

روشی برای به دست آوردن ناحیه پایداری

غلامرضا جهانشاهلو^۱، فرهاد حسین زاده لطفی^{۲*}، مسعود صانعی^۳، شکوفه بنی هاشمی^۴

^۱ گروه ریاضی، دانشگاه تربیت معلم تهران

^۲ گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران

^۳ گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

^۴ گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

چکیده

یکی از مباحث مهم در تحلیل پوششی داده ها تحلیل حساسیت و پایداری واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی می باشد. این مقاله یک روشی را برای به دست آوردن ناحیه پایداری ورودی و خروجی واحد تصمیم گیرنده به خصوص ارائه می نماید. این روش بر اساس افزایش برخی یا همه ورودی ها و کاهش برخی یا همه خروجی انجام می گیرد و تغییرات کارایی را در این حالت های مختلف به دست می آوریم مشروط بر اینکه سایر داده ها ثابت باقی بماند.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، تحلیل حساسیت، ناحیه پایداری.

۱ مقدمه

در سال (۱۹۷۸) چارنز، کوپر، و رودز مدل CCR را برای به دست آوردن DMU های کارا و ناکارا ارائه کردند [۱]. چند سال بعد مدل CCR اصلاح شده و به دنبال آن بحث جالب ابرکارایی و یکی از موارد استفاده آن تحلیل حساسیت و ناحیه پایداری توسط تعدادی از محققین ارائه شد و موضوعی که چقدر ورودی را افزایش دهیم و یا خروجی را کاهش دهیم تا DMU کارای راسی، کارایی خود را حفظ کند، از سال ۱۹۸۵ تا کنون مبنای کار تعدادی از محققین قرار گرفته است.

اولین بار بحث تحلیل حساسیت مدل CCR توسط چارنز در سال ۱۹۸۵ برای تغییر در یک خروجی ارائه شد [۲]، و سپس چارنز و نرالیک (۱۹۹۰) بحث را برای مدل جمعی ادامه دادند [۳] و شرایط کافی برای حفظ کارایی را به دست آوردند. سپس در سال ۱۹۹۲ چارنز با استفاده از L_1, L_∞ یک ناحیه پایداری خاص را به دست آورد [۴]. در سال ۱۹۹۶ زو بحث نیرومندی DMU های کارا را مطرح کرد و روابط $\beta_i \geq 1$ برای

و خروجی DMU_0 تحت ارزیابی است) را برای به دست آوردن ناحیه پایداری به کاربرد [۵].
در سال ۱۹۹۸، سیفورد و زو ناحیه پایداری خروجی را به دست آوردند [۶] و [۷] و تا سال های اخیر این بحث ادامه دارد. در سال ۲۰۰۵ جهانشاهلو و همکاران ناحیه پایداری مدل BCC و مدل جمعی را با استفاده از ابر صفحه های تکیه کننده DMU_0 و مرز $DMU_j (j \neq 0)$ در شرایطی که ورودی ها و خروجی های سایر DMU ها ثابت فرض می شوند ارزیابی کردند [۸].

در این مقاله ناحیه پایداری ورودی و خروجی مدل CCR که سیفورد و زو در سال ۱۹۹۸ ارائه دادند، با استفاده از ابر صفحه های تکیه کننده، به طور ساده تری به دست آورده شده است. در بخش دو تعدادی از مفاهیم و مدل های اصلی DEA نمایش شده است. در بخش سه روش ارائه شده برای به دست آوردن ناحیه ورودی بیان می شود. در بخش چهار با یک مثال عددی روش ارائه شده توضیح داده می شود. و بالاخره آخرین بخش نتیجه گیری از حالت بیان شده می باشد.

