تخمين وضعيت يک جسم پرنده با استفاده از خروجيهاي IMU و ارتفاع‌سنج در حرکتهاي شتابدار

حبيب قنبرپور اصل[i]، سيد حسين پورتاكدوست[ii]

چكيده

در اين مقاله يك روش نوين براي تخمين وضعيت چرخشي يك وسيله پرنده با استفاده از اطلاعات واحد اندازه گيري اينرسي (IMU) و ارتفاع‌سنج درحركتهاي شتاب‌دار آمده است. معمولاً تعيين زواياي رول و پيچ با استفاده از يك IMU در حركات نزديك به پرواز كروز (بدون شتاب) امكان پذير مي‌باشد، ولي زماني كه پرواز از حالت كروز فاصله مي‌گيرد خطاهاي بسيار زيادي در تعيين وضعيت از خروجيهاي IMU بوجود مي‌آيد. در اين مقاله براي پايدارسازي خطاي تخمين وضعيت از تلفيق اطلاعات IMU و يك ارتفاع سنج بارومتري استفاده شده است. خروجي ارتفاع‌سنج به دليل موثر بودن از شتاب جاذبه زمين و تصوير شتاب مخصوص در راستاي قائم بر زمين، حاوي اطلاعات كمي درباره وضعيت مي‌باشد. از آنجا كه شتاب مخصوص قائم تابعي از زواياي رول و پيچ وسيله پرنده مي‌باشد، اگر اين زوايا به دليلي داراي خطا باشند، تصاوير آن كه توسط شتابسنج‌ها اندازه گيري شده است، دچار خطا شده و پيرو آن سرعت قائم و ارتفاع محاسبه شده دارای خطا خواهند بود. همين طور بايد توجه نمود كه مشاهده پذيری ضعيفي بين خروجي ارتفاع سنج و زواياي اويلر (فقط رول و پيچ) وجود دارد. به همين دليل براي داشتن خطاي كمتر در تخمين، سعي شده است كه معادلات وضعيت را به شكل خطي در آورده تا بتوان از فيلتر كالمن خطي استفاده نمود. در چنين حالتي براي خطي ماندن معادلات ديناميكي از المانهاي ماتريس كسينوسهاي‌هادي بين دو دستگاه ناوبري و بدني استفاده شده است كه خود به خود باعث افزايش تعداد معادلات ديفرانسيل مربوط به وضعيت مي‌گردد، ضمن آن كه يك قيد اضافي نيز به وجود مي‌آيد. درپايان نتايج فيلتر كالمن خطي جديد و فيلتر غيرخطي مرتبه دوم مقايسه گرديده‌اند. شبيه سازي‌ها نشان مي‌دهند كه فيلتر خطي جديد ارائه شده براي مسئله مورد نظر داراي كارائي بهتري نسبت به فيلتر غيرخطي مرتبه دوم مي‌باشد.

كلمات كليدي:

تخمين وضعيت، فيلتر غير خطي، تخمين وضعيت از روش متصل به بدنه، ناوبري تلفيقي

Strapdown Attitude Estimation Using IMU and Altimeter Integration for Maneuvering Vehicles

H. ghanbarpour asl, S. H. Pourtakdust

ABSTRACT

In this paper, a new algorithm for attitude estimation in maneuvering flight, utilizing a combination of inertial measuring unit (IMU) and altimeter information is presented. Attitude estimation using a single IMU is possible only for near cruise flights, however for non-cruise flights, very large errors are obtained. In this paper, attitude estimation error is stabilized using an integrated IMU and altimeter system. The

[i] فارغ التحصيل دكتري، دانشكده مهندسي هوافضا، دانشگاه شريف، ata_co_iran@yahoo.com
[ii] پروفسور، دانشكده مهندسي هوافضا، دانشگاه شريف، pourtak@sharif.edu

altimeter output being affected by gravity and the specific forces projected into the vertical plane bears insufficient information regarding the attitude states. Being a function of the roll and pitch angle, the specific forces will be in error, due to errors estimation of the attitude angles. Subsequently the vehicle vertical acceleration, speed and attitude will be inaccurate. In addition, due to a weak observability between the altitude measurements and the attitude angles to be estimated. For this reason and having a better estimate of the attitudes, the nonlinear attitude equations are converted into linear space, which will be beneficial for the estimation algorithm. Finally, simulation results using linear and unscented Kalman filters are curried out. A Monte Carlo simulation reveals that the newly suggested linear filter has a better performance in comparison with the non-linear unscented Kalman filter.

KEYWORDS

Attitude Estimation, Nonlinear Filter, Strapdown attitude estimation, Integrated navigation

۱- مقدمه

معمولاً وجود ژيروسكوپ عمودي براي اكثر اجسام پرنده ضروري مي‌باشد، زيرا اين وسيله مي‌تواند دو زاويه رول و پيچ يك وسيله پرنده را اندازه‌گيري كند كه بدون علم به اين دو زاويه كنترل وسيله پرنده ممكن نمي‌باشد. دقت اندازه گيري اين دو زاويه تا حد ممكن بايد زياد باشد. به عنوان مثال براي هواپيماهاي بدون سرنشين با ارتفاع زياد، دقت اندازه گيري بايد بهتر از /۱° و تفكيك پذيري[۱] آن بايد كمتر از /۵° باشد [۱]. اندازه‌گيري اين دو زاويه در اكثر وسايل پرنده توسط ژيروسكوپ عمودي[۲] انجام مي‌گيرد [۲]. ژيروسكوپ مكانيكي عمودي حاوي يك چرخ دوار با سرعت زاويه‌اي بالا مي باشد كه معمولاً براي راه اندازي ژيروسكوپ و قائم نگه داشتن بردار مومنتوم زاويه‌اي آن نسبت به سطح زمين و براي جلوگيري از انباشتگي خطا در اين ژيروسكوپ، از پاندول و يا كليدهاي سطح افق[۳] استفاده مي‌شود [۳]. چنين سيستم‌هائي، بسيار گران قيمت، حجيم و پيچيده بوده و داراي مشكلات تعمير و نگهداري مي‌باشند. اين ژيروسكوپ بسيار شبيه ژيروسكوپ دو درجه آزادي آزاد مي‌باشد ولي به دليل انحرافاتي كه در ژيروسكوپ دو درجه آزادي وجود دارد، هر لحظه باپسخوردي كه از پاندول مي‌گيرد توسط گشتاورسازها كه به طوقه[۴] نصب هستند خطاهاي قائم بودن بردار مومنتوم زاويه‌اي ژيروسكوپ نسبت به افق تصحيح مي‌شود [۴]. بايد توجه نمود كه حتي اگر ژيروسكوپ دو درجه آزادي ايده‌آل فرض گردد، در پروازهاي بلند مدت باز هم به دليل كروي بودن زمين بايد جهت مومنتوم زاويه‌اي ژيروسكوپ در فضا تصحيح شود تا هميشه قائم بر زمين باقي بماند. پاندول از دير باز براي نشان دادن قائم مطرح بوده است ولي يك پاندول نمي‌تواند در حركتهاي شتابدار جهت قائم را تشخيص دهد [۵]. بنابراين در حركتهاي شتابدار، تصحيح غلط بردار مومنتوم زاويه‌اي ژيروسكوپ كه بايد هر لحظه قائم بر سطح زمين باقي بماند باعث انحرافات شديدتر خواهد شد [۵]. برعكس در پروازهاي نزديك كروز (شتاب كم) پاندول در بيشتر مواقع جهت قائم را درست نشان مي‌دهد و ميانگين خطا نزديك صفر است [۴]. بنابراين مي‌توان با يك بهره[۵] ضعيف از خروجي پاندول، خطاي قائم بودن بردار مومنتوم زاويه‌اي ژيروسكوپ را تصحيح نمود [۶]. چون خطاهاي ژيروسكوپ دو درجه آزادي داراي ماهيت فركانس پايين بوده و خطاهاي پاندول داراي ماهيت فركانس بالا مي‌باشد، اين دو سيستم مكمل هم بوده و تركيب اين دو مجموعه مي‌تواند يك ژيروسكوپ عمودي را ارائه نمايد [۶].

