

## روشی نوین در طراحی سیستم های کنترل غیر خطی

علیرضا سحاب<sup>۱\*</sup>، محمد حدادظریف<sup>۱</sup>، عبدالله شیدفر<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>گروه کنترل، دانشکده برق و روباتیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود - ایران.

<sup>۲</sup>دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران - ایران.

### چکیده

در این مقاله روشی جدید با الهام از روش پسگام برای طراحی کلاس خاصی از سیستم های کنترل غیرخطی ارائه گردیده که آن را روش پسگام تعمیم یافته نامیده ایم. این روش را می توان برای مسایل پایدارسازی و ردیابی کلاس خاصی از سیستم های کنترل غیرخطی اتونوموس استفاده نمود. مدلی که برای نمایش این کلاس در نظر گرفته می شود، بسیاری از سیستم های غیر خطی را پوشش می دهد. شبیه سازی ها درستی نتایج را اثبات می کند.

**کلمات کلیدی:** پسگام، پسگام تعمیم یافته، فیدبک صریح، کنترل غیرخطی.

### ۱ مقدمه

برای مدت طولانی، تئوری لیاپانوف ابزار مناسبی جهت بررسی سیستم های خطی و غیرخطی بود. مشکل اصلی این تئوری مخصوصاً در سیستم های غیرخطی، یافتن تابعی با خصوصیات ویژه تابع لیاپانوف می باشد. اگر بتوان چنین تابعی را یافت، پایداری سیستم تضمین می گردد که یافتن آن به تجربه طراح نیاز دارد. هرچند در این راستا روش هایی پیشنهاد شده است، ولی هر کدام محدودیت های خاص خود را دارد. روش های متداول در تعیین تابع لیاپانوف عبارتند از:

۱. روش خطی سازی حول نقطه کار: ایراد عمده این روش حذف دینامیک های غیرخطی سیستم و همچنین محلی بودن پایداری است.
۲. روش کراسفسکی: در صورت بالا بودن تعداد حالات سیستم، حل معادلات و تعیین شرایط در این روش دشوار می باشد.
۳. روش کراسفسکی تعمیم یافته: در این روش نسبت به روش کراسفسکی، تعیین شرایط سهل تر است، اما حجم محاسبات بسیار زیادتری دارد.

۴. روش گرادیان متغیر: در این روش حل معادلات به دست آمده، همواره ساده نبوده و گاه به دستگاه معادلاتی منجر می‌شود که حل آن بسیار دشوار و پیچیده است. در ضمن جواب به دست آمده از این روش اختلاف زیادی با نتیجه روش خطی سازی ندارد.

با توجه به مشکلات روش های فوق، تلاش در جهت یافتن راهی ساده تر، منجر به پیدایش روش پسگام شد. پسگام روشی برگشتی است که می‌تواند ما را در دستیابی به این تابع کمک کند. یکی از مزایای عمده این روش جلوگیری از حذف دینامیک های غیرخطی سیستم می‌باشد. در واقع پسگام گسترش روش فیدبک حالت از سیستم های خطی به غیرخطی است که در این راستا از تئوریهای لیاپانوف استفاده می‌شود.

مبدا پیدایش تئوری پسگام دقیقاً مشخص نبوده و تجربه‌های همزمانی در این راستا انجام گرفته است. می‌توان آغاز دستیابی به آن را در چندین مقاله همزمان در دهه ۱۹۸۰ دانست. اگرچه منصفانه تر اینست که بگوییم تحقیقات پروفیسور کوکوتوویچ و همکارانش سبب ایجاد این مقوله شد [1].

