استفاده از تئوري كلاسيک صفحات در تحليل ارتعاشات صفحه تابعي دايروي کوپل شده با لايه هاي پيزوالکتريک

فرزاد ابراهيمي[i]; عباس راستگو[ii]

چکيده

تحليل ارتعاشي صفحات دايروي نازک از جنس مواد تابعي (FGM) کوپل شده با لايه هاي پيزوالکتريک براساس تئوري صفحات کرشهف ارائه شده است. مشخصات صفحه تابعي مطابق تابع تواني از جزء حجمي مواد تشکيل دهنده در راستاي ضخامت صفحه و ميدان پتانسيل الکتريکي با يک تابع درجه دو طوري مدل شده است که معادله ماکسول برآورده شود. معادلات ديفرانسيل حرکت براي اولين بار به صورت تحليلي براي صفحه دايروي با تکيه گاه گيردار حل شده است. درستي روش تحليلي ارائه شده از طريق مقايسه نتايج با تحقيقات مشابه و نيز با نتايج روش المان محدود سه بعدي تاييد شده است. در مطالعات عددي تاکيد اصلي، بررسي اثر تغيير شاخص گراديان صفحه تابعي بر روي ارتعاشات سازه مرکب مي‌باشد. پاسخهاي تحليلي و نتايج حاصل مدل ساده شده اي براي مطالعه پارامتري و درک مشخصات ارتعاشي صفحات دايروي ايزوتروپ کوپل با لايه هاي پيزوالکتريک ارائه مي‌دهد.

کلمات کليدي

مواد تابعي، لايه هاي پيزوالکتريک، تئوري صفحات کرشهف

Vibration Analysis of Thin Circular FGM Plate Coupled with Piezoelectric Layers

Farzad Ebrahimi , Abbas Rastgo

ABSTRACT

Analytical investigation of the vibration behavior of thin circular functionally graded (FG) plates integrated with two uniformly distributed piezoelectric actuator layers based on the classical plate theory (CPT) is presented. The material properties of the FG substrate plate are assumed to be graded in the thickness direction according to the power-law distribution. The differential equations of motion are solved analytically for clamped edge boundary condition of the plate. The detailed mathematical derivations are presented and numerical investigations are performed while the emphasis is placed on investigating the effect of varying the gradient index of FG plate on the vibration characteristics of the structure.

KEYWORDS

Functionally graded material, Piezoelectric, Circular plate, Classical plate theory

[i] دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک – پردیس دانشکده های فنی – دانشگاه تهران Email:febrahimy@ut.ac.ir
[ii] دانشیار دانشکده مکانیک – پردیس دانشکده های فنی – دانشگاه تهران: Email:arastgo@ut.ac.ir

۱- مقدمه

به تازگي رده جديدي از مواد تحت عنوان مواد تابعي (FGM) که در آنها خواص ماده به صورت تابعي پيوسته نسبت به مکان و بخصوص در راستاي ضخامت سازه تغيير مي‌کند، معرفي شده اند. اين مواد از ديدگاه ميکروسکوپي غير همگن بوده و معمولا از ترکيب فلز و سراميک ساخته مي‌شوند. مواد مرکب لايه‌اي جهت استفاده در سازه هاي پيشرفته طراحي مي‌شوند اما تغييرات زياد بين خواص هر لايه در سطح تماس دو لايه مجاور، باعث ايجاد تنشهاي برشي بين لايه‌اي بسيار بزرگ و در نتيجه منجر به پديده جداشدگي لايه هامي‌گردد. اين نقطه ضعف با ايجاد تغييرات پيوسته در خواص مواد همانند آنچه در مواد تابعي ديده مي‌شود برطرف مي‌گردد. بنابراين مواد تابعي قابليت استفاده در سازه هاي پيشرفته را خواهند داشت. تحقيقات گسترده‌اي در زمينه‌هاي مختلف از جمله تحليل کمانش [۱] ، تحليل دقيق تنش [۲] ، تحليل ديناميکي [۳] و تحليل غيرخطي ترموالاستيک سازه هاي ساخته شده از مواد تابعي [٤] گزارش شده است. همچنين در سالهاي اخير به علت قابليت و رواج استفاده از مواد پيزوالکتريک به عنوان حسگر يا محرک، مطالعه و بررسي اين مواد که بر روي سازه‌هاي مختلف تعبيه شده اند مورد اقبال بسيار زياد پژوهشگران قرار گرفته است. در اين راستا، براي بهره برداري بهينه از خواص حسگري/ محرکي اين مواد،بايد اندرکنش بين سازه اصلي و ماده پيزوالکتريک به خوبي شناخته شود. به تازگي مطالعاتي برروي قابليتهاي مختلف مواد پيزوالکتريک براي نصب بر روي صفحات ساخته شده از مواد تابعي نيز ارائه شده است. به عنوان نمونه اوتاوا و تانيگاوا [۵] صفحه مستطيلي تابعي به همراه لايه پيزوالکتريک تحت بار گذاري گرمايي گذرا را مورد بررسي قرار داده‌اند.يک حل سه بعدي نيز براي صفحه مستطيلي تابعي کوپل شده با لايه محرک پيزوالکتريک توسط ردي و چنگ[٦] با استفاده از روشهاي ماتريس انتقال و گسترش مجانبي پيشنهاد شده است. وانگ و نودا[۷] يک سازه هوشمند مرکب از سه لايه شامل يک لايه فلزي و يک لايه پيزوالکتريک و يک لايه تابعي بين آنها را تحليل کرده اند. در حاليکه يک مدل اجزاء محدود براي مطالعه کنترل شکل و ارتعاشات صفحه مستطيلي تابعي به همراه لايه هاي حسگرو محرک پيزوالکتريک توسط هي و همکاران[۸] پيشنهاد شده است.به تازگي نيز رفتار غير خطي ديناميک صفحه مستطيلي تابعي کوپل شده با لايه هاي پيزوالکتريک در بالا و پايين آن که در محيط گرمايي ارتعاشات غيرخطي خواهد داشت توسط هوانگ و شن[۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. تمامي مطالعات اشاره شده بر روي صفحات تابعي با شکل مستطيلي صورت گرفته است. از مقدمه ارائه شده و بررسي تحقيقات صورت گرفته در اين حوزه ديده مي‌شود که تاکنون تحقيقي براي بررسي و مطالعه رفتار ارتعاشي و مشخصات ديناميکي صفحه حلقوي يا دايروي تابعي کوپل شده با لايه هاي پيزوالکتريک ارائه نشده است.