۲ مقدمات اولیه

یک مجموعه از DMU ها $(DMU_j)_{j=1, \dots, n}$ که دارای m ورودی و s خروجی است در نظر بگیرید. فرض کنید که $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ ، $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ بردارهای ورودی ها و خروجی ها باشند و $Y_j \neq 0, X_j \neq 0$

مجموعه امکان تولید T_c به صورت زیر تعریف می شود:

$$T_c = \left\{ (x, y) \left| X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, X_j \geq 0, j=1, \dots, n \right. \right\}$$

مدل ابر کارایی در تحلیل پوششی داده ها که با حذف DMU_0 مورد بررسی از مجموعه امکان تولید به دست می آید به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{S.t } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j X_{ij} \leq \theta X_{i0} \quad i=1, \dots, m, \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j Y_{rj} \geq Y_{r0} \quad r=1, \dots, s, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n, j \neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

و همچنین فرم مضربی مدل CCR به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{S.t} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s, \\ & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

که با استفاده از فرم مضربی و ضرایب u^* و v^* ابر صفحه های ماربر DMU_0 به دست می آید. چارنز در سال ۱۹۹۱ مجموعه همه DMU ها را به چهار دسته E, E', F, N تقسیم کرده است. دقت کنید که DMU های متعلق به دسته E' ، ترکیبات خطی از DMU های دسته E می باشد (زو و شن ۱۹۹۵). بنابراین افزایش در هر یک از ورودی ها و یا کاهش در هر یک از خروجی های واحد تصمیم گیرنده دسته E' سبب ناکارایی می گردد.

و همچنین، DMU های متعلق به دسته F ، اگر دارای ورودی ها و خروجی هایی باشند که متغیر کمکی متناظر آنها مخالف صفر است، نسبت به تغییرات اعمال شده پایدار، هستند. پس برای ورودی ها و خروجی هایی که متغیر کمکی مخالف صفر ندارند، هر گونه تغییرات ورودی و خروجی باعث ناکارایی DMU مورد بحث می گردد. پس در اینجا، بحث مورد نظر را به مجموعه E ، DMU های کارای راسی، معطوف می کنیم.

۳ روشی برای به دست آوردن ناحیه پایداری ورودی (ISR) و ناحیه پایداری خروجی (OSR) در مدل CCR

در اینجا هدف به دست آوردن ناحیه پایداری برای مدل CCR با استفاده از ابر صفحه های تکیه کننده بر PPS در مجموعه E می باشد. در این مدل افزایش تعدادی ورودی و یا کاهش تعدادی خروجی و یا تلفیق این دو، باید به گونه ای باشد که DMU مورد بررسی بعد از تغییر موقعیت کارا باقی بماند. یک DMU کارا، بعد از افزایش ورودی ها و یا کاهش خروجی ها کارا باقی می ماند، اگر و فقط اگر این چنین تغییراتی در ناحیه پایداری ورودی و یا ناحیه پایداری خروجی باشد.

۳-۱ ناحیه پایداری ورودی (ISR)

بحث مورد نظر را در مورد ناحیه پایداری ورودی در مدل CCR انجام می دهیم. در این روش ابتدا با استفاده از مدل اصلاح شده نقاط جدیدی را به دست می آوریم و فرض می کنیم که (۳) برای هر ورودی شدنی است.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \beta_k^o \\
 & \text{S.t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta_k^o x_{ko} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad i=1, \dots, m, \quad i \neq k \quad (3) \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r=1, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \quad j \neq o
 \end{aligned}$$

نقاط به دست آمده ماکزیمم امکان افزایش برای هر ورودی با حفظ شرط کارایی در حالی که ورودی های دیگر و همه خروجی ها ثابت باشند را می دهد. و مدل (۳) m نقطه مرزی فرضی را هنگامی که DMU_o از مجموعه امکان تولید ما حذف گردد را به وجود می آورد. k امین نقطه تولید شده با افزایش k امین ورودی از X_{ko} به $\beta_k^o X_{ko}$ در حالی که بقیه ورودی ها و خروجی ها ثابت فرض شوند به دست می آید.

