}.$$

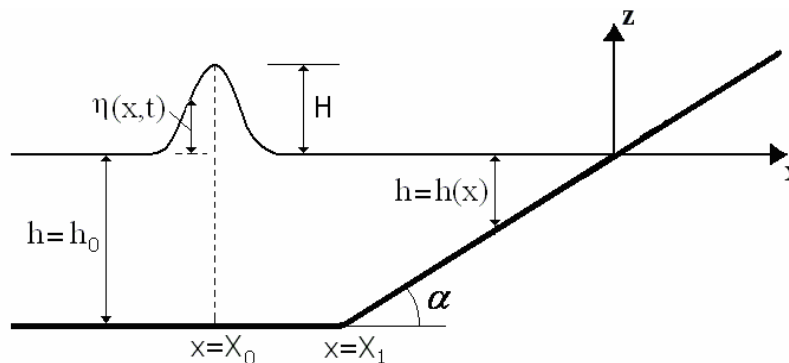
نیروی گرانش بکار می‌روند. در این معادلات، سرعت به صورت متوسط‌گیری شده در عمق<sup>۱</sup> بوده و توزیع فشار آب ایستایی<sup>۲</sup> حاکم است و از اثر کشش سطحی صرفنظر می‌گردد. معادلات (NLSW) در مواردی بکار می‌روند که بعد قائم جریان بسیار کوچکتر از بعد افقی آن است؛ نظیر انتشار امواج بلند که نسبت طول موج به عمق آب بیشتر از ۲۰ است. چنین امواجی در مکانیک کلاسیک امواج به عنوان امواج آب کم عمق<sup>۳</sup> شناخته می‌شوند [۶]. معادلات (NLSW) در حالت یک بعدی به صورت زیر نوشته می‌شوند [۸]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (u d)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

در روابط فوق  $g$  شتاب گرانش،  $x$  راستای انتشار موج،  $t$  زمان،  $\eta = \eta(x, t)$  جابجایی قائم سطح آزاد نسبت به تراز مختل نشده ی (اولیه ی) آب و  $u = u(x, t)$  سرعت افقی متوسط‌گیری شده در عمق در راستای انتشار موج می باشند. همچنین، عمق کل  $d(x, t)$  برابر است با مجموع عمق اولیه آب  $h$  و  $\eta(x, t)$  (شکل (۱))

(۴)



شکل - ۱: تعریف عوامل مربوط به انتشار و بالاروی یک موج منفرد. (شکل بدون مقیاس است)

<sup>1</sup> depth-averaged

<sup>2</sup> - hydrostatics

<sup>3</sup> shallow water waves

### شرایط مرزی بر روی خط ساحلی

حل عددی معادلات غیر خطی آب کم عمق مستلزم تعیین شرایط مرزی بر روی خط ساحلی است. از آنجا که موقعیت خط ساحلی تنها تابعی از زمان است، برای محاسبه ی سرعت خط ساحلی خواهیم داشت:

$$\frac{d\xi}{dt} = u^s \quad (7)$$

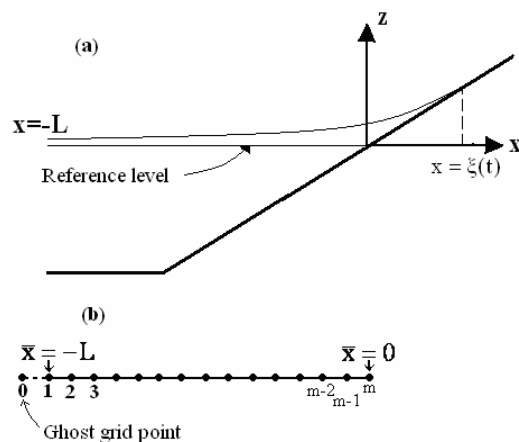
که در آن  $u^s$  سرعت جابجایی خط ساحلی می باشد (از این پس بالانمون  $s$  نشانگر خط ساحلی است). همچنین، عمق آب در هر لحظه در خط ساحل صفر است، بنابراین:

$$d^s = 0 \quad (8)$$

در رابطه ی فوق  $L$  طول اولیه ی ناحیه حل قبل از ورود موج به آن است. با استفاده از تبدیل فوق، ناحیه ی حل واقعی  $\xi(t) \leq x \leq -L$ ، که طول آن با زمان تغییر می کند به ناحیه ای با طول ثابت  $0 \leq \bar{x} \leq -L$  در فضای محاسباتی تبدیل می گردد. تحت این تبدیل خط ساحلی همواره بر  $\bar{x} = 0$  منطبق است (شکل ۲). با استفاده از معادلات (۳) و (۴) می توان نشان داد که روابط زیر بین مشتقات جزئی در فضای واقعی و فضای محاسباتی برقرار است.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} - f(\bar{x}) \frac{d\xi(\bar{t})}{d\bar{t}} \frac{\partial}{\partial x} \quad (6)$$



شکل - ۲: (a) فضای واقعی و (b) ناحیه ی حل در مسأله بالاروی موج

اندازه حرکت به صورت زیر برای بکاربردن در فضای  $(\bar{x}, \bar{t})$  اصلاح می گردند

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} - c_1 u^s \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} + c_2 \frac{\partial (ud)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} - c_1 u^s \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + c_2 \left( u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + g \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right) = 0 \quad (12)$$

توابع  $c_1$  و  $c_2$  در روابط فوق، به صورت زیر تعریف می گردند:

که در آن مشتق کلی سرعت خط ساحلی نسبت به زمان به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\frac{Du^s}{Dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^s + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right)^s \quad (10)$$

### معادلات NLSW و شرایط مرزی در فضای محاسباتی

با اعمال روابط (۵) و (۶) بر معادلات (۱) و (۲)، پس از اندکی عملیات جبری، معادلات بقای جرم و بقای

$$c_1 = c_1(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1 + \bar{x}/L}{1 + \xi(\bar{t})/L}, \quad c_2 = c_2(\bar{t}) = \frac{1}{1 + \xi(\bar{t})/L} \quad (۱۳)$$

بوجود آورده است. رابطه ی (۹) پس از تبدیل مختصات و گسسته سازی به صورت زیر بیان می شود [۱]:

$$u^{s(n+1)} = u^{s(n)} - g \frac{1}{1 + \frac{\xi^{(n)}}{L}} \frac{\Delta \bar{t}}{2\Delta \bar{x}} (3\eta_m^{(n)} - 4\eta_{m-1}^{(n)} + \eta_{m-2}^{(n)}) \quad (۱۴)$$

رابطه ی فوق بیان می کند که متغیرهای جریان نیابستی در راستای عمود بر مرز غیر بازتابی تغییر کنند.

### گسسته سازی معادلات

برای گسسته سازی معادلات تبدیل یافته، از الگوی تفاضل محدود دو مرحله ای ریچمایر-لکس-وندروف<sup>۵</sup> استفاده می گردد. این الگو در زمان و مکان دارای دقتی از مرتبه ی دو می باشد. مجموعه ی اول معادلات بر اساس این الگو به صورت زیر نوشته می شود [۱۱]:

همانطور که در معادلات تبدیل یافته [روابط (۱۱) و (۱۲)] مشاهده می شود، اعمال تبدیل لاگرانژی-اویلری، در عوض ایجاد ناحیه ی حل غیر زمانمند، عبارتهای غیر خطی جدیدی را در معادلات غیر خطی آب کم عمق