برخلاف سيستم طوقه دار، در سيستم هاي چسبيده به بدنه با انتگرال‌گيري از خروجي ژيروسكوپ هاي نرخي مي‌توان وضعيت را محاسبه نمود [۷]. اين كار بوسيله انتگرال‌گيري از معادلات زواياي اويلر و يا كواترنين‌ها و استفاده از خروجي ژيروسكوپ‌ها عملي مي‌گردد. در اين سيستم‌ها به دليل خطاي ژيروسكوپ‌ها، خطاي محاسبه زواياي رول و پيچ بدون محدوديت در طول زمان افزايش مي‌يابد و براي عملي نمودن چنين سيستم‌هائي، نياز به ژيروسكوپ‌هاي دقيق در سطح ناوبري بوده كه در اين حالت نيز مثل سيستم‌هاي مكانيكي، هزينه مجموعه بسيار زياد خواهد بود. به همين دليل در سالهاي اخير گرايش به سمت استفاده از حس‌گرهاي ارزان قيمت به صورت چسبيده به بدنه با تكيه بر ايده اصلي ژيروسكوپ‌هاي عمودي مكانيكي زياد بوده است. محققين زيادي براي جايگزيني ژيروسكوپ‌هاي دقيق با ژيروسكوپ‌هاي ارزان كار كرده‌اند [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]. اين سيستم ها از سه ژيروسكوپ نرخي عمود بر هم به جاي ژيروسكوپ دو درجه آزادي و از سه شتاب‌سنج عمود برهم به صورت چسبيده به بدنه، به عنوان يک مرجع خارجي استفاده مي‌كنند [۱۱]. در اين سيستم‌ها وضعيت چرخشي هم از طريق ژيروسكوپ‌هاي نرخي و هم توسط خروجي شتاب‌سنج‌ها با فرض پرواز كروز محاسبه مي‌شوند. چون وسيله پرنده در اكثر زمان پروازي خود به صورت پرواز بدون شتاب و يا كم شتاب قرار دارد، زواياي رول و پيچ

محاسبه شده توسط شتاب‌سنج‌ها داراي ميانگين خطاي صفر خواهد بود و مي‌توان از اين اطلاعات براي تصحيح خطاي وضعيت زاويه‌اي محاسبه شده از ژيروسكوپهاي نرخي و جبران‌سازي انحرافات ژيروسكوپ‌ها استفاده نمود [۱۲].

كنترلر اصلي كه در بيشتر ژيروسكوپ‌هاي مكانيكي استفاده شده است، يك كنترلر PI مي‌باشد كه مي‌تواند خطاي زواياي رول و پيچ را با استفاده از خروجي زواياي رول و پيچ محاسبه شده توسط شتاب‌سنج‌ها با پهناي باند بسيار كم كنترل كند. به تازگي تلاشهايي براي تنظيم اين ضرايب براي توسعه كاربرد سيستم براي حركات شتابدار نزديك به كروز انجام شده است [۱۱]. همچنين در كاربردهائي همچون سيستم‌هاي تعيين وضعيت، كارهايي در زمينه تنظيم ماتريس كواريانس خطاي اندازه‌گيري زوايا توسط شتاب‌سنج‌ها انجام شده است [۱۳]. در بيشتر كاربردهاي ماهواره‌اي به صورت AHRS سعي شده خروجي با معادلات ديناميكي وسيله پرنده و يك مرجع خارجي مانند مگنتومتر تلفيق شود [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]. همچنين در بعضي از سيستم‌ها استفاده از يك مرجع خارجي مانند سرعت‌سنج و يا GPS كه بتواند شتابهاي اضافي بر حالت كروز را احساس كند به مجموعه اضافه شده است [۱۷]، [۱۸].

در اين مقاله از يك ارتفاع‌سنج براي تصحيح خطاي ايجاد شده در اثر حل معادلات وضعيت با استفاده از خروجي ژيروسكوپ‌ها آمده است. نشان داده شده است كه خطاي وضعيت ايجاد شده باعث ايجاد خطا در شتاب قائم محاسبه شده مي‌شود و بر اثر آن ارتفاع محاسبه شده توسط خروجي IMU داراي خطا خواهد بود. براي كنترل اين خطا چون در راستاي قائم بر سطح زمين است از يك ارتفاع‌سنج بارومتري استفاده شده است. به دليل مشاهده‌پذيري ضعيف خطاي وضعيت بوسيله ارتفاع‌سنج، زماني كه از معادلات اويلر استفاده مي‌شود حتي در صورت استفاده از يك فيلتر كالمن غير خطي مرتبه دوم خطا زياد مي‌باشد. ولي در صورت استفاده از معادلات كواترنين‌ها، معادلات وضعيت خطي بوده ولي باز معادلات كانال ارتفاع غيرخطي مي‌ماند كه باز هم توليد خطاي زيادي مي‌كند. در اينجا براي بدست آوردن معادلات خطي هم براي معادلات وضعيت و هم معادلات كانال قائم از تعدادي از المانهاي ماتريسي دوران استفاده شده است. در اين شرايط جمله‌هاي غيرخطي كوچكي در معادله ديناميكي پديد مي‌آيد كه با تخمين ماتريس كواريانس آنها به صورت تحليلي، فيلتر كالمن خطي توسعه داده شده، جوابهاي بهتري را نسبت به روش زواياي اويلر و استفاده از فيلتر غيرخطي توليد مي‌كند.

شبيه سازيهاي انجام گرفته شده براي حركات مانوردار كارائي الگوريتم و فيلترسازي ارائه شده را نشان مي‌دهد.

۲- بدست آوردن وضعيت با استفاده از خروجي ژيروسكوپها

وضعيت چرخشي يك جسم پرنده نسبت به يك دستگاه مي‌تواند توسط روشهاي متفاوتي نشان داده شود كه هر كدام داراي خواص ويژه‌اي مي‌باشد. اين روشها به طور كلي عبارتند از ماترس كسينوسهاي هادي[۶]، كواترنينها، بردار دوران و زواياي اويلر [۱۹].

معادلات ديناميكي حاكم بر پارامترهاي يادشده فقط براي كواترنينها و DCM خطي بوده و براي معادلات اويلر و بردار دوران داراي معادلات غيرخطي مي‌باشد. علاوه بر اينها كواترنينها داراي يك قيد اضافي و مستقل بوده و المانهاي ماتريس كسينوس‌هاي هادي داراي ۶ قيد مستقل مي‌باشند [۱۹]. در اصل براي تعيين وضعيت كامل نياز به سه پارامتر مستقل است [۱۹]. چون در تعيين وضعيت اجسام پرنده بيشتر تعيين وضعيت وسيله نسبت به دستگاه ناوبري مطرح مي‌باشد، در اينجا تمامي پارامترهاي معرفي شده براي نشان دادن وضعيت چرخشي دستگاه بدني نسبت به دستگاه ناوبري خواهند بود. بايد توجه نمود كه در اينجا هدف تعيين زواياي رول و پيچ است و تعيين زاويه سمت در ژيروسكوپ‌هاي عمودي مورد توجه نمي‌باشد. در اين فرمول بندي‌ها، معادله زاويه ياو نيز وارد مي‌شود كه آن در نظر گرفته نمي‌شود. با استفاده از مرجع [۷] :

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b \qquad (۱)$$

كه در آن

$$C_b^n = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \;,\; \Omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