در همين راستا، تحقيق حاضربه دنبال يافتن پاسخي تحليلي براي رفتار ارتعاشي صفحه دايروي نازک ساخته شده از مواد تابعي به همراه دو لايه بر مبناي تئوري کلاسيک تغيير شکل صفحات مي‌باشد،، معادله ديفرانسيل حرکت به صورت تحليلي حل شده است. علاوه بر نتايج عددي مربوطه، روش بدست آوردن معادلات نيز به صورت کامل ارائه شده است. کاربرد مدل پيشنهاد شده با مطالعه اثرات مربوط به تغيير شاخص گراديان صفحه تابعي بر روي مشخصات ارتعاشي سازه بررسي شده است. درستي و دقت نتايج حاصل از روش پيشنهادي با مقايسه نتايج آن با نتايج موجود در تحقيقات مشابه براي صفحه فلزي و همچنين با مقايسه آن با نتايج حاصل از تحليل سه بعدي اجزاء محدود اثبات شده است.

۲- مواد تابعي و پيزوالکتريک

مدلهاي تحليلي و محاسباتي مختلفي براي توزيع مکاني خواص فيزيکي و مکانيکي مواد تابعي پيشنهاد شده است. در اين تحقيق از تابع تواني ساده جزء حجمي مواد تشکيل دهنده در راستاي ضخامت صفحه استفاده خواهد شد. لذا براي ماده تابعي ساخته شده از مخلوط فلز و سراميک رابطه (۱) برقرار است:

$$V_m + V_c = 1 \qquad (۱)$$

که در آن V_m و V_c به ترتيب جزء حجمي سراميک و فلز مي‌باشند. همچنين تغييرات V_c در راستاي ضخامت صفحه به صورت رابطه(۲) بيان مي‌گردد:[۱۰]

$$V_c = (z/2h_f + 1/2)^g \quad , g \ge 0 \qquad (۲)$$

که در آن $2h_f$ ضخامت صفحه تابعي و g شاخص گراديان اين ماده مي‌باشد . فرض مي‌شود که مدول الاستسيته E و چگالي ρ ماده تابعي در راستاي ضخامت صفحه و بر مبناي رابطه (۳) تغيير کند در حاليکه نسبت پواسون υ در راستاي ضخامت ثابت فرض مي‌گردد[۱۱].

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m$$
$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m \qquad (۳)$$
$$\nu(z) = \nu$$

که در آن زيرنويس هاي m و c به ترتيب به اجزاء فلز وسراميک مربوط مي‌شوند. پس از جاگذاري از معادله (۲) در

معادله (۳) ، تغييرات خواص در صفحه تابعي با تـابع تـواني (۴) كه همانند تـابع پيـشنهادي ردي و پـراوين[۱۰] اسـت مـشخص مي‌شود:

$$E(z)=(E_c-E_m)(z/2h_f+1/2)^g+E_m \qquad (۴)$$
$$\rho(z)=(\rho_c-\rho_m)(z/2h_f+1/2)^g+\rho_m$$

معادلـه اساسـي دو بعـدي الاسـتو-اسـتاتيک بـراي يـک مـاده پيزوالكتريک در مختصات قطبي و بـر مبنـاي تئـوري كلاسـيک صفحات به صورت رابطه (۵) است[۱۲]:

$$\sigma_{rr}^{p}=\overline{C}_{11}^{E}\varepsilon_{rr}+\overline{C}_{12}^{E}\varepsilon_{\theta\theta}-\overline{e}_{31}E_z \qquad (۵)$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{p}=\overline{C}_{12}^{E}\varepsilon_{rr}+\overline{C}_{11}^{E}\varepsilon_{\theta\theta}-\overline{e}_{31}E_z \qquad (۶)$$
$$\tau_{r\theta}^{p}=\left(\overline{C}_{11}^{E}-\overline{C}_{12}^{E}\right)\varepsilon_{r\theta}=-z\left(\overline{C}_{11}^{E}-\overline{C}_{12}^{E}\right) \qquad (۷)$$

كه در آن σ_i و ε_k به ترتيب معرف اجزاي تـنش و كـرنش و E_k اجزاي ميدان الكتريكي مي‌باشند. همچنين $\overline{C}_{ij}^{E}$ اجـزاي مـاتريس سختي و $\overline{e}_{31}$ ثابت كاهيده نفوذ پذيري ماده پيزوالكتريک بـوده و به صورت رابطه (۱۲) داده شده اند [۱۲]:

$$\overline{C}_{11}^{E}=C_{11}^{E}-\left(C_{13}^{E}\right)^2/C_{33}^{E} \qquad \overline{C}_{12}^{E}=C_{12}^{E}-\left(C_{13}^{E}\right)^2/C_{33}^{E}$$
$$\overline{e}_{31}=e_{31}-C_{13}^{E}e_{33}/C_{33}^{E}$$

كه در آن e معرف ثابت نفوذ پـذيري مـاده پيزوالكتريـک و C_{ij} درايه هاي ماتريس مدول الاستسسيته هستند.