در رابطه ی فوق  $\Delta \bar{x}$  و  $\Delta \bar{t}$  به ترتیب گامهای مکانی و زمانی در فضای محاسباتی بشمار می روند. بالا نمون  $n$  گام زمانی قبل (معلوم) را نشان می دهد و نمایه ی  $m$  نیز بیانگر گره آخر در فضای  $(\bar{x}, \bar{t})$  است که همواره با خط ساحلی متناظر می باشد [شکل ۲-ب]. به مجرد تعیین سرعت خط ساحلی در گام زمانی جدید  $(u^{s(n+1)})$ ، با اعمال قاعده ی انتگرال گیری دوزنقه-ای بر رابطه ی (۷)، موقعیت جدید خط ساحلی بدست می آید:

$$\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta \bar{t} (u^{s(n+1)} + u^{s(n)}) \quad (۱۵)$$

در مرز سمت دریا ( $x = -L$ ) در شکل ۲-ا) که نوعی مرز غیر بازتابی<sup>۲</sup> بشمار می آید، شرط مرزی انتقال-دهنده<sup>۳</sup> اعمال می گردد. این شرط مرزی که خروج بدون انعکاس موج از دامنه ی محاسباتی را امکان پذیر می سازد، با افزودن گره هی خیالی<sup>۴</sup> به دامنه ی محاسباتی اعمال می گردد. چنانچه نمایه ی این گره خیالی با (0) نشان داده شود، خواهیم داشت (شکل ۲-ب):

$$\eta_0 = \eta_1, \quad u_0 = u_1 \quad (۱۶)$$

<sup>1</sup> - index

<sup>2</sup> - non-reflective

<sup>3</sup> - transmissive

<sup>4</sup> - ghost grid point

<sup>5</sup> - Richtmyer-Lax-Wenderoff

$$\eta_{i+1/2}^{(n+1/2)} = \frac{1}{2}(\eta_i^{(n)} + \eta_{i+1}^{(n)}) + \frac{\Delta \bar{t}}{2\Delta \bar{x}} c_1 u^{s(n)} (\eta_{i+1}^{(n)} - \eta_i^{(n)}) - \frac{\Delta \bar{t}}{2\Delta \bar{x}} c_2 \left[ (h_{i+1} + \eta_{i+1}^{(n)}) u_{i+1}^{(n)} - (h_i + \eta_i^{(n)}) u_i^{(n)} \right], \quad (17)$$

$$u_{i+1/2}^{(n+1/2)} = \frac{1}{2}(u_i^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}) + \frac{\Delta \bar{t}}{2\Delta \bar{x}} c_1 u^{s(n)} (u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)}) - \frac{\Delta \bar{t}}{2\Delta \bar{x}} c_2 \left[ \frac{1}{2}(u_{i+1}^{(n)})^2 + g \eta_{i+1}^{(n)} - \frac{1}{2}(u_i^{(n)})^2 - g \eta_i^{(n)} \right], \quad (18)$$

در روابط (۱۷) و (۱۸)،  $c_1$  و  $c_2$  در گره  $(i+1/2)$  و گام زمانی  $n$  محاسبه می‌گردند. مجموعه‌ی دوم معادلات عبارت است از:

$$\eta_i^{(n+1)} = \eta_i^{(n)} + \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \bar{x}} c_1 u^{s(n)} (\eta_{i+1/2}^{(n+1/2)} - \eta_{i-1/2}^{(n+1/2)}) - \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \bar{x}} c_2 \left[ (h_{i+1/2} + \eta_{i+1/2}^{(n+1/2)}) u_{i+1/2}^{(n+1/2)} - (h_{i-1/2} + \eta_{i-1/2}^{(n+1/2)}) u_{i-1/2}^{(n+1/2)} \right], \quad (19)$$

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \bar{x}} c_1 u^{s(n)} (u_{i+1/2}^{(n+1/2)} - u_{i-1/2}^{(n+1/2)}) - \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \bar{x}} c_2 \left[ \frac{1}{2}(u_{i+1/2}^{(n+1/2)})^2 + g \eta_{i+1/2}^{(n+1/2)} - \frac{1}{2}(u_{i-1/2}^{(n+1/2)})^2 - g \eta_{i-1/2}^{(n+1/2)} \right]. \quad (20)$$