اکنون این نقطه فرضی به صورت $(x_{1o}, \dots, \beta_k^o x_{ko}, \dots, x_{mo}, y_{1o}, \dots, y_{so})$ $DMU(\beta_k^o)$ می باشد. ابرصفحه های ایجاد شده توسط نقطه $(x_{1o}, \dots, x_{mo}, y_{1o}, \dots, y_{so})$ با نقاطی که در آنها افزایش ورودی داشتیم، H_m, \dots, H_1 می نامیم. در مرحله بعد، ابر صفحه ایجاد شده با m نقطه

$$\begin{cases}
 (\beta_1^* x_{1o}, \dots, x_{mo}, y_{1o}, \dots, y_{so}) \\
 \vdots \\
 (x_{1o}, \dots, \beta_m^* x_{mo}, y_{1o}, \dots, y_{so})
 \end{cases}$$

را به صورت $B_1 \beta_1 + \dots + B_m \beta_m = 1$ در نظر می گیریم و جدول بالا را به صورت زیر می سازیم:

$$\begin{cases}
 \beta_1^o B_1^o + B_2^o + \dots + B_m^o = 1 \\
 B_1^o + \beta_2^o B_2^o + \dots + B_m^o = 1 \\
 \vdots \\
 B_1^o + B_2^o + \dots + \beta_m^o B_m^o = 1
 \end{cases}$$

و ضرایب B_i از رابطه بالا به دست می آید.

اگر ابرصفحه ایجاد شده در بالا مغلوب هیچ DMU دیگری بجز DMU_o نگردد، ناحیه پایداری ورودی به صورت زیر محاسبه می شود:

S_1 به صورت $S_1 = \bigcap_{K=1}^m H_k^+$ و S_2 نیز به صورت $B_1 \beta_1 + \dots + B_m \beta_m \leq 1$ تعریف می گردد، و S ناحیه ورودی به صورت $S = S_1 \cap S_2$ تعریف می شود. اگر ابر صفحه ایجاد شده مغلوب DMU های دیگر گردد، دو روش برای محاسبه ناحیه پایداری به کار می بریم.

روش ۱: اگر ابر صفحه های تکیه کننده بر DMU_0 برای تولید همه سطح های کارا را K_1, \dots, K_n بنامیم و π_1 را مجموعه DMU های دیگری بجز DMU_0 که روی این ابر صفحه ها قرار دارند، بنامیم، $DMU_1 = \pi_1, \dots, DMU_h$ به دست می آید. حال چون ابر صفحه ایجاد شده در بالا مغلوب DMU های دیگر شده است، باید این DMU های ناکارا که بعد از حذف DMU_0 کارا تشخیص داده می شوند را به دست آوریم. پس باید مدل مضربی CCR را حل کنیم.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \\ \text{S.t} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j=1, \dots, n, \quad j \neq 0 \\ & u_r \geq 0 \quad r=1, \dots, s, \\ & v_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