كه $\omega_{nb}^b = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ سرعت زاويه‌اي دستگاه بدني نسبت به دستگاه ناوبري مي‌باشد. بايد توجه نمود كه خروجي ژيروسكوپ‌ها در اصل برابر با سرعت زاويه‌اي دستگاه بدني نسبت به دستگاه اينرسي مي‌باشد. لذا داريم [۷]:

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ie}^b + \omega_{en}^b + \omega_{nb}^b \qquad (۳)$$

زماني كه از سيستمهاي اينرسي ارزان قيمت استفاده مي‌شود مي‌توان از سرعت زاويه‌اي ω_{en}^b كه تابعي از سرعت وسيله نسبت به زمين مي‌باشد در مقابل خطاي حسگرها چشم نموده

و سرعت زاويه‌اي ω_{ie}^{b} را با علم به عرض جغرافيائي مي‌توان جبران سازي نمود. معادلات سينماتيكي مربوط به زواياي اويلر عبارتند از [۷]:

$$\begin{bmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & tg\theta\sin\phi & tg\cos\phi\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \qquad (۴)$$

در مقايسه با معادلات اويلر كه شكل غيرخطي دارند معادلات مربوط به كواترنينها، شكل خطي دارند. مي‌توان نوشت [۷]:

$$\begin{bmatrix}\dot a\\ \dot b\\ \dot c\\ \dot d\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z\\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y\\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x\\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

كه در آن $q_b^n=\begin{bmatrix}a & b & c & d\end{bmatrix}^T$ كواترنين مربوط به وضعيت مي‌باشد. همچنين سطر سوم ماتريس تبديل را مي‌توان به صورت رابطه (۶) نوشت [۷]:

$$\begin{aligned}C_b^n(3,:)&=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2(bd-ac) & 2(cd+ab) & (a^2-b^2-c^2+d^2)\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (۶)$$

بايد توجه نمود سطر سوم از ماتريس دوران شامل جمله‌هاي مربوط به سمت نبوده و براي تعيين وضعيت مي‌توان از آنها استفاده نمود. واضح است كه براي تعيين زواياي رول و پيچ مي‌توان از معادلات ديفرانسيل مربوط به اين المانها استفاده نمود. بنا به [۷] داريم:

$$\begin{aligned}\dot C_{31}&=\omega_z C_{32}-\omega_y C_{33}\\ \dot C_{32}&=\omega_x C_{33}-\omega_z C_{31}\\ \dot C_{33}&=\omega_y C_{31}-\omega_x C_{32}\end{aligned} \qquad (۷)$$

بايد توجه نمود كه نرم هر سطر از ماتريس تبديل برابر با واحد مي باشد. بنابراين :

$$C_{31}^2+C_{32}^2+C_{33}^2=1 \qquad (۸)$$

معادلات ديفرانسيل (۷) با قيد ياد شده در (۸) مي‌تواند معادلات حاكم بر وضعيت چرخشي وسيله پرنده را تشكيل دهد.

۳- تعيين وضعيت با استفاده از شتاب سنجها

زواياي وضعي θ , ϕ همچنين مي‌توانند در پرواز كروز با استفاده از خروجي‌هاي شتاب‌سنج‌ها نيز تعيين شوند. براي اين كار معادلات مربوط به سرعت نسبت به زمين V_e را در دستگاه ناوبري در نظر بگيريد [۷]:

$$\dot V_e^n=C_b^n f^b-\left[2\omega_{ie}^n+\omega_{en}^n\right]\times V_e^n+g^n \qquad (۹)$$

كه در آن ماتريس كسينوسهاي هادي C_b^n براي انتقال شتابهاي مخصوص از دستگاه بدني به دستگاه ناوبري استفاده شده است. در اينجا g^n شتاب جاذبه ظاهري در دستگاه ناوبري بوده كه معمولاً فقط يك المان در راستاي قائم دارد. جمله دوم ظاهر شده در معادله (۹) مربوط به جبران‌سازي شتابهاي كوريوليس مي‌باشد كه در اثر چرخش دستگاه‌هاي ناوبري و زميني ايجاد شده‌اند و مقدار بسيار كمي دارند كه در مقابل خطاي شتاب‌سنج‌هاي ارزان قيمت قابل چم‌پوشي مي‌باشند. در پرواز نزديك به كروز مي‌توان از تغييرات سرعت چشم‌پوشي نمود. بايد توجه شود كه لازم نيست در پروار كروز زواياي رول وپيچ صفر باشند[۱۱]، [۱۲]:

$$f^b\cong -C_n^b g^n=g\begin{bmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\phi\\ -\cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}\quad if\quad abs\left(\left\|f^b\right\|-g\right)\langle\varepsilon \qquad (۱۰)$$

كه در آن ε شتاب كوچكي مي‌باشد. بنابراين با استفاده از معادله (۱۰) مي‌توان با استفاده از خروجي شتاب‌سنج‌ها زواياي رول و پيچ را به صورت رابطه زير محاسبه نمود:

$$\begin{aligned}\phi&=arc\ tag2(f_y,f_z)\\ \theta&=arc\ \sin(f_x/g)\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

اگر ε كوچك نباشد، حركت شتابدار خواهد بود، در اين حالت تنها با معلوم بودن شتاب كل مي‌توان وضعيت را محاسبه نمود:

$$F_t^n=\dot V_e^n+\left[2\omega_{ie}^n+\omega_{en}^n\right]\times V_e^n=C_b^n f^b+g^n \qquad (۱۲)$$

بنابراين در حركتهاي شتاب‌دار تخمين بدون باياس از زواياي رول و پيچ بدون علم به شتاب كل عملا غير ممكن مي‌باشد.

۴- توسعه تعيين وضعيت با استفاده از پارامترهاي ماترس دوران

در اينجا فرض كنيد كه $c=\begin{bmatrix}C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}^T$ باشد با استفاده از معادله (۷) مي‌توان نوشت:

$$\dot c=\left[-\omega_{nb}^b\times\right]c \qquad (۱۳)$$

كه در آن $\left[-\omega_{nb}^b\times\right]$ يك ماتريس پادمتقارن از بردار ω_{nb}^b مي‌باشد. بايد توجه نمود كه نرم c بايد در تمام لحظات برابر واحد باشد، بنابراين بايد در هر لحظه دو باره نرمال گردد. در مرجع [۱۹] براي كنترل خطاي نرمال ماندن كواترنينها، از جمله‌هاي قطري براي كنترل خطا در معادله (۵) استفاده شده است. در اينجا نيز مي‌توان روشي مشابه به روش فوق براي كنترل خطاي نرمال بودن c ارائه داد.

$$\dot{c} = k\gamma c - \Omega_{nb}^b c = \left[k\gamma I - \Omega_{nb}^b\right]c \qquad (۱۴)$$

که در آن γ خطاي عدم نرمال بودن c بوده و به صورت رابطه (۱۵) تعريف مي گردد.

$$\gamma = 1-(c^T c) \qquad (۱۵)$$

که در آن k يك مقدار بزرگي مي‌باشد [۱۹]. جمله تصحيح موجود در معادله (۱۴) باعث پايداري نرمال بودن c معادله از ديدگاه عددي مي‌شود.

در شكل (۱) يك روش تلفيق اطلاعات رايج نشان داده شده است. در اينجا نقش فيلتر، مقايسه زاويه خروجي بين ژيروسكوپ‌ها و شتاب‌سنج‌ها و سپس كنترل خطاي بين آنها با استفاده از يك كنترلر PI مي‌باشد. بهره‌هاي كنترلر تناسبي k_p است و بهره كنترلر انتگرالي k_i مي‌باشد.