موج منفرد، که در جهت مثبت محور  $x$  انتشار می‌یابد، با رابطه‌ی زیر تعریف می‌گردد [۸]:

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3H}{4h_0^3}} (x - X_0 - ct) \right] \quad (21)$$

که در آن  $H$  ارتفاع اولیه‌ی موج منفرد،  $h_0$  عمق ثابت اولیه‌ی آب،  $X_0$  موقعیت اولیه‌ی قله موج و  $c = \sqrt{g(H + h_0)}$  سرعت انتشار موج است (شکل ۱). مقادیر اولیه‌ی سرعت جریان از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$u(x, 0) = \frac{c \eta(x, 0)}{1 + \eta(x, 0)} \quad (22)$$

مقادیر  $c_1$  و  $c_2$  در معادلات (۱۹) و (۲۰) در گره  $i$  و گام زمانی  $n$  تعیین گردیده‌اند. پس از حل معادلات (۱۷) تا (۲۰) به همراه شرایط مرزی (۱۴) تا (۱۶)، و شرایط اولیه‌ای که در قسمت بعد بیان می‌گردند، مقادیر گرهی  $u$  و  $\eta$  در گام زمانی جدید بدست می‌آیند. سپس این مقادیر به کمک نگاشت از فضای  $(\bar{x}, \bar{t})$  به فضای فیزیکی  $(x, t)$  منتقل می‌گردند.

### شرایط اولیه در شبیه سازی موج منفرد

یک موج منفرد موجی است که تنها دارای یک قله است و فاقد شکم می‌باشد. شبیه‌سازی انتشار این موج معمولاً با حل معادلات NLSW، و با اعمال نیمرخ موج در لحظه‌ی  $t = 0$  به صورت مقادیر اولیه‌ی نیمرخ سطح آزاد  $(\eta(x, 0))$  در شبیه عددی صورت می‌پذیرد. بر اساس نظریه‌ی مرتبه‌ی اول امواج منفرد، نیمرخ یک

شده است. چنانچه در لحظه  $t^* = 0$  شرایط جریان ساکن ( $u(x,0) = 0$ ) در شبیه اعمال گردد، دو موج منفرد یکسان با ارتفاعی برابر با نصف ارتفاع اولیه ی موج تولید می شود که در جهت مخالف با هم منتشر می گردند. وقوع چنین حالتی به وسیله ی تیتوف و سینولاکیس نیز گزارش شده است [۸]. تطابق قابل قبول نتایج حاصل از شبیه سازی عددی و نتایج آزمایشگاهی، نشان دهنده ی دقت شبیه در پیش بینی انتشار و بالاروی موج منفرد است.

### جمع بندی و نتیجه گیری

در این مطالعه به تشریح شبیهی عددی بر مبنای معادلات تبدیل یافته ی غیر خطی آب کم عمق پرداخته شده است. هرچند تبدیل ارائه شده اعمال شرایط مرزی را بر روی مرز خط ساحلی آسانتر می سازد، ولی عبارت-های غیر خطی جدیدی را در معادلات حاکمه بوجود می آورد. البته این عبارتهای جدید تنها در حل مسائلی با مرز متحرک نظیر بالاروی امواج بلند، یا انتشار موج ناشی از شکست سد بر بستر خشک، وارد محاسبات می گردند. به هر حال، در محدوده ی شبیه سازی های انجام شده در این مطالعه، نتایج زیر حاصل گردید:

- ۱- معادلات غیر خطی آب کم عمق به رغم فرض سرعت متوسط گیری شده در عمق، ابزاری توانمند جهت بررسی بالاروی امواج منفرد بشمار می آیند.
- ۲- با افزایش ارتفاع بدون بعد اولیه ی موج ( $H/h_0$ )، بیشینه ی بالاروی موج بر روی سطح شیب دار افزایش می یابد.
- ۳- با افزایش شیب سطح (زاویه ی  $\alpha$  در شکل ۱)، بیشینه ی بالاروی موج غیرشکننده منفرد کاهش می یابد.
- ۴- موقعیت اولیه ی قرار گیری قله ی موج (نقطه ی  $x = X_0$  در شکل ۱)، بر میزان بیشینه ی بالاروی موج تاثیر گذار است. هر چه این نقطه دورتر از موقعیت اولیه ی خط ساحلی باشد، بیشینه ی بالاروی موج کاهش می یابد.

مطابق شکل ۱، فاصله ی میان موقعیت اولیه ی قله موج منفرد و نقطه ی شروع ساحل شیب دار ( $X_1$ ) به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۸].

$$X_1 - X_0 = \sqrt{\frac{4h_0^3}{3H}} \operatorname{arccosh} \left( \sqrt{\frac{1}{0.05}} \right) \quad (23)$$

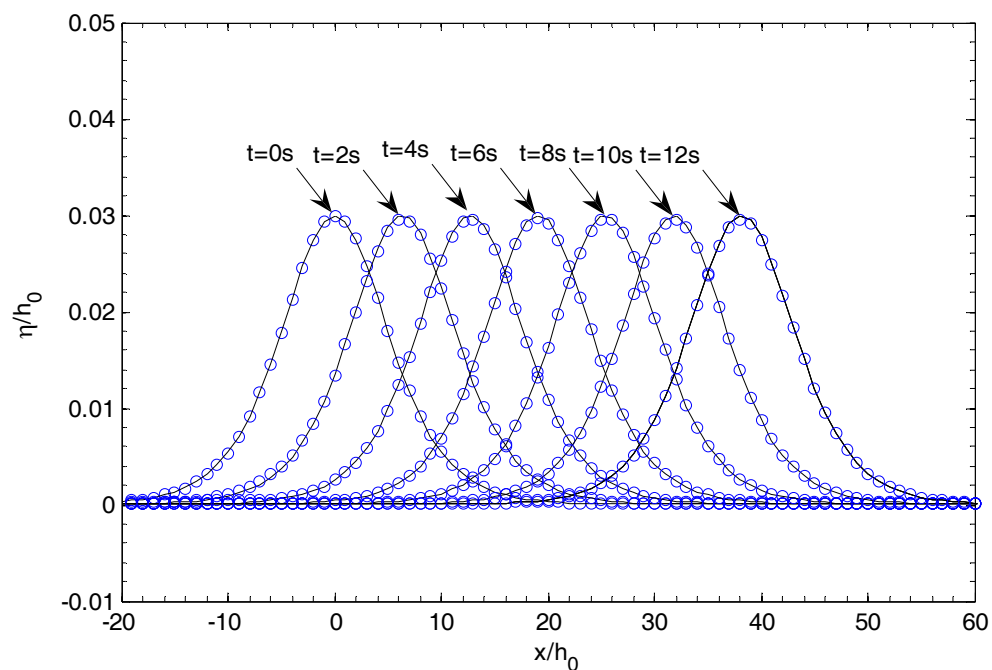
فاصله ی فوق الذکر در واقع نصف طول مشخصه ی موج منفرد است.

### نتایج و بحث

در شکل (۳)، نتایج حاصل از شبیه عددی با آنچه نظریه ی امواج منفرد (رابطه ی ۲۱) برای موج منفردی با  $H/h_0 = 0.03$  بدست می دهد، مقایسه گردیده است. بر اساس این نظریه، موج منفرد بایستی بدون تغییر شکل، با سرعت ثابت بر روی عمق ثابت آب واقع بر بستر، و بدون اصطکاک افقی انتشار یابد. در شبیه سازی عددی، ناحیه ی حل به ۱۰۰ سلول محاسباتی تقسیم شده است؛ همچنین قله ی موج در لحظه ی  $t = 0$ ، در موقعیت  $x = 0$  واقع است. با گذشت زمان موج بدون تغییر شکل از چپ به راست منتشر می گردد. به روشنی، تطابق نتایج عددی با جواب تحلیلی حتی تا فاصله ی انتشار  $x = 40h_0$  (لحظه ی  $t = 12s$  در شکل ۳) حفظ گردیده است. نتایج این آزمون محاسباتی حاکی از دقت بالای شبیه در پیش بینی انتشار موج منفرد بر روی عمق ثابتی از آب است.