در ۱۹۹۱ کوکوتوویچ مقاله‌ای در این زمینه منتشر نمود [2]. در ۱۹۹۲ کانلاکوپولوس با استفاده از تئوری پسگام یک روش ریاضی برای طراحی کنترل کننده غیرخطی ارائه داد [3]. به دنبال آن در سال های بعد افرادی همچون کریستیک [4]، فریمن [5] و سپس سپولچر [6] مقالاتی در این راستا منتشر نمودند. همچنین کوکوتوویچ در ۱۹۹۹ پیشرفت های پسگام و سایر ابزارهای کنترل غیرخطی در دهه ۱۹۹۰ را در کنگره جهانی IFAC مطرح کرد [7].

## ۲ روش پسگام

این روش برای مدل خاصی از سیستم های غیرخطی که سیستم های فیدبک صریح نامیده می‌شوند، به کار می‌رود. این سیستم ها با رابطه زیر نمایش داده می‌شوند.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2)z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = f_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) + g_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})z_n \\ \dot{z}_n = f_n(z_1, \dots, z_n) + g_n(z_1, \dots, z_n)u \end{cases} \quad (1)$$

در [8] با استفاده از مدل رابطه (۱) برای تعیین تابع لیاپانوف و سیگنال کنترلی  $u$  یک الگوریتم برگشتی ارائه شده است. در این الگوریتم در مرحله اول با فرض معلوم بودن تابع لیاپانوف  $V(z_1)$  و سیگنال کنترلی  $z_2$  برای جمله اول، تابع لیاپانوف و مقدار سیگنال کنترلی برای دو حالت  $z_1$  و  $z_2$  به دست می‌آیند. در مرحله بعدی  $z_3$  بعنوان سیگنال کنترلی در نظر گرفته می‌شود و مقدار آن برحسب حالات قبل به دست آمده و تابع لیاپانوف محاسبه می‌گردد. این سلسله عملیات ادامه می‌یابد تا سرانجام در مرحله آخر تابع لیاپانوف کل سیستم و همچنین سیگنال کنترلی  $u$  تعیین شوند.

روش پسگام دارای معایب زیر می‌باشد:

۱. این روش کاربرد محدودی دارد و فقط برای دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی که بتوان آنها را با رابطه (۱) نمایش داد، قابل استفاده است.
  ۲. این روش برای یک سیستم با  $n$  حالت، دارای  $n-1$  مرحله برگشتی است که حجم محاسباتی بسیار زیادی را به دنبال دارد.
- در ادامه روشی را مطرح می‌نماییم که نسبت به روش پسگام کلی‌تر بوده و ضمناً در یک مرحله هم تابع لیاپانوف و هم سیگنال کنترلی را نتیجه می‌دهد.

### ۳ روش پسگام تعمیم یافته

کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی اتونوموس را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) + G(X)\eta \\ \dot{\eta} = f_0(X, \eta) + g_0(X, \eta)u \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $X = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1}$  و  $\eta \in \mathbb{R}$  است.

بسیاری از سیستم‌های کنترل غیرخطی یا توسط مدل رابطه (۲) قابل نمایش هستند، معادلات سیستم خودخلبان هواپیما و یا اینکه به راحتی به این مدل تبدیل می‌شوند؛ معادلات لورنز. برای تعیین تابع لیاپانوف و سیگنال کنترلی با تکیه بر این مدل قضیه زیر را مطرح می‌کنیم.

**قضیه:** فرض کنید رابطه (۲) مدل سیستم کنترل غیرخطی مفروضی باشد. حال تابع اسکالر  $V(X)$  را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \quad (3)$$

تابع اسکالر  $\eta = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  ;  $i = 1, 2, \dots, n-1$  را طوری تعریف می‌کنیم که تابع  $V(X)$  رابطه (۳) مثبت معین بوده و مشتق آن منفی معین باشد. در این صورت سیگنال کنترلی پایدارساز و تابع لیاپانوف کل سیستم با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$u = \frac{1}{g_0(X, \eta)} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} [f_j(X) + g_j(X)\eta] - \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_i [\eta - \Phi_i(X)] - f_0(X, \eta) \right\} \quad \forall k_i > 0 ; i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

$$V_i(X, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [\eta - \Phi_i(X)]^2 \quad (5)$$

در ضمن پایداری سیستم کنترل شده از نوع مجانبی به مفهوم وسیع می‌باشد.