حال فرض كنيد كه با استفاده از اين كنترلر هدف كاهش خطاي ايجاد شده به دليل خطاي ژيروسكوپ‌هاي نرخي در بلند مدت و نزديك نمودن آن به خروجي شتاب‌سنج‌ها باشد. با استفاده از معادله (۱۰) و همچنين با استفاده از معادله (۲) براي حركت كروز مي‌توان نوشت:

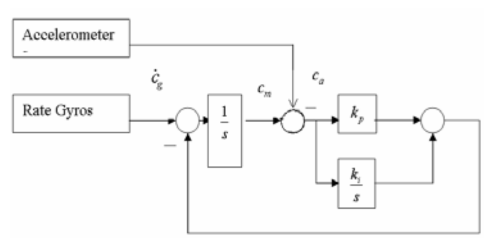
$$f^b \approx -C_n^b g^n = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \end{bmatrix} = -gc \qquad (۱۵)$$

حال با استفاده از معادله بالا مي توان المانهاي ماتريس دوران را براي پرواز كروز با استفاده از خروجي شتاب‌سنج‌ها، به شكل رابطه (۱۷- الف) محاسبه نمود:

$$\hat{c} = \frac{-1}{g} f^b \qquad (۱۷\text{- الف})$$

كه در آن $\hat{c}$ تخمين c با استفاده از خروجي شتاب‌سنج‌ها مي‌باشد. چون نرم c بايد واحد باشد بنابراين مي‌توان نوشت:

$$c_a = \frac{-1}{\left\| f^b \right\|} f^b \qquad (۱۷\text{-ب})$$



شكل (۱):صحيح نمودن خطاي وضعيت با استفاده از كنترلر PI

با توجه به شكل (۱) مي‌توان نوشت:

$$c_m = \frac{s^2 c_g + k_p c_a s + k_i c_a}{s^2 + k_p s + k_i} \qquad (۱۸)$$

با استفاده از معادله ۱۸ اگر $t \to \infty$ ميل كند در اين حالت:

$$\lim_{s \to 0} c_m = c_a \qquad (۱۹)$$

كه نشان مي‌دهد خروجي فيلتر كه c_m مي‌باشد در حالت حدي به c تخمين زده شده توسط خروجي شتاب‌سنج‌ها بعد از نرمال سازي نزديك خواهد شد. بنابراين با تنظيم مناسب $k_p,\ k_i$ مي‌توان انتظار داشت كه در بلند مدت خروجي فيلتر به خروجي شتاب‌سنج‌ها نزديك شود. در اينجا مي‌توان ضرايب را به ضريب ميرايي و فركانس قطع به صورت رابطه (۲۰) مربوط نمود.

$$k_i = \omega^2 \quad , \ k_p = 2\xi\omega \qquad (۲۰)$$

براي اينكه خطا، حالت فرا جهش نداشته باشد، مقدار$\xi =$ ۰/۷۰۷ انتخاب مي‌شود. در اين حالت k_p به صورت رابطه (۲۱) خواهد بود:

$$k_p = \sqrt{2}\omega \qquad (۲۱)$$

در اينجا طراحي كنترلر خطا كه به شكل PI بوده به انتخاب فركانس قطع منجر مي‌شود. تغييرات اين فركانس در سيستم‌هاي عملي بين ۰/۰۱ $\frac{rad}{\sec}$، ۰/۰۰۱ $\frac{rad}{\sec}$ خواهد بود. در مرجع [۱۱] يك روش فازي براي انتخاب بهينه ω آمده است.

۵- فرمول بندي جديد براي تخمين وضعيت

حال ديناميك كانال قائم به معادلات اضافه مي گردد. با استفاده از معادله سوم (۹) و چشم‌پوشي از جمله مربوط به شتابهاي كريوليس مي‌توان نوشت:

$$\dot{V}_d = c^T f^b + g \qquad (۲۴)$$

كه در آن V_d سرعت رو به پايين مي‌باشد. همچنين با استفاده از مرجع [۷] مي‌توان نوشت:

$$\dot{h} = -V_d \qquad (۲۵)$$

با جمع نمودن معادلات مربوط به وضعيت و معادلات مربوط به كانال قائم به شكل ماتريسي:

$$\begin{bmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\\ \dot{c}_3\\ \dot{V}_d\\ \dot{h}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\gamma & \tilde{\omega}_z & -\tilde{\omega}_y & 0 & 0\\ -\tilde{\omega}_z & k\gamma & \tilde{\omega}_x & 0 & 0\\ \tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_x & k\gamma & 0 & 0\\ \tilde{f}_x & \tilde{f}_y & \tilde{f}_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ V_d\\ h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}g+\begin{bmatrix}0 & -c_3 & c_2 & 0 & 0 & 0\\ c_3 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0\\ -c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_{wx}\\ n_{wy}\\ n_{wz}\\ n_{ax}\\ n_{ay}\\ n_{az}\end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

که در آن، $\tilde{\omega}=[\tilde{\omega}_x \quad \tilde{\omega}_y \quad \tilde{\omega}_z]^T$ خروجي ژيروسکوپ‌ها بعـد از جبـران سـازي سـرعت زاويـه‌اي زمـين، و $\tilde{f}^b=[\tilde{f}_x \quad \tilde{f}_y \quad \tilde{f}_z]^T$ خروجـي شـتاب‌سـنج‌هـا و $n_w=[n_{wx} \quad n_{wy} \quad n_{wz}]^T$ نـويز سـفيد گوسـي اضـافه شـده بـه خروجـي ژيروسـکوپ‌هـا و $n_a=[n_{ax} \quad n_{ay} \quad n_{az}]^T$ نويز سفيد گوسي ظاهر شده در خروجي شتاب‌سنج‌ها مـي‌باشـد. معـادلات (۲۶) داراي ۵ متغيـر حالـت مي‌باشد، حال اينکه فقط ۴ متغير مستقل موجود است. زيرا نـرم سه متغير حالت اول بايد برابر واحد باشند. بـراي اينکـه نـرم c واحد باقي بماند جمله‌هائي به شکل يک ضريب بزرگ در خطاي نرمال بودن c به معادله (۲۶) اضافه شده است. اين جمله باعـث پايداري عددي خطاي نرمال بودن خواهد شد. اثبات ايـن مـسئله در [۱۹] براي کواترنينها بيان شده است.

بنابراين با استفاده از معادله (۲۵) ديده مـي‌شـود کـه در پـرواز کروز، V_d ثابت بوده و در نتيجه $\dot{V}_d$ بايد برابر با صـفر باشـد. بايد دقت نمود که معادلات (۲۶) معادلات خطي مي‌باشند کـه در صورت استفاده از کواترنين‌ها معادله (۲۴) غيرخطي مـي‌شـود. در اين حالت معادله اندازه گيري به صورت رابطـه (۲۷) خواهـد بود:

$$z = Hx + v \quad , \quad H = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \qquad (۲۷)$$

که يك معادله خطي مي‌باشد و v نويز سفيد مربـوط بـه انـدازه گيريهـاي ارتفـاع‌سـنج بـوده کـه در اينجـا بـا ميـانگين صـفر و کواريانس R_k فرض شده است. چون معادلات حالـت و معادلـه اندازه‌گيري خطي مي‌باشـند، بنـابراين اسـتفاده از فيلتـر کـالمن خطي مي‌تواند تخمين بهينه را فراهم کند. بايد دقت شـود کـه در معادلات (۲۶) جمله‌هاي غير خطي کوچـك (جملـه سـوم) وجـود دارند که به فرم $G(x)w$ مي‌باشند کـه در آن $x, \ w$ متغيرهـاي تـصادفي مـستقل از هـم بـوده و مـاتريس G تـابعي خطـي از المانهاي بردار حالت x مي‌باشـد. محاسـبه تحليلـي ميـانگين و واريانس اين جملـه‌هـا در ضـميمه A آمـده اسـت. بـراي پيـاده سازي فيلتر کالمن خطي که براي جمله‌هاي غير خطي ذکر شـده توسعه داده شده است از روش استفاده شـده در [۲۰] اسـتفاده گرديده است. در پايان معادلات سيـستم (۲۶) و معادلـه انـدازه گيري را مي‌توان به صورت رابطه (۲۸) نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + Bu + C(x)w\\ z &= Hx + v\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با گسسته سازي معادله (۲۸) رابطه (۲۹) به دست خواهد آمد.

$$x_{k+1} = F_k\, x_k + L_k u_k + G(x_k) w_k \qquad (۲۹)$$

که در آن $u_k = g$ بوده و رابطه (۳۰) را نتيجه مي‌دهد:

$$F_k = \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t)dt\right) \ , \quad G(x_k) \approx \Delta t\ C(x_k) \ , \quad L_x \approx \Delta t\ B \qquad (۳۰)$$

حال با به کار بردن فيلتر کالمن خطي مي‌توان تخمينهاي x_k را از روي اندازه گيريهاي z_k به شکل را بطه (۳۱) به دسـت آورد [۲۰].