۳- معادلات اساسي در ميدان پتانسيل الكتريكي

در بيشتر كاربردهاي عملي نسبت شعاع به ضخامت صفحه بيشتر از ۱۰ بوده و از فرضيات كرشهف كه در آن اثر تغيير مكان برشي و اينرسي دوراني قابل چشم پوشي است، مي‌توان استفاده نمود. براساس اين تئوري كلي ترين حالت ميدان تغيير مكان براي صفحات ياد شده به صورت رابطه (۸) است[۱۲]:

$$u_z=u_z(r,\theta,t)=w(r,\theta,t) \qquad (۸)$$
$$u_r=u_r(r,\theta,t)=-z\frac{\partial u_z}{\partial r} \qquad (۹)$$
$$u_\theta=u_\theta(r,\theta,t)=-z\frac{\partial u_z}{r\partial\theta} \qquad (۱۰)$$

كه در آن u_r و u_θ و u_z به ترتيب تغيير مكانها در راستاي r و θ وz هستند. همچنين فرض مي‌شود كه جهت قطـب در لايـه هـاي پيزوالكتريک در راستاي z مي‌باشد و در صورت اعمال پتانسيل الكتريكي خارجي در اين لايه ها، يک ديفرانسيل كرنش كه خـود خمش صفحه را به دنبـال خواهـد داشـت ، ايجـاد مـي‌گـردد. در اينــصورت اجــزاي كــرنش در صــفحه تــابعي و لايــه هــاي پيزوالكتريک به صورت روابط (۱۱)و(۱۲) داده مي‌شوند[۱۳]:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \qquad (۱۱)$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}=-z(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial w}{r\partial r}) \qquad (۱۲)$$
$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r})=z(\frac{\partial w}{r^2\partial\theta}-\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta}) \qquad (۱۳)$$

حال بر اساس قانون هوک مولفه هاي تنش در صفحه تابعي بـه صورت روابط(۱٤)-(١٦) بيان مي‌شوند [۳۸]:

$$\sigma_{rr}^{f}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{rr}+\nu\varepsilon_{\theta\theta})=-\frac{zE(z)}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial w}{r\partial r}\right)\right] \qquad (۱۴)$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{f}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{rr})=-\frac{zE(z)}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial w}{r\partial r}\right] \qquad (۱۵)$$
$$\tau_{r\theta}^{f}=-\frac{zE(z)}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta}-\frac{\partial w}{r^2\partial\theta}\right) \qquad (۱۶)$$

كه در آن بالانويس f نشان دهنـده متغيـر در صـفحه تـابعي و E(z) مدول يانگ صفحه FG است كه در معادلـه (۴) بيـان شـده است.

مدلهاي مختلفي براي توزيع پتانسيل الكتريكي در لايه پيزوالكتريک وجود دارد. در اين تحقيق از تابع درجه دوم زير كه توسط وانگ و همكاران [١٤] پيشنهاد شده است استفاده مي‌شود:

$$\phi=\left[1-\left(\left(2z-2h_f-h_p\right)/h_p\right)^2\right]\varphi(r,\theta,t) \qquad (۱۷)$$

كه در آن $\varphi(r,\theta,t)$ پتانسيل الكتريكي در صـفحه ميـاني لايـه پيزوالكتريک و ۲h_f و h_p به ترتيب ضخامت صـفحات تـابعي و پيزوالكتريک مي‌باشند. حال شـدت ميـدان الكتريكـي E و تغييـر مكان الكتريكي D در مختصات اسـتوانه اي بـه صـورت روابـط (۱۸)-(۲۰) خواهد بود[۱۵]:

$$D_r=\Xi_{11}E_r=\Xi_{11}(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}) \qquad (۱۸)$$
$$D_\theta=\Xi_{11}E_\theta=\Xi_{11}(-\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}) \qquad (۱۹)$$
$$D_z=\overline{\Xi}_{33}E_z+\overline{e}_{31}\left(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}\right) \qquad (۲۰)$$

كـــه در آن $\overline{\Xi}_{11}$, $\overline{\Xi}_{33}$ ثابتهـــاي كاهيـــده دي الكتريـــک لايـــه پيزوالكتريک بوده و به صورت رابطه (۲۱) داده شده اند[۱۴]:

$$\overline{\Xi}_{33}=\Xi_{33}+(e_{33}^2/C_{33}^{E}) \qquad \overline{\Xi}_{11}=\Xi_{11} \qquad (۲۱)$$

و Ξ_{33}, Ξ_{11} ثابتهاي دي الكتريک لايه پيزوالكتريک هستند.

