محاسبه جواب های تقریبی و غیرعددی برای معادله شکار و شکارچی لوتکا ـ ولترا و مقایسه آن با جواب های عددی

محمود سعیدی*، علی خوشکنار، موسی ایلی
گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت
saeedi@iaurasht.ac.ir

چکیده
در این مقاله می خواهیم با ارایه روشی خاص جواب های تقریبی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل لوتکا– ولترا در نزدیکی های یکی از نقاط بحرانی آن که از نوع کانون(مرکز) است به دست آوریم به طوری که ضمن برخورداری از دقت مناسب دارای خاصیت تناوبی نیز باشد.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل، نقاط بحرانی. نمودار.

۱ مقدمه

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیر خطی $\begin{cases}\dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy\end{cases}$ را که x و y توابعی از t و a، b، c و d اعداد ثابتی هستند به دستگاه معادلات لوتکا– ولترا معروف است.

فرض می کنیم شرایط اولیه به صورت $\begin{cases}x(0) = m \\ y(0) = n\end{cases}$ باشد. این دستگاه دارای دو نقطه بحرانی $(0,0)$ و $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ است که اولی یک نقطه زینی و دومی یک نقطه مرکز برای دستگاه است.([1])

همان طور که می دانیم رفتار جواب های دستگاه در نزدیکی های هر یک از این نقاط متفاوت است. به خصوص اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول دارای یک نقطه بحرانی از نوع کانون (مرکز) باشد آنگاه دستگاه دارای جواب های دوره ای (متناوب) است.([1])

ما می خواهیم جوابهای تقریبی برای دستگاه لوتکا – ولترا در نزدیکی های $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ ارایه دهیم که تا حدودی دارای این ویژگی ها باشند.

* عهده دار مکاتبات

۲ جواب های تقریبی و غیر عددی

ابتدا با استفاده از تغیر متغیر های $u = x - \frac{c}{d}$ و $v = y - \frac{a}{b}$ دستگاه لوتکا – ولترا را به دستگاه

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{-ac}{d}v - buv \\ \dot{v} = \dfrac{ad}{c}u - duv \end{cases} \qquad (۱)$$

تبدیل می کنیم. با این کار نقطه $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ از دستگاه لوتکا – ولترا به نقطه $(0,0)$ ازدستگاه (۱) تبدیل می شود. بنابراین $(0,0)$ یک نقطه بحرانی از نوع کانون برای دستگاه (۱) است.

اکنون دستگاه

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{-ac}{d}v - b\alpha uv \\ \dot{v} = \dfrac{ad}{c}u - d\alpha uv \end{cases} \qquad (۲)$$

را در نظر می گیریم که α یک عدد مثبت است. واضح است که هر چقدر α به عدد یک نزدیکتر باشد جوابهای دستگاه (۲) نیز به جواب های دستگاه (۱) نزدیکتر خواهند شد.

اکنون جوابهای دستگاه (۲) را به صورت $\begin{cases} u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\alpha^n \\ v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\alpha^n \end{cases}$ در نظر می گیریم و فرض می کنیم $u_0(0) = m - \frac{c}{d}$، $v_0(0) = n - \frac{a}{b}$ و برای هر $n \geq 1$، $u_n(0) = 0 = v_n(0)$.

در این صورت با جایگذاری در دستگاه (۲) داریم که

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{u}_n(t)\alpha^n = \dfrac{-bc}{d}\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\alpha^n - b\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k(t)v_{n-k}(t)\right)\alpha^{n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \dot{v}_n(t)\alpha^n = \dfrac{ad}{b}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\alpha^n + d\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k(t)v_{n-k}(t)\right)\alpha^{n+1} \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \dot{u}_0(t) = \dfrac{-bc}{d}v_0(t) \\ \dot{v}_0(t) = \dfrac{ad}{b}u_0(t) \end{cases}$$

و برای هر $n \geq 0$،

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1}(t) = \dfrac{-bc}{d} v_{n+1}(t) - b\sum_{k=0}^{n} u_k(t) v_{n-k}(t) \\ \dot{v}_{n+1}(t) = \dfrac{ad}{b} u_{n+1}(t) + d\sum_{k=0}^{n} u_k(t) v_{n-k}(t) \end{cases}$$

با توجه به شرایط اولیه،

$$\begin{cases} u_0(t) = (m - \dfrac{c}{d})\cos(\sqrt{ac}t) - \dfrac{b}{d}\sqrt{\dfrac{a}{c}}(n - \dfrac{a}{b})\sin(\sqrt{ac}t) \\ v_0(t) = (n - \dfrac{a}{b})\cos(\sqrt{ac}t) + \dfrac{d}{b}\sqrt{\dfrac{c}{a}}(m - \dfrac{c}{d})\sin(\sqrt{ac}t) \end{cases}$$

و برای هر $n \geq 0$،

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = \dfrac{b}{\sqrt{ac}}\left[\cos(\sqrt{ac}t)\int_0^t \sin(\sqrt{ac}s)(cf_n(s) + \dot{f}_n(s))ds - \sin(\sqrt{ac}t)\int_0^t \cos(\sqrt{ac}s)(cf_n(s) + \dot{f}_n(s))ds\right] \\ v_{n+1}(t) = \dfrac{d}{\sqrt{ac}}\left[\cos(\sqrt{ac}t)\int_0^t \sin(\sqrt{ac}s)(af_n(s) - \dot{f}_n(s))ds - \sin(\sqrt{ac}t)\int_0^t \cos(\sqrt{ac}s)(af_n(s) - \dot{f}_n(s))ds\right] \end{cases}$$

که $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t) v_{n-k}(t)$ این فرمول ها u و v را مشخص می کنند.