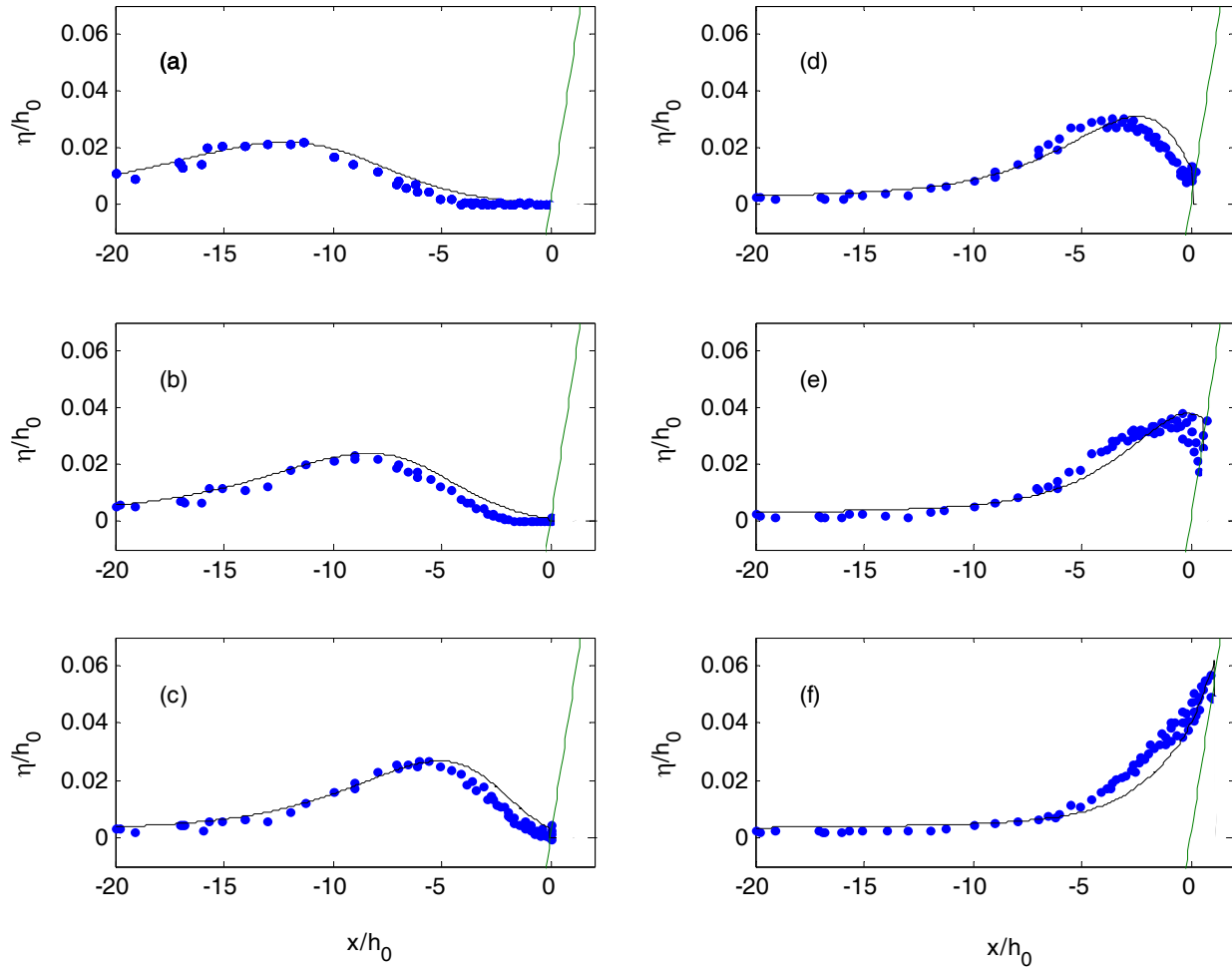
در سال ۱۹۸۶، سینولاکیس در آزمایش های خود، بالاروی موج غیر شکننده<sup>۱</sup> منفردی با  $H/h_0 = 0.0185$  را بر روی شیب 1:19.85 بررسی کرد. در شکل ۴ نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج آزمایشگاهی این محقق مقایسه گردیده است. برای هماهنگی با داده های آزمایشگاهی در این شکل زمان بدون بعد  $t^*$ ، به صورت  $t^* = t\sqrt{g/h_0}$  تعریف می گردد. لازم به ذکر است که موقعیت اولیه ی قله ی موج با استفاده از رابطه ی (۲۳) تعیین گردیده است. همچنین، سرعت اولیه ی جریان بر اساس رابطه ی (۲۲) منظور