٤- معادلات حاكم

براي بدست آوردن معادلات حاكم بر سيستم صفحه دايروي تابعي كوپل با لايه هاي پيزوالكتريک ابتدا اجزاي گشتاور خمشي و نيروي برشي را به صورت (۲۲) بدست آورده مي‌شود [۱۳]:

$$M_{rr}=\int_{-h_f}^{h_f} z\sigma_{rr}^{f}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p} z\sigma_{rr}^{p}dz \qquad (۲۲)$$

$$M_{\theta\theta}=\int_{-h_f}^{h_f} z\sigma_{\theta\theta}^{f}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p} z\sigma_{\theta\theta}^{p}dz \qquad (۲۳)$$

$$M_{r\theta}=\int_{-h_f}^{h_f} z\tau_{r\theta}^{f}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p} z\tau_{r\theta}^{p}dz \qquad (۲۴)$$

$$q_r=\frac{\partial M_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta}+\frac{M_{rr}-M_{\theta\theta}}{r} \qquad (۲۵)$$

$$q_\theta=\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial M_{\theta\theta}}{r\partial\theta}+\frac{2M_{r\theta}}{r} \qquad (۲۶)$$

حال با جایگذاري معادلات (۱۱) تا (۱۳) در معادلات (۵) تا (۷) و (۱۴) تا (۱۶) و جایگذاري معادلات حاصـل در معـادلات (۲۲) تـا (۲۶) و جایگـذاري روابـط پایـاني در معادلـه حـاکم بـر صـفحه کرشهف :

$$\frac{\partial q_r}{\partial r}+\frac{\partial q_\theta}{r\partial\theta}+\frac{q_r}{r} -\left(\int_{-h_f}^{h_f}\rho_f(z)\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p}\rho_p\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}dz\right)=0 \qquad (۲۷)$$

معادله دیفرانسیل حرکت به صورت رابطه (۲۸) بدست ميآید:

$$\left(D_1+D_2\right)\Delta\Delta w+\frac{4}{3}h_p\bar{e}_{31}\Delta\varphi+P_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (۲۸)$$

که در آن Δ اپراتور لاپلاسین در مختصات استوانه اي بوده و

$$\tilde{\rho}_f=\frac{1}{2h_f}\int_{-h_f}^{h_f}\rho_f(z)dz \quad ,$$

$$D_1=\int_{-h_f}^{h_f}\frac{z^2E(z)}{1-\nu^2}dz\ ,$$

$$D_2=\frac{2}{3}h_p\left(3h_f^{\,2}+3h_fh_p+h_p^{\,2}\right)\bar{C}_{11}^{E}$$

$$P_0=2(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p)$$

که درآن ρ_f و ρ_p به ترتیب چگـالي صـفحه تـابعي و لایـه هـاي پیزوالکتریک ميباشند. توجه شود که بر مبناي معادله ماکسول، دیورژانس چگالي شار الکتریکي در تمـامي نقـاط داخـل محـیط ميبایستي صفر گردد. این شرایط بـا صـفر قـرار دادن انتگـرال دیورژانس چگالي شار الکتریکي در راستاي ضخامت لایه هـاي پیزوالکتریک بـراي هـر r وθ بـه صـورت رابطـه (۲۹) بـرآورده ميگردد[۱۵]:

$$\int_{h_f}^{h_f+h_p}\vec{\nabla}.\vec{D}dz=\int_{h_f}^{h_f+h_p}\left(\frac{\partial(rD_r)}{r\partial r}+\frac{\partial D_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)dz=0 \qquad (۲۹)$$

اپراتـور $\vec{\nabla}$ در معادلـه (۲۹) اپراتـور گرادیـان در مختـصات استوانه اي ميباشد. حال با جایگذاري معادلات (۱۸) تا (۲۰) در معادله (۲۹) رابطه (۳۰) حاصل ميشود:

$$\frac{h_p^2\bar{\Xi}_{11}}{12\bar{\Xi}_{33}}\Delta\varphi-\varphi+\frac{h_p^2\bar{e}_{31}}{8\bar{\Xi}_{33}}\Delta w=0 \qquad (۳۰)$$

۵- روش حل

در آغاز با حل همزمان معادلات (۲۸) و (۳۰) ميتوان ϕ را برحسب w به صورت رابطه (۳۱) بدست آورد:

$$\varphi(r,\theta,t)=-\frac{\left(D_1+D_2\right)h_p\bar{\Xi}_{11}}{16\bar{e}_{31}\bar{\Xi}_{33}}\Delta\Delta w +\frac{h_p^2\bar{e}_{31}}{8\bar{\Xi}_{33}}\Delta w-\frac{h_p(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p)\bar{\Xi}_{11}}{8\bar{e}_{31}\bar{\Xi}_{33}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۳۱)$$

اینک با اعمال اپراتور لاپلاسین به معادله(۳۱) و جایگذاري رابطه بدست آمده در معادله (۲۸) ،معادله دیفرانسیل از نوع معادله با مشتقات جزئي دي کوپله از مرتبه شش به صورت رابطه(۳۲) حاصل ميشود:

$$P_3\Delta\Delta\Delta w-P_2\Delta\Delta w+P_1\Delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-P_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (۳۲)$$

که در آن:

$$P_1=h_p^2\bar{\Xi}_{11}P_0\big/12\bar{\Xi}_{33} \qquad P_2=D_1+D_2+h_p^3\bar{e}_{31}^2\big/6\bar{\Xi}_{33}$$

$$P_3=(D_1+D_2)\,h_p^2\bar{\Xi}_{11}\big/12\bar{\Xi}_{33} \qquad (۳۳)$$

براي حل معادله (۳۲) ابتدا فرض ميشود [۳۹]:

$$w(r,\theta,t)=w_1(r)e^{i(m\theta-\omega t)} \qquad (۳۴)$$

که در آن ω فرکانس طبیعي زاویه اي صـفحه مرکـب و m عـدد موج در راستاي محیطي است. بـا بـاز نویـسي معادلـه (۳۲) بـر مبناي $w_1(r)$ و استفاده از معادله (۳٤) و پس از حـذف جمـلات نمایي رابطه ۳۵ حاصل ميشود:

$$P_3\overline{\Delta\Delta\Delta}w_1-P_2\overline{\Delta\Delta}w_1-\omega^2P_1\overline{\Delta}w_1+\omega^2P_0w_1=0 \qquad (۳۵)$$