در نتیجه جواب تقریبی دستگاه لوتکا – ولتر به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c}{d} + u_0(t) + u_1(t)\alpha + u_2(t)\alpha^2 + \dots \\ y(t) = \dfrac{a}{b} + v_0(t) + v_1(t)\alpha + v_2(t)\alpha^2 + .. \end{cases}$$

اگر از تقریب

$$\begin{cases} x(t) \approx \dfrac{c}{d} + u_0(t) + u_1(t)\alpha \\ y(t) \approx \dfrac{a}{b} + v_0(t) + v_1(t)\alpha \end{cases}$$

برای جواب های دستگاه لوتکا-ولترا استفاده کنیم آنگاه با تعیین توابع سمت راست داریم که

$$\frac{c}{d} + u_0(t + \frac{\pi}{\sqrt{ac}}) + u_1(t + \frac{\pi}{\sqrt{ac}})\alpha = \frac{c}{d} + u_0(t) + u_1(t)\alpha$$

و

$$\frac{c}{d} + v_0(t + \frac{\pi}{\sqrt{ac}}) + v_1(t + \frac{\pi}{\sqrt{ac}})\alpha = \frac{c}{d} + v_0(t) + v_1(t)\alpha$$

بنابراین، این توابع متناوب هستند.

برای محاسبه توابع $x(t)$ و $y(t)$ از نرم افزار maple استفاده می کنیم.

```
> a0:=a;
> b0:=b;
> c0:=c;
> d0:=d;
> m0:=m;
> n0:=n;
> alpha0:=alpha;
> u0:=(m0-c0/d0)*cos((a0*c0)^(1/2)*t)-(b0/d0)*(c0/a0)^(1/2)*(n0-a0/b0)*sin((a0*c0)^(1/2)*t);
> v0:=(n0- a0/b0)*cos((a0*c0)^(1/2)*t)+ (d0/b0)*(a0/c0)^(1/2)*(m0-c0/d0)*sin((a0*c0)^(1/2)*t);
>u1:=(b0/(a0*c0)^(1/2))*(cos((a0*c0)^(1/2)*t)*int(sin((a0*c0)^(1/2)*t)*(c0*u0*v0+diff(u0*v0,t)),t=0..t)-sin((a0*c0)^(1/2)*t)*int(cos((a0*c0)^(1/2)*t)*(c0*u0*v0+diff(u0*v0,t)),t=0..t));
>v1:=(d0/(a0*c0)^(1/2))*(cos((a0*c0)^(1/2)*t)*int(sin((a0*c0)^(1/2)*t)*(a0*u0*v0-diff(u0*v0,t)),t=0..t)-sin((a0*c0)^(1/2)*t)*int(cos((a0*c0)^(1/2)*t)*(a0*u0*v0-diff(u0*v0,t)),t=0..t));
> x(t):=c/d+u0+u1*alpha;
> y(t):=a/b+v0+v1*alpha;
```

اکنون برای مشخص کردن دقت جواب های تقریبی چند مثالهای عددی در نظر می گیریم. در این مثال ها ابتدا نمودار جواب های تقریبی رسم شده تا وضعیت تناوبی آنها به خوبی دیده شود، سپس مقادیر جواب های تقریبی با مقادیر عددی به دست آمده از روش رونگ_کوتا مرتبه ۴ با گام h=.1 به ازای t های مختلف مقایسه شده است و همچنین برای مشخص کردن دقت جواب های تقریبی توسط نمودارها، توابع

$$e_x(t) = \dot{x}(t) - ax(t) + bx(t)y(t)$$

$$e_y(t) = \dot{y}(t) + cy(t) - dx(t)y(t)$$

را نیز رسم نموده ایم. بدیهی است که هر چه این توابع به صفر نزدیکتر باشند، جواب های تقریبی از دقت بیشتری برخوردارند.برای محاسبه این توابع و رسم نمودارها از نرم افزار maple استفاده شده است.

۳ مثال های عددی

مثال ۳-۱

اگر دستگاه لوتکا- ولترا $\begin{cases} \dot{x} = 1.3x - 0.11xy \\ \dot{y} = -1.2y + 0.12xy \end{cases}$ را با شرایط اولیه $\begin{cases} x(0) = 10 \\ y(0) = 11 \end{cases}$ در نظر بگیریم. آنگاه جواب های تقریبی به صورت زیر خواهند بود.