**اثبات:** رابطه (۲) را به صورت زیر گسترش می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(X) + g_i(X)\eta ; i=1,2,\dots,n-1 \\ \dot{\eta} = f_0(X,\eta) + g_0(X,\eta)u \end{cases} \quad (۶)$$

با توجه به فرض، تابع  $V(X)$  مثبت معین و مشتق آن منفی معین است، بنابراین می‌توان نوشت.

$$\dot{V}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] \Rightarrow \dot{V}(X) \leq -W(X) \quad (۷)$$

که  $W(X)$  یک تابع مثبت معین می‌باشد. با تغییر متغیر  $u_0 = f_0(X,\eta) + g_0(X,\eta)u$  و همچنین اضافه و کم کردن  $g_i(X)\Phi_i(X)$  به سطر  $i$ -ام رابطه (۶) خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] + g_i(X)[\eta - \Phi_i(X)] , i=1,2,\dots,n-1 \\ \dot{\eta} = u_0 \end{cases} \quad (۸)$$

حال با استفاده از تغییر متغیر زیر به دست می‌آوریم.

$$z_i = \eta - \Phi_i(X) \Rightarrow \dot{z}_i = u_0 - \dot{\Phi}_i(X) \quad (۹)$$

$$\dot{\Phi}_i(X) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} [f_j(X) + g_j(X)\eta] \quad (۱۰)$$

بنابراین رابطه (۸) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] + g_i(X)[\eta - \Phi_i(X)] \\ \dot{z}_i = u_0 - \dot{\Phi}_i \end{cases} , i=1,2,\dots,n-1 \quad (۱۱)$$

می‌دانیم که  $z_i$  ها،  $n-1$  جمله هستند. بنابراین  $\lambda_i$  را نیز به صورت  $n-1$  جمله زیر در نظر می‌گیریم.

$$\lambda_i = u_0 - \dot{\Phi}_i \quad ; \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (۱۲)$$

که در نتیجه خواهیم داشت.

$$\dot{z}_i = \lambda_i \quad ; \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (۱۳)$$

حال ثابت می‌کنیم که رابطه زیر می‌تواند تابع لیپانوف سیستم (۲) باشد.

$$V_i(X,\eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [\eta - \Phi_i(X)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 \quad (۱۴)$$

واضح است که تابع تعریف شده در رابطه (۱۴) تابعی مثبت معین می‌باشد. پس کافی است که منفی معین

بودن مشتق آن را بررسی نماییم. با مشتق‌گیری از (۱۴) نسبت به زمان داریم.

$$\dot{V}_i(X,\eta) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V(X)}{\partial x_i} [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V(X)}{\partial x_i} g_i(X) + \sum_{i=1}^{n-1} z_i \lambda_i \quad (۱۵)$$

برای اینکه  $\dot{V}_i(X, \eta)$  منفی معین باشد، مقدار  $\lambda_i$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\lambda_i = -\frac{\partial V(X)}{\partial x_i} g_i(X) - k_i z_i \quad ; \quad \forall k_i > 0 \quad (16)$$

بنابراین مقدار  $\dot{V}_i(X, \eta)$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\dot{V}(X, \eta) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i [f_i(X) + g_i(X) \Phi_i(X)] - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i^2 \leq -W(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i^2 \quad (17)$$

که نشان‌دهنده منفی معین بودن  $\dot{V}_i(X, \eta)$  است. در نتیجه تابع رابطه (۱۴) یک تابع لیاپانوف برای سیستم با معادلات (۲) می‌باشد. در ضمن سیگنال کنترلی  $u_0$  جهت پایدارسازی سیستم (۲) با استفاده از روابط (۸)، (۱۰) و (۱۱) به صورت زیر خواهد بود.

$$u_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} [f_j(X) + g_j(X) \eta] - \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_i [\eta - \Phi_i(X)] \quad (18)$$

سرانجام با استفاده از تغییر متغیر  $u = \frac{u_0 - f_0(X, \eta)}{g_0(X, \eta)}$  سیگنال کنترلی  $u$  مطابق رابطه (۴) به دست می‌آید.