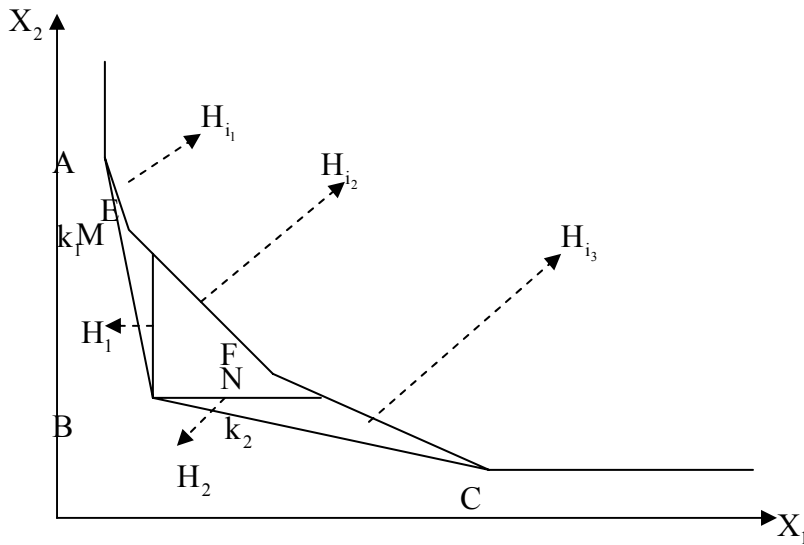
بعد از حل مدل مضربی، مجموعه این DMU های ناکارا که با استفاده از مدل مضربی، کارا تشخیص داده می شوند، $\pi_2 = \{DMU_{j1}, \dots, DMU_{je}\}$ می نامیم. حال ابر صفحه های تکیه کننده ای که شامل $DMU_1, \dots, DMU_h, DMU_{j1}, \dots, DMU_{je}$ هستند را با استفاده از مدل (۵) که توسط جهانشاهلو و همکاران در مقاله رتبه بندی گرادیان به کار رفته است، به دست می آوریم و H_{i1}, \dots, H_{if} می نامیم.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & H_0 = -V^t X_0 + U^t Y_0 \\ \text{S.t.} \quad & -V^t X_j + U^t Y_j \leq 0 \quad j=1, \dots, n \quad j \neq 0 \\ & V^t e + U^t e = 1 \\ & V \geq \varepsilon 1 \\ & U \geq \varepsilon 1 \end{aligned} \quad (5)$$

مجموعه S_1 و S_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S_2 = \bigcup_{i=1}^f H_{i1}^-, \quad S_1 = \bigcap_{k=1}^m H_k^+$$

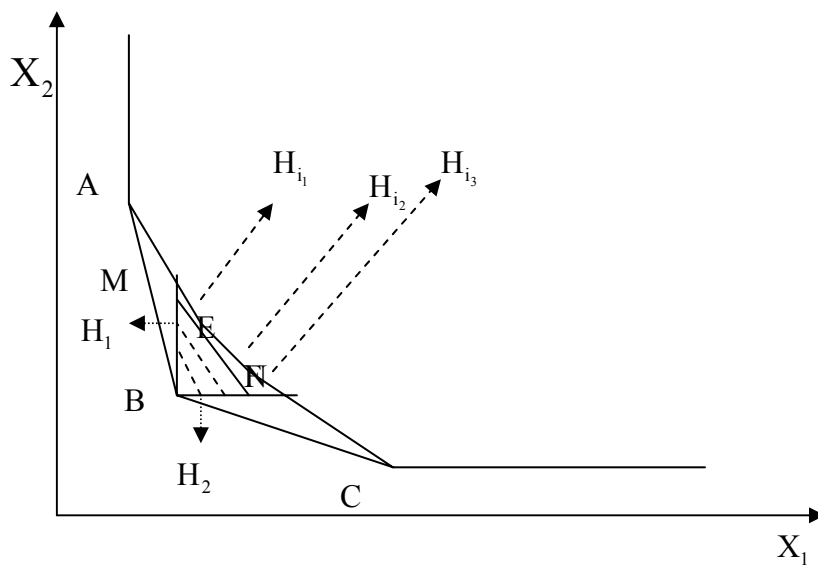
و در نتیجه مجموعه S به صورت $S = S_1 \cap S_2$ تعریف می گردد.



شکل ۱

روش ۲: اگر ابرصفحه ایجاد شده مغلوب DMU های دیگر بجز DMU_0 گردد، پس از اینکه DMU_0 های ناکارایی که بعد از حذف DMU_0 ، کارا تشخیص داده شده بودند، به دست آوریم، ابرصفحه های ایجاد شده توسط نقاط جدید (نقاطی که بعد از افزایش ورودی در هر راستای دلخواه به دست آمده) با نقاطی که کارا تشخیص داده شده بودند، را در نظر می گیریم و اجتماع آنها را به صورت زیر حساب می کنیم:

$$S_1, S_2 = \bigcup_{i=1}^r H_i^- \text{ و } S \text{ مانند روش بالا به دست می آید.}$$



شکل ۲

۲-۳ ناحیه پایداری خروجی (OSR)

ناحیه پایداری خروجی، برای کاهش خروجی DMU_0 کارای راسی، با استفاده از مدل مطرح شده (زو، ۱۹۹۶) به دست می آید. به طور مجدد فرض می کنیم، مدل (۶) برای خروجی ها شدنی است.