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k-1} &= F_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + L_{k-1}u_{k-1}\\ P_{k|k-1} &= F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1} + G(\hat{x}_{k-1|k-1})Q_{k-1}G^T(\hat{x}_{k-1|k-1}) + \Gamma(Q_{k-1}\otimes P_{k-1|k-1})\Gamma^T\\ K_k &= P_{k|k-1}H^T(HP_{k-1|k-1}H^T + R_k)^{-1}\\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1}H^T(HP_{k-1|k-1}H^T + R_k)^{-1}HP_{k|k-1}\\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

که در آن Q_{k-1} کواريانس نويز پروسه سيستم و R_k کواريـانس نويز اندازه گيري مي‌باشد. $\hat{x}_{k|k}$ تخمين فراهم شده بـراي لحظـه k-ام با استفاده از اندازه گيري‌ها تا لحظـه k-ام مـي‌باشـد و $\hat{x}_{k|k-1}$ تخمين فراهم شده براي لحظه k-ام با استفاده از انـدازه گيريهاي تا لحظه k-1 مي‌باشد. همچنين $\otimes$ نشان دهنـده ضـرب کرانکر دومـاتريس مـي‌باشـد و $\Gamma \ , \ G_{ci}, \ i=1...6$ بـه شـکل رابطه (۳۲) تعريف مي‌گردند [ضميمه A]:

$$\Gamma = [G_{c1} \quad G_{c2} \quad \cdots \quad G_{c6}] \qquad (۳۲)$$

که هر ماتريس $G_{ci} \in R^{5\times6} \ , \ i=1,2,\cdots6$ به صورت رابطـه (۳۳) تعريف مي‌شود:

$$G_{ci}x_k = G(x_k)e_i \qquad (۳۳)$$

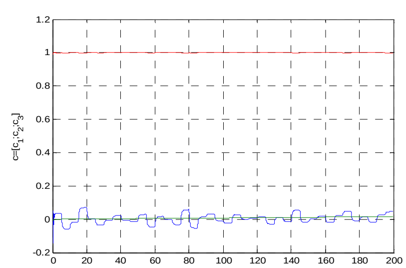
که در آن e_i بردار واحد که داراي مقدار واحد در i-امـين سـطر و در ديگرسطر ها برابر با صفر مي‌باشد.

۶- مثال عددي

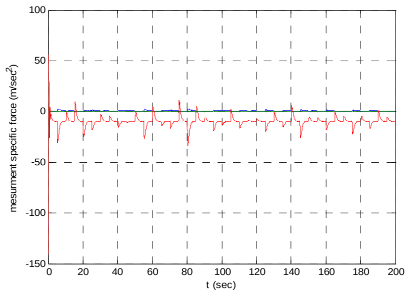
در اينجا وسيله پرنده‌اي را در نظر بگيريد که داراي مانورهاي مختلفي مي‌باشد. بايد توجه نمود که با استفاده از معادله‌هاي (۲۶) وجود شتاب در راستاهاي شمال و شرق

تاثيري در ديناميك كانال قائم ندارد. به همين دليل در شبيه‌سازي‌ها سعي شده بيشتر شتابها در صفحه قائم صورت گيرد. براي مقايسه تاثير ديناميك در نظر گرفته شده بوسيله پارامترهاي ماتريس دوران و زواياي اويلر، تلفيق اطلاعات با ارتفاع سنج به دو طريق انجام گرفته است. ابتدا بوسيله معادلات ديناميكي ارائه شده در معادله (۲۸) و فيلتر خطي ارائه شده در بخش۴ شبيه سازيها انجام گرفته است. در روش دوم از معادلات مربوط به زواياي اويلر ارائه شده بوسيله معادله (۴) و براي معادلات زواياي رول و پيچ و معادلات (۲۴) و (۲۵) براي ديناميك كانال قائم استفاده شده‌اند. در حالتي كه از زواياي اويلر استفاده مي‌شد چون معادلات ديناميكي به شدت غيرخطي مي‌باشند براي تخمين از يك فيلتر معادل فيلتر كالمن مرتبه دوم كه معروف به Unscented Kalman Filter (UKF) مي‌باشد، استفاده شده است. اين فيلتر براي محاسبه ميانگين و كواريانس توابع غيرخطي از یک الگوريتم غيرتصادفي با استفاده از يك سري نقاط سيگما كه از روي ماترس كواريانس خطا توليد مي‌شوند استفاده مي‌كند كه داراي حداقل دقت مرتبه دوم بسط تيلور مي‌باشد. دقت اين فيلتر از فيلتر كالمن توسعه يافته زيادتر است. اين فيلتر در مراجع [۲۱]، [۲۵] و فاكتورسازي آن در [۲۶] توسط نويسنده مقاله ارائه گرديده است.

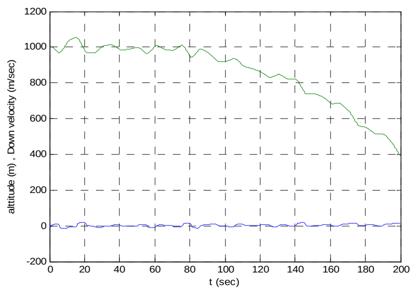
براي مسير نامي المانهاي سطر سوم ماتريس دوران در شكل (۲)، خروجيهاي شتابسنج‌ها در شكل (۳) و سرعت قائم و ارتفاع در شكل (۴)، خروجي‌هاي ژيروسكوپ‌ها در شكل (۵) و زواياي رول و پيچ در شكل (۶) نمايش داده شده‌اند. همچنانكه از شكل (۳) ديده مي‌شود شتاب‌ها در صفحه قائم زياد مي‌باشند در نتيجه نمي‌توان از الگوريتمهاي معمول استفاده نمود. خروجيهاي شتاب‌سنج‌ها و ژيروسكوپ‌ها در دستگاه بدني به دليل خطاي نويز سفيد حسگرها داراي خطا مي‌باشند.