ضمناً چون محدوده مثبت معین و منفی معین بودن  $\dot{V}_i(X, \eta)$  کل فضای حالات است و  $V_i(X, \eta)$  شعاعی نامحدود می‌باشد، پایداری مجانبی سیستم به مفهوم وسیع تضمین می‌گردد.

#### ۴ شبیه‌سازی یک مثال

در این بخش سیستمی مطابق رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_1 x_2 - x_1 + x_1 \eta \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_2 \eta \\ \dot{\eta} = u \end{cases} \quad (19)$$

معادلات (۱۹) مثالی از سیستم به صورت (۲) است و همانطور که شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) نشان می‌دهند، حالات سیستم ناپایدار بوده و بعد از گذشت مدت زمان کوتاهی به بی‌نهایت می‌روند. با مقایسه رابطه (۱۹) و سیستم (۲) به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} g_1(X) = x_1 & \Rightarrow g_1(X) \neq 0 \\ f_1(X) = x_1^3 + x_1 x_2 - x_2 & \Rightarrow f_1(X) \neq f_1(x_1) \end{aligned} \quad (20)$$

از (۲۰) نتیجه می‌گیریم که سیستم با معادلات (۱۹) با فرم (۱) تفاوت دارد. بنابراین مسایل پایدارسازی و ردیابی سیستم (۱۹) با استفاده از روش پسگام امکان‌پذیر نیست. در ادامه نشان می‌دهیم که مسایل پایدارسازی و ردیابی این سیستم توسط روش پیشنهادی مقاله به خوبی امکان‌پذیر می‌باشد.

#### ۴-۱ پایدارسازی حالات سیستم

$\Phi_1(x_1, x_2)$  و  $\Phi_2(x_1, x_2)$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\Phi_1(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2 \quad , \quad \Phi_2(x_1, x_2) = -2x_2^2 \quad (21)$$

حال با جایگذاری  $\Phi_1(X)$  و  $\Phi_2(X)$  در روابط (۴) و (۵) خواهیم داشت.

$$u = -(x_1^2 + x_2^2) - k_1(\eta + x_1^2 + x_2) - k_2(\eta + 2x_2^2) - 2x_1x_1 - (4x_2 + 1)x_2 \quad ; \quad k_1, k_2 > 0 \quad (22)$$

$$V_i(x_1, x_2, \eta) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(\eta + x_1^2 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(\eta + 2x_2^2)^2 \quad (23)$$

با اعمال سیگنال کنترلی  $u$  به سیستم، می‌توان نتایج را در شکل های (۴)، (۵) و (۶) مشاهده نمود. همانطور که مشاهده می‌شود، تمامی حالات سیستم پایدار شده و به نقطه تعادل پایدار می‌رسند. شکل (۷) سیگنال کنترلی مورد نیاز برای پایدارسازی را نشان می‌دهد.

#### ۴-۲ ردیابی ورودی مرجع

این بار فرض می‌کنیم ورودی  $r(t)$  به صورت تابع پله به سیستم (۱۹) اعمال گردد و خروجی سیستم حالت  $x_1$  باشد.

$$\alpha = x_1 - r(t) \quad (24)$$

با استفاده از تغییر متغیر رابطه (۲۴) سیستم (۱۹) به سیستم زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = (1 + \alpha)^3 - \alpha x_2 + (1 + \alpha)\eta \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_2 \eta \\ \dot{\eta} = u \end{cases} \quad (25)$$

با توجه به شرایط قضیه خواهیم داشت.