که در آن:

$$\overline{\Delta}=d^2\big/dr^2+d\big/rdr-m^2\big/r^2$$

معادله (۳۵) را ميتوان با استفاده از روش جداسازي حل کـرد. با در نظر گرفتن این نکتـه کـه w_1 در مرکـز صـفحه غیـر تکـین ميباشد، راه حل کلي (۳٦) را ميتوان براي آن پیشنهاد کرد:

$$w_1=\sum_{n=1}^{3}A_{nm}Z_{nm}(\alpha_nr) \qquad (۳۶)$$

که در آن:

$$\alpha_1=\sqrt{|x_1|}\,,\alpha_2=\sqrt{|x_2|}\,,\alpha_3=\sqrt{|x_3|} \qquad (۳۷)$$

x_3 , x_2, x_1 در رابطه (۳۷) ریـشه هـاي معادلـه مشخـصه (۳۸) ميباشند:

$$P_3x^3-P_2x^2-\omega^2P_1x+\omega^2P_0=0 \qquad (۳۸)$$

و

$$Z_{im}(\alpha_ir)=Z_{im}(\alpha_i,r)=\begin{cases}J_m(\alpha_ir) & ,x_i<0\\ I_m(\alpha_ir) & ,x_i>0\end{cases} \qquad (۳۹)$$

کـه در آن۳و۲و۱=i و $J_m(\alpha_ir)$ و $I_m(\alpha_ir)$ بـه ترتیـب توابـع بسل مرتبه اول معمولي و اصلاح شـده مـيباشـند. اینـک بـراي

بدست آوردن جواب مناسبي براي $\varphi(r,\theta,t)$ ، فرض مي‌شود:

$$\varphi(r,\theta,t)=\varphi_1(r)e^{i(m\theta-\omega t)} \qquad (۴۰)$$

اينک با جايگذاري معادله (٣٦) در معادله (٣١) حل بر طبق رابطه (٤١) براي $\varphi_1(r)$ حاصل مي‌شود:

$$\varphi_1(r)=\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}\sum_{n=1}^{3}\left[A_{nm}h_p(2s_n\alpha_n^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_n^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\times Z_{nm}(\alpha_n r) \qquad (۴۱)$$

٦- حل معادلات

حال معادلات مربوط به شرايط مرزي در حالت گيردار به صورت رابطه (۴۲) بيان مي‌گردد:

$$w_1=dw_1/dr=d\varphi_1/dr=0 \quad at\ (r=r_0) \qquad (۴۲)$$

و معادله مشخصه به صورت رابطه (۴۳) خواهد بود:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{array}{l} c_{1i}=Z_{im}(\alpha_i r_0)\\ c_{2i}=\alpha_i r_0 Z'_{im}(\alpha_i r_0)\end{array} \qquad (۴۳)$$

$$c_{3i}=\left(\frac{h_p^2r_0s_i\alpha_i^3}{8}-\frac{(D_1+D_2)h_pr_0\alpha_i^5\Xi_{11}}{16\bar{e}_{31}^2}+\frac{(D_1+D_2)h_p\alpha_i\lambda^4\Xi_{11}}{16\bar{e}_{31}^2r_0^3}\right)Z'_{im}(\alpha_i r_0) \qquad (۴۴)$$

$$\lambda=r_0\left[\frac{2\left(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p\right)\omega^2}{D_1+D_2}\right]^{\frac{1}{4}} \qquad (۴۵)$$

$$\omega=\frac{\lambda^2}{r_0^2}\sqrt{\frac{D_1+D_2}{2\left(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p\right)}} \qquad (۴۶)$$

كه در آن علامت پرايم معرف مشتق نسبت به r و λ فركانس طبيعي زاويه‌اي بي بعد مي‌باشد. پس از محاسبه ω از معادله (۴۳) و استفاده از معادلات (۳۶) و (۴۲) شكلهاي مد w_1 به صورت (۴۷) بدست مي‌آيد:

$$\begin{aligned}w_1(r)&=A_{3m}\times\\ &\left[\left(\frac{\alpha_3Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)-\alpha_2Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\right.\\ &\times Z_{1m}(\alpha_1r)+\\ &\left(\frac{\alpha_1Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)-\alpha_3Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\\ &\left.\times Z_{2m}(\alpha_2r)+Z_{3m}(\alpha_3r)\right]\end{aligned} \qquad (۴۷)$$

به علاوه با استفاده از معادلات (۳۶) ، (۴۱) و (۴۲) پتانسيل الكتريكي به صورت رابطه (۴۸) ارائه مي‌گردد:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(r)&=A_{3m}\times\\ &\left[\left(\frac{\alpha_3Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)-\alpha_2Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\times Z_{1m}(\alpha_1r)\right.\\ &\times\left[h_p(2s_1\alpha_1^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_1^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}\\ &+\left(\frac{\alpha_1Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)-\alpha_3Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\times Z_{2m}(\alpha_2r)\\ &\times\left[h_p(2s_2\alpha_2^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_2^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}\\ &\left.+\left[h_p(2s_3\alpha_3^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_3^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}Z_{3m}(\alpha_3r)\right]\end{aligned} \qquad (۴۸)$$

قبل ازشروع بحث و بررسي نتايج، براي تاييد نتايج حاصل به مقايسه آنها با نتايج ارائه شده توسط وانگ و همكاران [١٤] كه براي صفحه دايروي فولادي ارائه شده، پرداخته مي‌شود. همچنين از آنجا كه تاكنون نتايجي براي صفحه تابعي كوپل شده با لايه‌هاي پيزوالكتريک در تحقيقات موجود ارائه نشده است به تاييد نتايج با مقايسه آنها با نتايج حاصل از تحليل اجزاء محدود سه بعدي پرداخته مي‌شود. مدل اجزاء محدود ارائه شده شامل المانهاي سه بعدي ٨ گره اي با تعداد كل ٢۶٩۵٠ گره و تعداد ٢۴٢٧۶ المان و با سه درجه آزادي (جابجايي) براي هر گره در مورد المان مربوط به صفحه تابعي و ۶ درجه آزادي (سه درجه جابجاي ، دما ، ولتاژ و خواص مغناطيسي) براي المان مربوط به لايه هاي پيزوالكتريک خواهد بود.