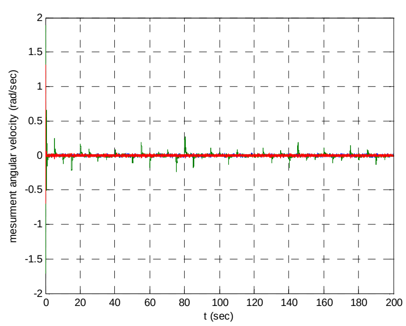
شكل (۲) : المانهاي سطر سوم ماتريس دوران



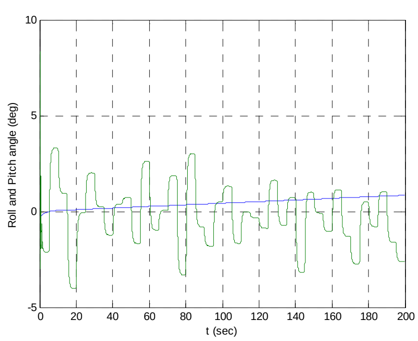
شكل (۳) : شتابهاي مخصوص اندازه گيري شده



شكل (۴) : سرعت قائم و ارتفاع



شكل (۵) : سرعتهاي زاويه اي اندازه گيري شده

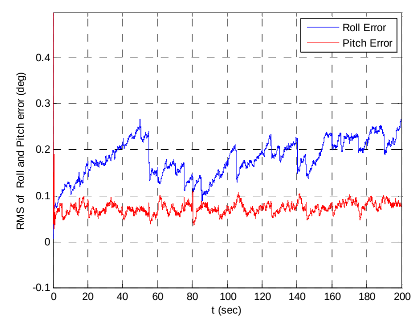


شكل (۶) : زواياي رول و پيچ

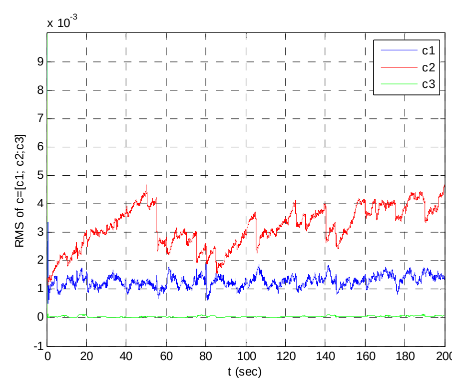
در اينجا فرض شده نويز حسگرها به صورت گوسي و سفيد بوده كه داراي باياس صفر مي‌باشند. انحراف استاندارد ژيروسكوپها $۰/۵ \frac{deg}{sec}$ و انحراف استاندارد شتاب‌سنجها $\frac{m}{sec^2}$ ۰/۰۱ و براي ارتفاع سنج $۲m$ مي‌باشد.

در اينجا براي نشان دادن كارائي فيلتر خطي توسعه داده

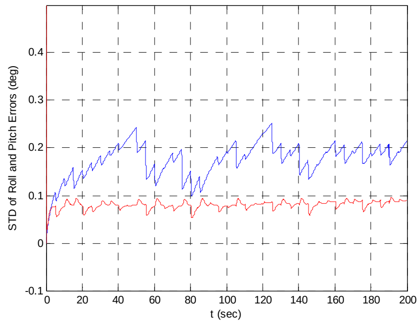
شده نسبت به فیلتر غیر خطي (UKF) شبیه سازي براي ۱۰۰ مرتبه شبیه سازي مستقل مونت کارلو تکرار گردیده است. جذر میانگین مربع خطاي زواياي رول و پيچ و پارامترهاي ماتريس دوران با استفاده از الگوريتم ارائه شده براي فيلتر خطي به ترتيب در شكلهاي (۷) و (۸) نمايش داده شده‌اند كه نشان مي‌دهند باند خطاي تخمين محدود مي‌باشد. همچنين جذر ميانگين مربع انحراف استاندارد تخمين زده شده براي خطاي زواياي رول و پيچ با استفاده از فيلتر خطي در شكل (۹) آمده است. مقايسه شكل (۷) و (۹) نشان مي‌دهد كه انحراف استاندارد تخمين زده شده براي خطاي زوايا با واقعيت مطابقت زيادي دارد. در شكل (۱۰) جذر ميانگين مربع خطاي مشاهده شده در خطاي نرمال بودن پارامترهاي ماتريس دوران نمايش داده شده است، كه نشان مي‌دهد كه خطاي نرمال بودن وضعيت پايدار داشته و افزودن خطاي نرمال بودن پارامترها در عملكرد معادلات تاثير مثبت داشته است.



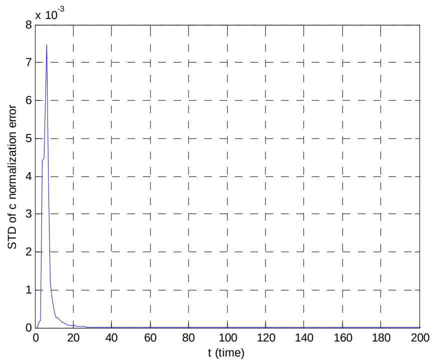
شكل (۷) : RMS خطاي زواياي رول و پيچ



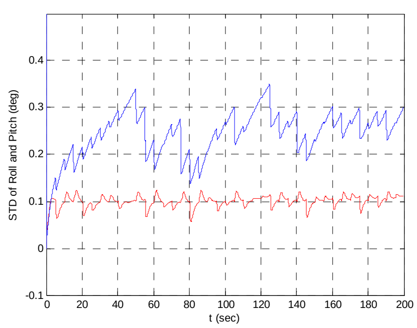
شكل (۸) : RMS خطاي پارامترهاي ماتريس دوران



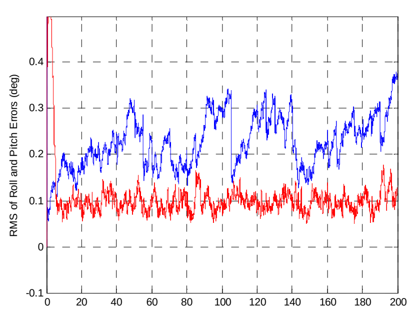
شكل (۹) : RMS انحراف استاندارد تخمين زده شده براي خطاي زواياي رول و پيچ توسط فيلتر خطي



شكل (۱۰) : **RMS** خطاي واحد بودن پارامترهاي ماتريس دوران



شكل (۱۱) : RMS انحراف استاندارد تخمين زده شده براي خطاي زواياي رول و پيچ توسط فيلتر غير خطي



شكل (۱۲) : RMS خطاي روي و پيچ توسط فيلتر غير خطي

شکل (۱۱) و (۱۲) نیز به ترتیب Root Mean Square (RMS) انحراف استاندارد تخمين خطايي رول و پيچ را براي شبيه سازي مونت كارلو و RMS خطاي رول و پيچ تخمين زده شده توسط فيلتر غير خطي را نشان مي دهند كه حاكي از عملكرد خوب فيلتر براي تخمين انحراف استاندارد حالتها مي‌باشد. همچنين بايد دقت نمود كه RMS خطاي تخمين زوايا توسط فيلتر غيرخطي بيشتر از فيلتر خطي مي‌باشد. به طور تقريبي مي‌توان گفت كه خطاي زاويه رول و پيچ توسط فيلتر خطي برابر با ۰/۱۶deg، ۰/۰۷deg براي فيلتر غير خطي ۰/۲۱ deg، ۰/۱ deg مي‌باشد كه نشان‌دهنده عملكرد خوب فيلتر خطي توسعه داده شده براي مسئله ياد شده مي‌باشد.