$$\Phi_1(\alpha, x_2) = \frac{\alpha x_2 - 2(1 + \alpha)^3}{1 + \alpha} \quad , \quad \Phi_2(\alpha, x_2) = -2x_2^2 \quad (26)$$

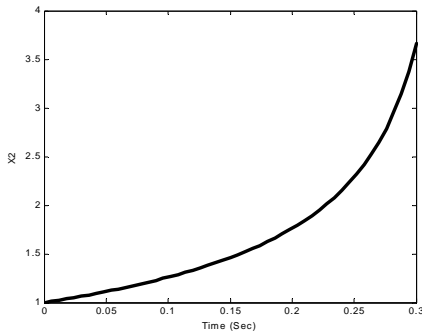
نتایج شبیه‌سازی در شکل های (۸) و (۹) نشان داده شده است. همانطور که در شکل ها دیده می‌شود، خروجی  $x_1$  بخوبی ورودی سیستم را دنبال می‌کند.

#### ۵ نتیجه گیری

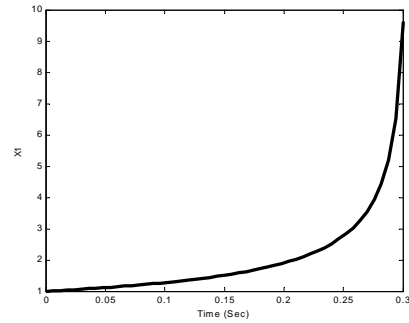
در این مقاله روشی نوین بیان شد که در واقع تعمیمی از روش پسگام در مورد سیستم های غیرخطی است. از این رو آن را روش پسگام تعمیم یافته می‌نامیم. با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام گرفته چه در زمینه پایدارسازی حالات و چه ردیابی ورودی مرجع، نتایج قابل قبولی به دست آمد. با توجه به اینکه بسیاری از سیستم های

غیرخطی را می‌توان با مدل بیان شده در این مقاله مدل نمود، بنابراین از این روش می‌توان بعنوان روشی مناسب برای کنترل دسته وسیعی از سیستم های غیرخطی استفاده کرد. در واقع پسگام تعمیم یافته، کنترل فیدبک حالت سیستم های غیرخطی می‌باشد که به کمک آن می‌توان حالات ناپایدار سیستم را پایدار نمود.

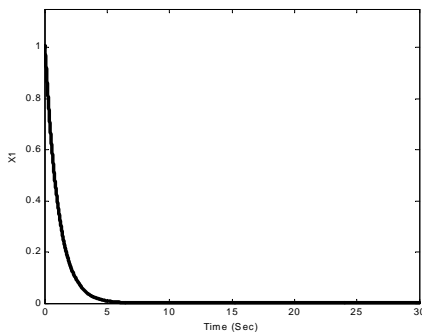
### ۶ اشکال



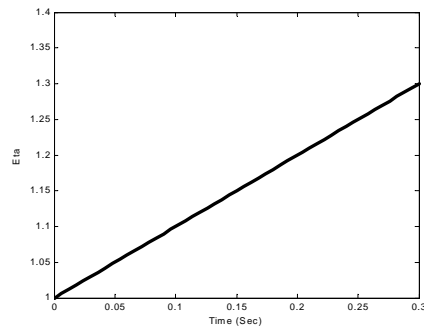
شکل ۲: تغییرات  $x_2$  قبل از پایدارسازی



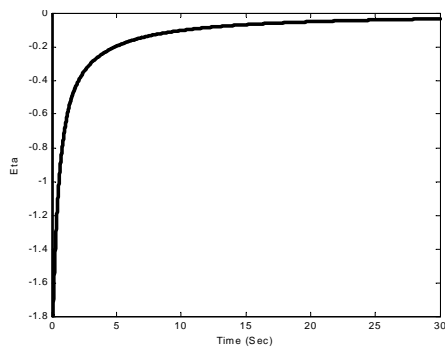
شکل ۱: تغییرات  $x_1$  قبل از پایدارسازی