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \alpha_k^0 \\
 \text{S.t.} \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j y_{kj} \geq \alpha_k^0 y_{r0} & r=1, \dots, s, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0} & r \neq k, \quad (6) \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} & i=1, \dots, m, \\
 & \lambda_j > 0 & j=1, \dots, n, \quad j \neq 0
 \end{aligned}$$

مقادیر بهینه (۶) S نقطه فرضی، که ماکزیمم کاهش برای هر خروجی، با حفظ شرط کارایی، در حالی که خروجی های دیگر و همه ورودی ها ثابت فرض شوند را می دهد.

$$DMU(\alpha_k^0) = (x_{10}, \dots, x_{m0}, y_{10}, \dots, \alpha_k^0 y_{k0}, \dots, y_{s0})$$

اگر صفحه های ایجاد شده توسط نقطه $(x_{10}, \dots, x_{m0}, y_{10}, \dots, y_{s0})$ با S نقطه فرضی را g_s, \dots, g_1 می نامیم. بعد ابرصفحه ایجاد شده با S نقطه را به دست می آوریم و $A_1^0 \alpha_1 + \dots + A_s^0 \alpha_s = 1$ را در نظر می گیریم و فضای شامل آن به صورت $A_1^0 \alpha_1 + \dots + A_s^0 \alpha_s \geq 1$ می شود و مانند قبل ناحیه S به دست می آید.

۴ مثالی برای به دست آوردن ناحیه پایداری ورودی (ISR)

ما اکنون ناحیه پایداری ورودی در مدل CCR را با استفاده از روش مطرح شده برای ۵، DMU جدول ۱ محاسبه می کنیم. واضح است که DMU های A, B, C کارای راسی هستند و DMU های E, F ناکارا می باشند.

ناحیه پایداری ورودی را برای DMU_B ، هنگامی که دو ورودی افزایش می یابد، حساب می کنیم. ابتدا

$$\text{مدل (۳) را برای } DMU_B \text{ حل می کنیم، برای } k=1, \beta_1^0 = \frac{5}{3}, \text{ و برای } k=2, \beta_2^0 = \frac{8}{5} \text{ به دست می آید.}$$

دو نقطه تولید شده جدید متناظر با مقادیر بالا داریم:

$$\begin{cases}
 M = (\beta_1^0 x_{10}, x_{20}) = (\frac{10}{3}, 2) \\
 N = (x_{10}, \beta_2^0 x_{20}) = (2, \frac{16}{5})
 \end{cases}$$

حال ابرصفحه های ایجاد شده با نقاط فوق و B را به دست می آوریم:

$$H_1 : X_1 = 2$$

$$H_2 : X_2 = 2$$

S_1 را به صورت $S_1 = \cap H_i^+$ و S_2 را با استفاده از معادله ۱ به صورت: $S_2 = \frac{2}{3}\beta_1 - \frac{2}{3}\beta_2 \leq 1$ تعریف می‌کنیم.