جدول (١): خواص مواد تابعي و پيزوالكتريک

FGM Plate	$E_c=$ ٢٠۵ Gpa , $\nu=$ ٠,٣	$E_m=$ ٢٠٠
	$\rho_c=$ ٨٩٠٠ (kg/m^3)	$\rho_m=$ ٧٨٠٠
PZT4 Layers	e_{31} $(C/m^2)=$ -۴,١	$e_{33}=$ ١۴,١
	$\rho_p=$ ٧۵٠٠ (kg/m^3)	$e_{15}=$ ١٠,۵
	$C_{11}^E=$ ١٣٢ Gpa	$C_{12}^E=$ ٧١
	$\Xi_{11}=$ ٧,١٢۴ (nF/m)	$\Xi_{33}=$ ۵,٨۴١
	$C_{13}^E=$ ٧٣, $C_{55}^E=$ ٢۶	$C_{33}^E=$ ١١۵

٧- ارائه نتايج حاصل و بحث و بررسي آنها

در اين بخش، صفحه دايروي از جنس مواد تابعي كوپل شده با لايه‌هاي پيزوالكتريک تحت شرايط تكيه گاهي گيردار و داراي خواص فيزيكي مطابق جدول(١) مورد بررسي قرار خواهد گرفت. شعاع خارجي صفحه دايروي برابر٠/۶ متر و نسبت ضخامت هر لايه پيزوالكتريک به ضخامت صفحه تابعي برابر ٠/١ در نظر گرفته شده است. اولين سه فركانس طبيعي صفحه دايروي تابعي بدون و يا لايه هاي پيزوالكتريک كه با استفاده از روش تحليلي ارائه شده در مقاله حاضر محاسبه شده اند، در جداول ٢و٣ ارائه شده‌اند. اين نتايج با نتايج حاصل از تحليل اجزاء محدود سه بعدي نيز مقايسه شده است.

جدول (۲) : فركانس هاي طبيعي صفحه دايروي تابعي

Power Index g	Mode no. m	FGM plate Present Method	Present (FEM)	Diff. (%)	Wang et al.[14]
۰	۰	۱۳۸,۴۲	۱۳۹,۲۷	۰,۶۱	۱۳۸,۴۸
	۱	۲۸۸,۰۵	۲۸۹,۷۰	۰,۵۷	۲۸۸,۲۰
	۲	۴۷۲,۵۵	۴۷۳,۴۵	۰,۱۹	۴۷۲,۷۹
۱	۰	۱۳۴,۶۳	۱۳۵,۴۳	۰,۵۹	-
	۱	۲۸۰,۱۷	۲۸۱,۷۸	۰,۵۷	-
	۲	۴۵۹,۶۲	۴۶۰,۴۵	۰,۱۸	-
۳	۰	۱۳۲,۷۰	۱۳۳,۶۳	۰,۶۹	-
	۱	۲۷۶,۱۹	۲۷۸,۰۴	۰,۶۷	-
	۲	۴۵۳,۰۹	۴۵۴,۳۴	۰,۲۸	-
۵	۰	۱۳۲,۱۲	۱۳۳,۰۶	۰,۷۰	-
	۱	۲۷۴,۹۶	۲۷۶,۸۵	۰,۶۹	-
	۲	۴۵۱,۰۶	۴۵۲,۳۹	۰,۲۹	-
۷	۰	۱۳۱,۸۵	۱۳۲,۷۸	۰,۷۰	-
	۱	۲۷۴,۳۹	۲۷۶,۲۵	۰,۶۷	-
	۲	۴۵۰,۱۳	۴۵۱,۴۶	۰,۲۹	-
۹	۰	۱۳۱,۶۹	۱۳۲,۷۰	۰,۷۶	-
	۱	۲۷۴,۰۷	۲۷۶,۰۹	۰,۷۳	-
	۲	۴۴۹,۶۰	۴۵۰,۸۴	۰,۲۸	-
۱۰	۰	۱۳۱,۶۴	۱۳۲,۵۵	۰,۶۸	-
	۱	۲۷۳,۹۶	۲۷۵,۷۹	۰,۶۷	-
	۲	۴۴۹,۴۲	۴۵۰,۶۶	۰,۲۸	-

جدول (۳) : فركانس هاي صفحه دايروي تابعي كوپل با لايه هاي پيزوالكتريک براي مقادير مختلف گراديان تابعي