۷- نتيجه گيري

در اين مقاله تلفيق اطلاعات واحد اندازه‌گيري اينرسي با يك ارتفاع سنج براي مشاهده زواياي رول و پيچ يك وسيله پرنده مانوردار ارائه گرديد. ابتدا معادلات ديناميكي زواياي اويلر و كواترنينها و المانهاي ماتريس دوران براي محاسبه وضعيت با استفاده از خروجي‌هاي ژيروسكوپ‌ها ارائه گرديد. ديده شد كه معادلات كواترنين‌ها و المانهاي ماتريس دوران به صورت خطي بودند. براي حالتهاي پروازي نزديك كروز و ديناميك كم از روشهاي معمول مي‌توان دو زاويه رول و پيچ را با استفاده از خروجيهاي شتاب سنج‌ها اندازه گيري نموده و خطاي حاصل شده از خروجي ژيروسكوپ‌ها را تصحيح نمود[۱۱]. براي اينكه مجموعه براي شتابهاي بالا نيز جواب دهد معادلات مربوط به كانال قائم و يك ارتفاع سنج به مجموعه اضافه گرديد. مشاهده شد كه در صورت استفاده از كواترنين‌ها هنوز معادلات حالت كانال قائم به صورت غيرخطي مي‌مانند ولي در صورت استفاده از تعدادي از معادلات پارامترهاي ماتريس دوران، معادلات كانال قائم نيز خطي خواهند بود. چون معادلات ديناميكي سيستم و اندازه گيري در اين حالت خطي باقي مي‌مانند بنابراين استفاده از فيلترهاي خطي مناسب مي‌باشد. در چنين شرايطي مي‌توان از معادلات فيلتر كالمن استاندارد استفاده نمود. فقط یک جمله غيرخطي كوچكي در معادلات سيستم حاصل از ضرب پارامترهاي ماتريس دوران در نويز حسگرها باقي مي‌ماند. در اينجا فيلتر خطي با استفاده از روشهاي تحليلي مانند [۲۰] براي در بر گرفتن چنين جمله‌هاي غيرخطي توسعه داده شد [ضميمه A].

براي نشان دادن تاثير معادلات خطي و فيلتر خطي استفاده شده در دقت تخمين‌ها، جواب‌ها با نتايج گرفته شده از فيلتر غير خطي و معادلات زواياي اويلر، مقايسه گرديد. نتايج نشان مي‌دهند كه حتي در صورت استفاده از فيلتر غيرخطي مرتبه دوم، خطا نسبت به سيستم خطي افزايش مي‌يابد و اين در حالي است كه استفاده از فيلتر كالمن توسعه يافته براي ديناميك زواياي اويلر در اين حالت حتي واگرائي فيلتر را سبب خواهد شد. بايد توجه نمود كه دليل گرايش به سمت فيلتر خطي مشاهده پذيري بسيار ضعيف رول و پيچ با استفاده از خروجي‌هاي ارتفاع سنج بود. اين سيستم مي‌تواند در حركت‌هاي شتابدار نيز جواب دهد زيرا خطاي ايجاد شده در اثر وجود شتاب در كانال قائم نفوذ خواهد نمود كه خروجي يک ارتفاع سنج مي‌تواند اين خطا را مشاهده كند..

۸- ضميمه A: تخمين ميانگين و كواريانس ديناميك سيستم

در نظر بگيريد كه مي‌خواهيم ميانگين و كواريانس y_k را كه تابعي از بردارهاي تصادفي $w_k \in R^m$ و $x_k \in R^n$ است و به شكل زير تعريف مي‌شود را بدست آوريم.

$$y_k = F_k x_k + G(x_k) w_k \qquad (۱\text{-a})$$

كه در آن

$$E(w_k)=0 \qquad E(x_k)=\hat{x}_k$$
$$E(w_k w_k^T)=Q_k \qquad E\left[(x_k-\hat{x}_k)(x_k-\hat{x}_k)^T\right]=P_k \qquad (۲\text{-a})$$

باشد، كه در آن w_k مستقل از x_k بوده و $G(x_k)$ تابعي خطي از المانهاي بردار x_k مي‌باشد. جمله $G(x_k)w_k$ را مي‌توان به صورت رابطه (a-۳) نوشت:

$$z_k = G(x_k)w_k = G(x_k)(\sum_{i=1}^{m} w_{i,k} e_i) \qquad (۳\text{-a})$$

معادله(a-۳) را به دليل اسكالر بودن $w_{i,k}$ مي توان به شكل رابطه (a-۴) نوشت:

$$z_k = G(x_k)w_k = \sum_{i=1}^{m} w_{i,k}\left[G(x_k)e_i\right] = \sum_{i=1}^{m} w_{i,k}(G_{ci}x_k) = (\sum_{i=1}^{m} w_{i,k}G_{ci})x_k \qquad (۴\text{-a})$$

براي محاسبه ميانگين z_k مي‌توان به شكل رابطه (a-۵) عمل نمود.

$$E(z_k)=E\left[(\sum_{i=1}^{m} w_{i,k}G_{ci})x_k\right]=\sum_{i=1}^{m}E(w_{i,k})G_{ci}E(x_k)=0 \qquad (۵\text{-a})$$

دليل آن صفر بودن ميانگين $w_{i,k}$ و مستقل بودن دو بردار

تصادفي مي‌باشد. بنـابراين ميـانگين y_k بـه شـكل رابطـه (a-۶) خواهد بود:

$$\hat{y}_k = F_x \hat{x}_k \qquad (۶\text{-a})$$

براي محاسبه كواريانس y_k :

$$\begin{aligned} P_{y_k} &= E\left[(y_k - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)^T\right] = F_k E\left[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)\right]F^T \\ &+ F_k E\left[(x_k - \hat{x}_k) w^T G^T(x_k)\right] + E\left[G(x_k) w_k (x_k - \hat{x}_k)^T\right] \\ &+ E\left[G(x_k) w_k w_k^T G^T(x_k)\right] \end{aligned} \qquad (۷\text{-a})$$

مي توان به راحتي نشان داد كه جملـه‌هـاي سـوم و دوم سـمت راست معادله(a-۷) برابر با صفر مي‌باشند. دليل اين امر مـستقل بودن x_k از w_k مي‌باشد. بنابراين:

$$P_{y_k} = F_k P_k F_k^{\,T} + E\left[G(x_k) w_k w_k^T G^T(x_k)\right] \qquad (۸\text{-a})$$

بـراي محاسـبه جملـه دوم معادلـه (a-۸) مـي تـوان x_k را بـه صورت تابعي از $\hat{x}_k$ و خطاي تخمين $\hat{x}_k$ نوشت:

$$x_k = \hat{x}_k + (x_k - \hat{x}_k) \qquad (۹\text{-a})$$

با جايگذاري (a-۹) در جمله دوم معادله (a-۸):

$$\begin{aligned} E\left[G(x_k) w_k w_k^T G(x_k)\right] &= \left[G(\hat{x}_k) w_k w_k^T G(\hat{x}_k)\right] \\ &+ E\left[G(\hat{x}_k) w_k w_k^T G^T(x_k - \hat{x}_k)\right] \\ &+ E\left[G(x_k - \hat{x}_k) w_k^T G^T(\hat{x}_k)\right] \\ &+ E\left[G(x_k - \hat{x}_k) w_k w_k^T G^T(x_k - \hat{x}_k)\right] \end{aligned} \qquad (۱۰\text{-a})$$

جمله‌هاي دوم و سوم به دليل مستقل بودن x_k و w_k و همچنين صفر بودن خطاي تخمين اوليه $E(x_k - \hat{x}_k) = 0$ و همچنين با بسط $G(x_k - \hat{x}_k) w_k$ با استفاده از معادله (a-۴) برابر با صفر خواهند بود. بنابراين:

$$\begin{aligned} E\left[G(x_k) w_k w_k^T G(x_k)\right] &= \left[G(\hat{x}_k) E(w_k w_k^T) G(\hat{x}_k)\right] \\ &+ E\left[G(x_k - \hat{x}_k) w_k w_k^T G^T(x_k - \hat{x}_k)\right] \\ &= \left[G(\hat{x}_k) Q_k G(\hat{x}_k)\right] + E\left[G(x_k - \hat{x}_k) w_k w_k^T G^T(x_k - \hat{x}_k)\right] \end{aligned} \qquad (۱۱\text{-a})$$