<sup>1</sup> non-breaking



شکل ۳- شکل موج در زمان‌های مختلف برای موج منفردی با  $H/h_0 = 0.03$  که بر روی آبی با عمق ثابت  $h_0$  منتشر می‌گردد. قله ی موج در لحظه  $t = 0$  در  $x = 0$  قرار دارد. حل دقیق با خطوط ممتد، و نتایج شبیه عددی با دوائر توخالی مشخص گردیده اند.





شکل ۴- بالاروی موج منفردی با  $H/h_0 = 0.0185$  بر روی سطحی با شیب 1:19.85 در زمان‌های مختلف بدون بعد  $t^*$  برابر با (a): 25, (b): 30, (c): 35, (d): 40, (e): 45 و (f): 50. خطوط ممتد نتایج شبیه سازی عددی و نقاط توپر داده‌های آزمایشگاهی سینولاکیس (۱۹۸۶) را نشان می‌دهند.

## مراجع

- [1] Brocchini, M. 2007. Personal communications.
- [2] Brocchini, M., Svendsen, I.A., Prasad, R.S., Bellotti, G. 2002. A comparison of two different types of shoreline boundary conditions. *J. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4475-4496.
- [3] Carrier, G.F., Greenspan, H.P. (1958). "Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mechanics* 4:97-109.
- [4] Dodd, N., 1998. Numerical model of wave run-up, overtopping, and regeneration. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Engineering*, ASCE 124:73-81.
- [5] Hibbert, S., Peregrine, D.H. 1979. Surf and run-up on a beach: a uniform bore. *J. Fluid Mechanics* , 95:323-345..
- [6] Sorensen, R.M. 2006. *Basic Coastal Engineering*. Third Edition. Springer Science, New York. 324 p.
- [7] Synolakis, C.E. 1986. The run-up of long waves. PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- [8] Titov, V.V., Synolakis, C.E. 1995. Modeling of breaking and non-breaking long-wave evolution and run-up using VTCS-2. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Engineering* ASCE 121:308-461.
- [9] Tuck, E.O., Hwang, L.S. 1972. Long wave generation on a sloping beach. *J. Fluid Mechanics* 51:449-461..
- [10] Zhang, J.E., Wu, T.Y., Hou, T.Y. 2001. Coastal hydrodynamics of ocean waves on beach. *J. Advances in applied mechanics* 37:90-167.
- [11] Zhou, X., Hon, Y.C., Cheung, K.F. 2004. A grid-free nonlinear shallow water model with moving boundary. *J. Engineering Analysis with Boundary Elements* 28:467-973.