Power Index g	Mode no. m	FGM plate Present Method	Present (FEM)	Diff. (%)	Wang et al.[14]
	۰	۱۴۳,۶۳	۱۴۴,۶۹	۰,۷۳	۱۴۳,۷۱
۰	۱	۲۹۸,۹۲	۳۰۰,۴۹	۰,۵۲	۲۹۹,۰۷
	۲	۴۹۰,۳۷	۴۹۲,۶۲	۰,۴۶	۴۹۰,۶۲
۱	۰	۱۴۰,۲۶	۱۴۲,۲۲	۱,۳۸	-
	۱	۲۹۱,۸۹	۲۹۵,۸۲	۱,۳۳	-
	۲	۴۷۸,۸۴	۴۸۲,۰۹	۰,۶۷	-
۳	۰	۱۳۸,۵۴	۱۴۰,۶۰	۱,۴۶	-
	۱	۲۸۸,۳۳	۲۹۲,۴۷	۱,۴۲	-
	۲	۴۷۲,۹۹	۴۷۶,۶۱	۰,۷۶	-
۵	۰	۱۳۸,۰۱	۱۴۰,۰۷	۱,۴۷	-
	۱	۲۸۷,۲۱	۲۹۱,۳۹	۱,۴۳	-
	۲	۴۷۱,۱۶	۴۷۴,۸۱	۰,۷۷	-
۷	۰	۱۳۷,۷۶	۱۳۹,۸۲	۱,۴۷	-
	۱	۲۸۹,۶۹	۲۹۰,۸۳	۱,۴۳	-
	۲	۴۷۰,۳۰	۴۷۳,۹۵	۰,۷۷	-
۹	۰	۱۳۷,۶۲	۱۳۹,۷۳	۱,۵۱	-
	۱	۲۸۶,۴۰	۲۹۰,۵۴	۱,۴۳	-
	۲	۴۶۹,۸۳	۴۷۳,۱۶	۰,۷۰	-
۱۰	۰	۱۳۷,۵۷	۱۳۹,۶۱	۱,۴۶	-
	۱	۲۸۹,۳۳	۲۹۰,۴۱	۱,۴۲	-
	۲	۴۶۹,۶۶	۴۷۳,۲۶	۰,۷۶	-

همانطور كه از جداول (۲)و(۳) مشخص مي‌گردد نتايج حاصل از روش تحليلي حاضر در حالت صفحه فولادي برابري بسيار خوبي با نتايج مرجع [١٤] و همچنين همخواني قابل قبولي با نتايج حاصل از تحليل اجزاء محدود براي گراديانهاي تابعي مختلف دارد.

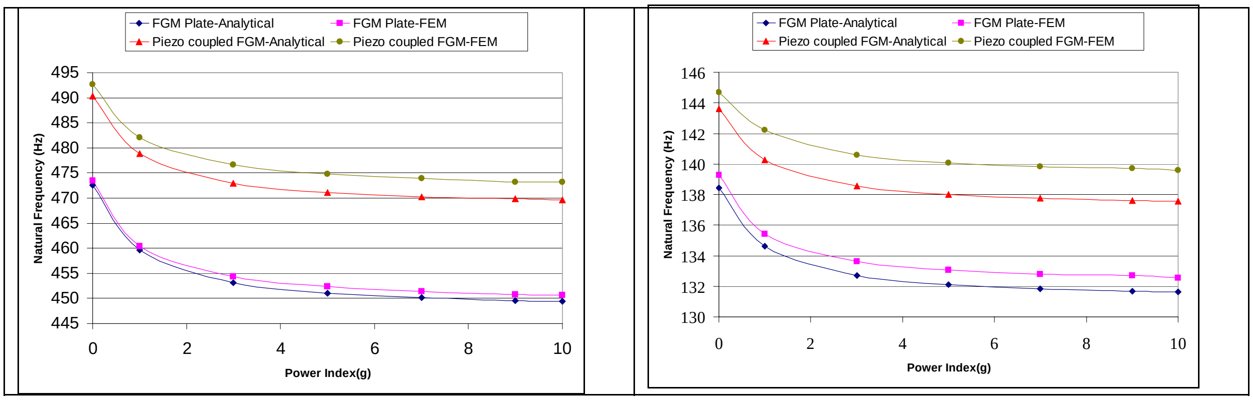
در مرحله بعد بررسي اثر تغيير گراديان تابعي بر روي مشخصات ارتعاشي صفحه مربوطه انجام شد. نتايج ارائه شده در جداول (۲) و (۳) نشان مي‌دهد كه با افزايش مقدار گراديان تابعي، فركانس طبيعي مربوط به تمامي مدهاي فركانسي سيستم كاهش مي‌يابد. به علاوه اين روند كاهش فركانسي براي مقادير كوچكتر گراديان آشكارتر مي‌باشد.به عنوان نمونه مطابق نتايج جدول (۲)، با افزايش مقدار گراديان از ۱ به ۳ (افزايشي برابر ۲۰۰ درصد)، فركانس طبيعي مد اول سيستم به مقدار ۱/۴۳ درصد كاهش مي‌يابد در حالي كه براي همين صفحه، با افزايش مقدار گراديان از ۳ به ۹ (افزايشي برابر ۲۰۰ درصد)، فركانس طبيعي مربوط به همين مد فركانسي به مقدار ۰/۷۶ درصد كاهش مي‌يابد. اين روند در مورد مدهاي ديگر ارتعاشي صفحه تابعي بدون و يا لايه هاي پيزوالكتريک نيز درست است. به عنوان مثال مطابق جدول شماره (۳)، با افزايش مقدار گراديان از صفر به ۳ ، فركانس طبيعي مد سوم سيستم صفحه تابعي كوپل با لايه هاي پيزوالكتريک به مقدار ۳/۵۴ درصد كاهش مي‌يابد در حالي كه براي همين صفحه، با افزايش مقدار گراديان از ۵ به ۱۰ ، فركانس طبيعي مربوط به همين مد فركانسي در حدود ۰/۳۲ درصد كاهش مي‌يابد. براي ديدن بهتر اين روند و بررسي اثرات تغيير گراديان بر روي فركانسهاي طبيعي سيستم، شكلهاي شماره (۱) و (۲) براي نمايش اين اثرات در مورد مدهاي فركانسي اول وسوم سيستم ارائه شده است. همانطور كه از شكلهاي شماره (۱) و (۲) ديده مي‌شود روند كاهش فركانس طبيعي با افزايش مقدار گراديان مربوط به تمامي مدهاي فركانسي سيستم و برجسته بودن اين اثر در مورد مدهاي فركانسي پايين تر در تمامي حالات مورد مطالعه

سيستم صفحه تابعي هوشمند برقرار است ولي براي گراديانهاي بزرگتر از ۷، فركانسهاي طبيعي تا اندازه اي ثابت مي‌مانند.