	ورودی اول	ورودی دوم	خروجی
DMU _A	5	1	1
DMU _B	2	2	1
DMU _C	1	5	1
DMU _E	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	1
DMU _F	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{4}$	1

جدول ۱: مجموعه داده‌ها

اما در اینجا می‌بینیم که ابرصفحه ایجاد شده با دو نقطه N, M مغلوب DMU های F, E می‌گردد، پس باید از حالت دوم استفاده کنیم.

$$H_{i_1} : X_1 + \frac{3}{5}X_2 = 4$$

$$H_{i_2} : X_1 + X_2 = 5$$

$$H_{i_3} : X_1 + \frac{9}{5}X_2 = \frac{34}{5}$$

پس $S_1 = H_1^+ \cap H_2^+ = \{(X_1, X_2) | X_1 \geq 2, X_2 \geq 2\}$ و

$$S_2 = H_{i_1} \cup H_{i_2} \cup H_{i_3}$$

$$= \{(X_1, X_2) | X_1 + \frac{3}{5}X_2 \leq 4, X_1 + X_2 \leq 5, X_1 + \frac{9}{5}X_2 \leq \frac{34}{5}\}.$$

شکل ۲، ناحیه پایداری ورودی برای DMU_B در مورد دو ورودی را توصیف می‌کند.

فرض می‌کنیم $\overline{BM} = H_1$ و $\overline{BN} = H_2$ ابرصفحه‌های تکیه‌کننده ایجاد شده با نقطه B و نقاط M, N (نقاطی که حداکثر میزان افزایش ورودی را نشان می‌دهند) باشند. F, E مجموعه DMU های ناکارایی باشند که بعد از حذف DMU_B با مدل (۴) کارا تشخیص داده شده‌اند. ابرصفحه‌های $H_{i_1} = \overline{ME}, H_{i_2} = \overline{EF}, H_{i_3} = \overline{FN}$ با استفاده از مدل (۵) به دست می‌آیند. بنابراین $S_1 = H_1^+ \cap H_2^+, S_2 = H_{i_1}^- \cup H_{i_2}^-$ ، به دست می‌آید که چند وجهی BMEFN ناحیه پایداری DMU_B می‌باشد.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله رویکرد جدیدی برای تحلیل حساسیت هر واحد کارایی راسی، DMU_0 ، در مدل CCR، با استفاده از ابر صفحه های تکیه کننده ای که از ماکزیمم مقدار افزایش در ورودی های دلخواه و ابر صفحه های دیگر به وجود می آیند، ارایه شده است.

مشابه رویکردهای دیگر، روش حاضر در این مقاله بزرگترین ناحیه ورودی را برای یک DMU_0 کارایی راسی نمایش می دهد و همچنین بر مبنای افزایش تعدادی یا همه ورودی ها و یا کاهش تعدادی یا همه خروجی ها می باشد.

منابع

- [1] Charnes, A, Cooper, W.W, and Rhodes, E. (1987), "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research* 2,429-444.
- [2] Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., Morey, R.C., and Rousseau, J. (1985), "Sensitivity and stability analysis in DEA", *Annals of Operations research* 2,139-156.
- [3] Charnes, A., and Neralic, L. (1990), "Sensitivity analysis of the additive model in data Envelopment analysis", *European Journal of Operational Research* 48,332-341.
- [4] Charnes, A., Haag, S., Jaska, P., and Semple, J. (1992), "Sensitivity of efficiency classification in the additive model of data envelopment analysis", *International Journal of Systems Science* 23,789-798.
- [5] Zho, J. (1996), "Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research* 90,451-460.
- [6] Seiford, L.M., and Zho, J. (1998) "Sensitivity analysis of DEA models for simultaneous changes in all the data", *Journal of Operational Research Society* 49,1060-1071.
- [7] Seiford, L.M., and Zho, J. (1998) "Stability regions for maintaining efficiency in data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research* 108,127-139.
- [8] Jahanshahloo G.R., Sanei M., Hosseinzadeh Lotfi F. and Shoja N., (2003), "Using the gradient line for ranking DMUs in DEA", *Applied Mathematics and Computation* 151,209-219.
- [9] Jahanshahloo, G.R., Sanei, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., Shoja, N., Tohidi, G., (2005), "Sensitivity and Stability analysis in data envelopment analysis", *Applied Mathematics and Computation* 169,897-904.