با بسط جمله دوم معادله (a-۱۱) مطابق با معادلـه (a-۴) بدسـت خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & E\left[G(x - \hat{x}_k) w_k w_k^T G^T(x_k - \hat{x}_k)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_{ci}\;\; w_{i,k} w_{j,k} (x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T G_{cj}^T\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_{ci}\;\; E\left[w_{k,i} w_{j,k} (x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)\right] G_{cj}^T \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_{ci}\;\; E\left[w_{k,i} w_{j,k}\right] E\left[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)\right] G_{cj}^T \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_{ci}\;\; Q_{ij} P_k G_{cj}^T \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_{ci}\;\; \left[Q \otimes P_k\right] G_{cg}^T \\ &= \left[G_{c1} G_{c2} \cdots G_{c6}\right](Q \otimes P_k)\left[G_{c1} G_{c2} \cdots G_{c6}\right]^T \\ &= \Gamma(Q \otimes P_k)\Gamma^T \end{aligned} \qquad (۱۲\text{-a})$$

دومين تساوي بـه دليـل خطـي بـودن اپراتـور E مـي‌باشـد كـه مي‌تواند با اپراتور $\sum$ جابجا گردد. سـومين تـساوي بـه دليـل مستقل بودن x_k, w_k اتفاق مي‌افتد. در تساوي پـنجم از تعريـف ضرب كانكر دو ماتريس استفاده شده است. تساوي آخر نيز بـه دليل تعريف Γ و حذف $\sum$ هـا مـي‌باشـد. حـال بـا جايگـذاري (a ‎-۱۲) در (a ‎-۱۱) و حاصل در (a ‎-۸) كواريانس y_k براحتـي قابل محاسبه خواهد بود.

$$P_{y_k} = F_k P_k F_k^{\,T} + G(\hat{x}_k) Q_k G(\hat{x}_k) + \Gamma(Q \otimes P_k)\Gamma^T \qquad (۱۳\text{-a})$$

۹- مراجع

[۱] S.A. Whitmore, M. Fife, L. Brasher," *Development of strapdown attitude system for an ultrahigh altitude flight experiment*", NASA TM-4775, January 1997.

[۲] G.M. Siouris, "*Aerospace Avionics Systems: A Modern Synthesis*", Academic Press, New York, 1993.

[۳] B. Wie, "*Space Vehicle Dynamics and Control*", AIAA Education Series", AIAA Inc., USA, 1998.

[۴] Kayton, M. and W.R. Fried, "*Avionics Navigation Systems*", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.

[۵] Schuler, M: "*Die Storung von Pendel- und kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges*", Physik. Z., vol. 24 July, 1923. [a translation appears in G. R. Pitman, Jr. (ed), "*Inertial Guidace*," john Wiley & Sons, Inc., New York, 1962].

[۶] C. J. Savant, R.C. Howard, C.B. Solloway, C.A. Savant, "*Principles of Inertial Navigation*", McGraw-Hill, 1961.

[۷] D. H. Titerton and J. L. Weston, "*Strapdown Inertial Navigation Technology*", Peter Peregrinus Ltd., 1997.

[۸] J.P. Gilmore, "*Modular strapdown guidance unit with embedded micro processor*", J. Guid. Contr. 3 (1) (1980) 560–565

[۹] M. Koifman, S.J. Merhav, "*Autonomously aided strapdown attitude reference system*", J. Guid. Contr. Dyn. 14 (6) (1991) 1164–1172.

[۱۰] S.K. Hong, "*Compensation of nonlinear thermal bias drift of resonant rate sensor (RRS) using fuzzy logic, Sens*". Actuators A 73 (2–3) (1999) 143–148

[۱۱] Sung Kyung Hong, "*Fuzzy logic based closed-loop strapdown attitude system for unmanned aerial vehicle (UAV)*", www.elsevier.com, accepted 4 June 2003.

[۱۲] I. Madani, "*An investigation into a reduced sensor fit for unmanned aircraft*", M.Sc. Thesis, Cranfield University, 1998.

[۱۳] M. Wang, Y. Yang, R. R. Hatch, and Y. Zhang, "*Adaptive Filter for a Miniature MEMS Based Attitude and Heading Reference System*", IEEE, April 26-29, 2004.

[۱۴] L. Crassidis and E L. Markley, "*Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation*", Journal of Guidance. Conlrol, and Dynamics, vol. 26, no. 4, pp. 536542, July-August 2003.

[۱۵] Guang-fu Ma, Xue-Yuan Jiang, "*Unscented Kalman Filter for Spacecraft Attitude Estimation and Calibration using Magnetometer Measurements*", Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Guangzhou, 18-21 August 2005.

[۱۶] E.J. Lefferts, F.L. Markley, M.D. Shuster, "*Kalman Filtering for Spacecraft Attitude estimation*", J. Guidance, Vol.5, No.5, Sept-Oct 1982.

[۱۷] J.F Guerrero Castellanos, S. Lesecq, N. Marchand, J. Delamare, "*A Low-Cost Air Data attitude Heading Reference System for the Tourism Airplane Applications*".

[۱۸] R. P. Kornfeld, R. J. Hansman and J.J. Deyst, "*Single-Antenna GPS-Based Aircraft Attitude Determination*", Journal of The Institute of Navigation, Vol. 45, No.1, Spring 1998.

[۱۹] W. F. Phillips, C. E. Hailey, "*Review of Attitude Representations Used for Aircraft Kinematics*", Journal of Aircraft, Vol. 38, No. 4, July-August, 2001.

[۲۰] D. Choukroun, I.Y. Bar-Itzhack, Y. Oshman, "*A Novel Quaternion Kalman Filter*", 42th AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Monterey, Aug. 2002.

[۲۱] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "*A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions*," Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford, OX1 3PI UK, Tech. Rep., Nov 1996.

[۲۲] E. A. Wan and R. van der Merwe, "*Kalman Filtering and Neural Networks*" Haykin, S. (Ed.), John Wiley & Sons, New York, 2001.

[۲۳] Rudolph van der Merwe, "*Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models*", Ph.D thesis, OGI School of Science & Engineering, Oregon Health & Science University, Portland, OR, April 2004.

[۲۴] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "*Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*" Proceedings of the IEEE, Vol. 92, No. 3, pp. 401–422, March 2004.

[۲۵] Edgar Kraft, "*A Quaternion-based Unscented Kalman Filter for Orientation Tracking*", in Proceedings of Fusion, Cairns, Australia, July 2003.

[۲۶] H. Ghanbarpourasl, S.H. Pourtakdust, "UD Covariance Factorization for Unscented Kalman Filter using Sequential Measurements Update" Academy of Science, Engineering and technology, Vol. 25, Nov. 2007, ISSN 1307-6884.

فهرست علائم

ماتريس تبديل از دستگاه بدني به ناوبري	C_b^n
سرعت زاويه‌اي دستگاه بدني نسبت به ناوبري در دستگاه بدني	ω_{nb}^b
سرعت زاويه‌اي دستگاه ناوبري نسبت به زميني در دستگاه بدني	ω_{en}^b
سرعت زاويه‌اي دستگاه زميني نسبت به اينرسي در دستگاه بدني	ω_{ie}^b
ماتريس پاد متقارن از بردار سرعت زاويه‌اي دستگاه بدني نسبت به ناوبري در دستگاه بدني	Ω_{nb}^b
كواترنينها	a,b,c,d
المانهاي سطر سوم از ماتريس دوران	c_1,c_2,c_3
رول، پيچ و ياو (سمت)	$\phi,\ \theta,\ \psi$
سرعت وسيه نسبت به زمين در دستگاه ناوبري	V_e^n
سرعت رو به پايين وسيله پرنده	V_d
شتاب كل در دستگاه ناوبري	F_t^n
خروجيهاي ژيروسكوپها	$\tilde{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}$
خروجيهاي شتابسنجها	$\tilde{f}^b=\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\\ f_z\end{bmatrix}$

۱۰- زيرنويس ها

۱Resolution

۲Vertical

۳Level Switches

۴Gimbals

۵Gain

۶Direction Cosine Matrix (DCM)