در واقع مي‌توان نتيجه گرفت كه براي گراديانهاي بسيار بزرگ، صفحه تابعي تبديل به يک صفحه فلزي و صفحه مرکب مربوطه به يک صفحه هوشمند مرکب داراي هسته فلزي مي‌گردد.

۸- نتيجه گيري

در تحقيق حاضر يک مدل تحليلي براي ارتعاش يک صفحه دايروي مركب از يک صفحه تابعي كوپل شده با لايه هاي پيزوالكتريک براساس تئوري صفحه كرشهف ارائه شده است. معادلات ديفرانسيل حركت براي اولين بار به صورت تحليلي براي صفحه با شرايط مرزي گيردار حل شده و پاسخهاي تحليلي بدست آمده است. درستي روش تحليلي ارائه شده از طريق مقايسه نتايج با نتايج ارائه شده در تحقيقات مشابه و همچنين با مقايسه با نتايج حاصل از روش المان محدود سه بعدي تاييد شده است.



شكل (۱) و (۲): اثر گراديان تابعي بر روي فركانس هاي طبيعي مد اول و سوم

در مطالعات عددي تاكيد اصلي بر بررسي اثر تغيير شاخص گراديان صفحه تابعي بر روي مشخصات ارتعاشي سازه مربوطه مي‌باشد. همچنين با مقايسه نتايج روش حاضر و نتايج بدست آمده از روش اجزاء محدود تطابق بسيار خوبي مشاهده شده است. همچنين براي تمامي شرايط مرزي در فركانسهاي پايينتر، روش تحليلي پيشنهادي نتايج نزديكتري به نتايج حاصل از روش المان محدود در مقايسه با فركانسهاي بالاتر ارائه مي‌نمايد. به علاوه با افزايش مقدار گراديان، فركانس طبيعي مربوط به تمامي مدهاي فركانسي سيستم براي تمامي شرايط تكيه گاهي كاهش مي‌يابد. همچنين اين روند كاهش فركانس براي مقادير كوچكتر گراديان مشهودتر مي‌باشد. پاسخهاي تحليلي و نتايج حاصل ، مدل ساده شده‌اي براي مطالعه پارامتري و درک مشخصات ارتعاشي صفحات دايروي تابعي كوپل با لايه هاي پيزوالكتريک ارائه مي دهد. اين نتايج مي‌تواند در طراحي سازه‌هاي هوشمند شده با لايه‌هاي پيزوالكتريک در كاربردهاي صنعتي همچون موتورهاي التراسونيک مورد استفاده قرار گيرد.

۹- مراجع

[۱] Feldman, E.; Aboudi, J.; "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading", Compos Struct, Vol. 38, pp.29–36, 1997.

[۲] Sankar, B. V.; "An elasticity solution for functionally graded beams", Compos. Sci. Technol.,vol. 61, pp. 689–896 , 2001.

[۳] Yang, J.; Shen, H. S.; "Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates", Compos Struct, vol. 54, pp. 497–508, 2001.

[٤] Woo, J.; Meguid, S.A.; "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells", Int. J. Solids Struct, vol. 38, pp. 7409–7421, 2001.

[٥] Ootao, Y.; Tanigawa, Y.; "Three-dimensional transient piezo-thermo-elasticity in functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate", Int. J. Solids Struct., vol. 37, pp. 4377–4401, 2000.

[٦] Reddy, J. N.; Cheng, Z. Q.; "Three-dimensional solutions of smart functionally graded plates", ASME J. Appl. Mech., vol. 68, pp. 234–241, 2001.

[۷] Wang, B.L.; Noda, N.;"Design of smart functionally graded thermo-piezoelectric composite structure", Smart Mater. Struct., vol. 10, pp. 189–193, 2001.

[۸] He, X. Q. ; Ng, T. Y. ; Sivashanker; S. ; Liew, K. M.; “Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators”, Int. J. Solids Struct., vol. 38, pp. 1641–1655, 2001.

[۹] Huang, X.L.; Shen H.S.; “Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments”, J. Sound Vib., vol. 289, pp. 25–53, 2006.

[۱۰] Reddy, J.N.; Praveen, G.N.; “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plate”, Int. J. Solids Struct, vol. 35, pp. 4457-4476, 1998.

[۱۱] Wetherhold, R.C.; Wang, S.; “The use of functionally graded materials to eliminate or thermal deformation”, Composite Sci Tech, vol. 56 pp. 1099-1104,1996.

[۱۲] Brush, D.O.; Almroth, B.O.; Buckling of bars plates and shells, McGraw-Hill, 1975.

[۱۳] Reddy, J.N.; Theory and analysis of elastic plates, Taylor and Francis, 1999.

[۱٤] Wang, Q.; Quek, S.T.; Liu, X.; “Analysis of piezoelectric coupled circular plate”, Smart Mater Struct, vol. 10, pp. 229-39, 2001.

[۱۵] Halliday, D.; Resniek, R.; Physics, John Wiley and Sons, 1978.