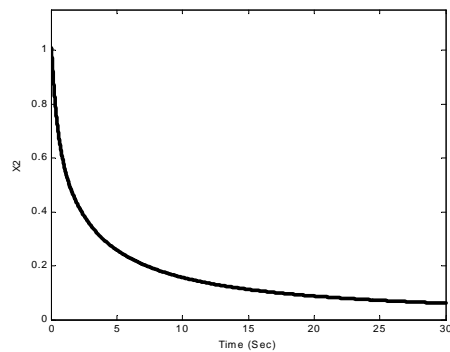
شکل ۴: تغییرات  $x_1$  پس از پایدارسازی



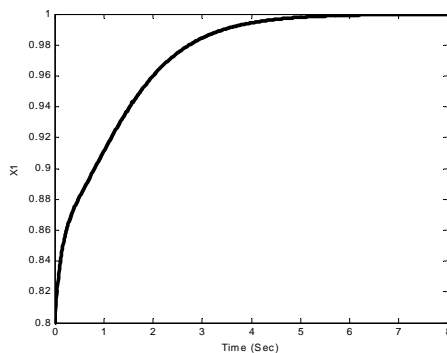
شکل ۳: تغییرات  $\eta$  قبل از پایدارسازی



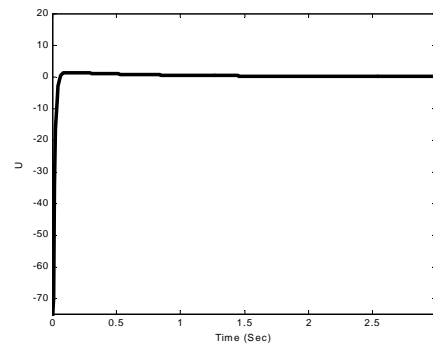
شکل ۶: تغییرات  $\eta$  پس از پایدارسازی



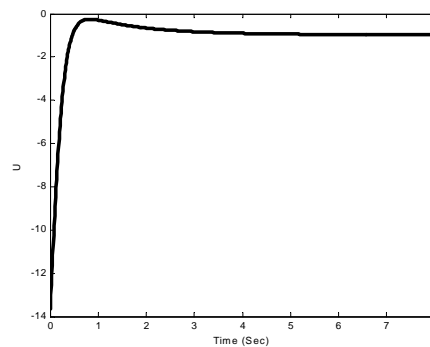
شکل ۵: تغییرات  $x_2$  پس از پایداری



شکل ۸: پاسخ سیستم به ورودی پله



شکل ۷: سیگنال کنترلی  $u$  لازم برای پایداریسازی



شکل ۹: سیگنال کنترلی  $u$  لازم برای ردیابی ورودی پله

## منابع

- [1] O. Harkegard. Flight Control Design Using Backstepping, Division of Automatic Control, 2001.
- [2] P.V. Kokotovic. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive. IEEE Control Systems Magazine, 12(3): 7-17, June 1992.
- [3] Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse. A toolkit for nonlinear feedback design. System & Control Letters, 18(2) : 83-92, February 1992.
- [4] M. Kristic, Ioannis Kanellakopoulos, and Petar Kokotovic. Nonlinear and Adaptive Control Design. John Wiley & Sons, 1995.
- [5] R. A. Freeman and Petar V. Kokotovic. Robust Nonlinear Control Design : state-Space and Lyapunov Techniques. Birkhauser, 1996.
- [6] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic. Interlaced Systems and recursive design for global Stabilization. In Proceedings of the 1997 European Control Conference, 1997.
- [7] P.V. Kokotovic. Constructive nonlinear control: Progress in the 90's. In IFAC 1999 Proceeding, Pages 49-77, 1999.
- [8] H. K. Khalil. Nonlinear Systems: 2<sup>nd</sup> Edition.