برای $\alpha = 0.85$،

$$x(t)=10.0147+0.7347\sin(\sqrt{1.56}\,t)-0.0141\sin(\sqrt{1.56}\,t)\cos(\sqrt{1.56}\,t)-0.0294\cos^2(\sqrt{1.56}\,t)+0.0147\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$

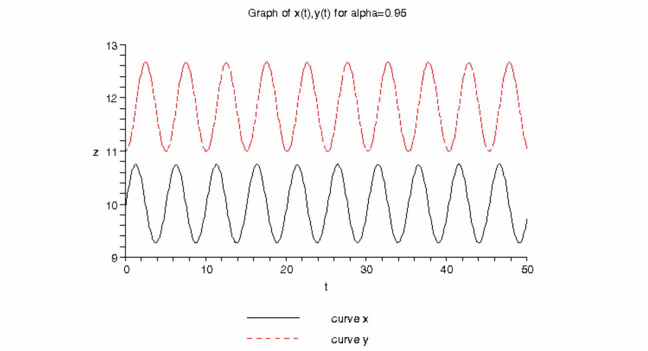
$$y(t)=11.8021-0.8342\cos(\sqrt{1.56}\,t)-0.0167\sin(\sqrt{1.56}\,t)\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$
$$+0.0321\cos^2(\sqrt{1.56}\,t)+0.0167\sin(\sqrt{1.56}\,t)$$

برای $\alpha = 0.95$،

$$x(t)=10.0164+0.7364\sin(\sqrt{1.56}\,t)-0.0158\sin(\sqrt{1.56}\,t)\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$
$$-0.0329\cos^2(\sqrt{1.56}\,t)+0.0164\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$
$$y(t)=11.8002-0.8361\cos(\sqrt{1.56}\,t)-0.0187\sin(\sqrt{1.56}\,t)\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$
$$+0.0359\cos^2(\sqrt{1.56}\,t)+0.0187\sin(\sqrt{1.56}\,t)$$

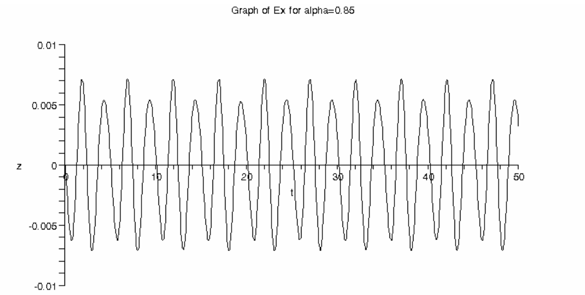
برای $\alpha = 1$،

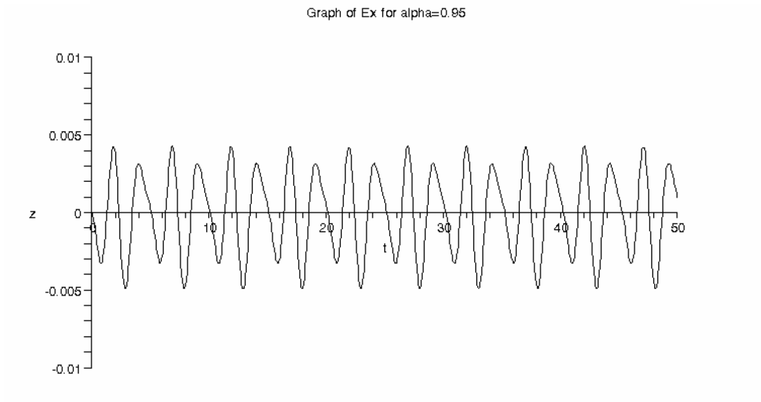
$$x(t)=10.0173+0.7372\sin(\sqrt{1.56}\,t)-0.0166\sin(\sqrt{1.56}\,t)\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$
$$-0.0346\cos^2(\sqrt{1.56}\,t)+0.0173\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$
$$y(t)=11.7993-0.8371\cos(\sqrt{1.56}\,t)-0.0197\sin(\sqrt{1.56}\,t)\cos(\sqrt{1.56}\,t)$$
$$+0.0378\cos^2(\sqrt{1.56}\,t)+0.0197\sin(\sqrt{1.56}\,t)$$

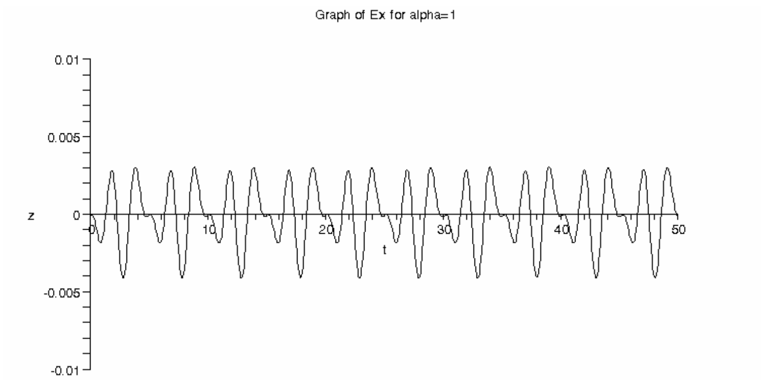


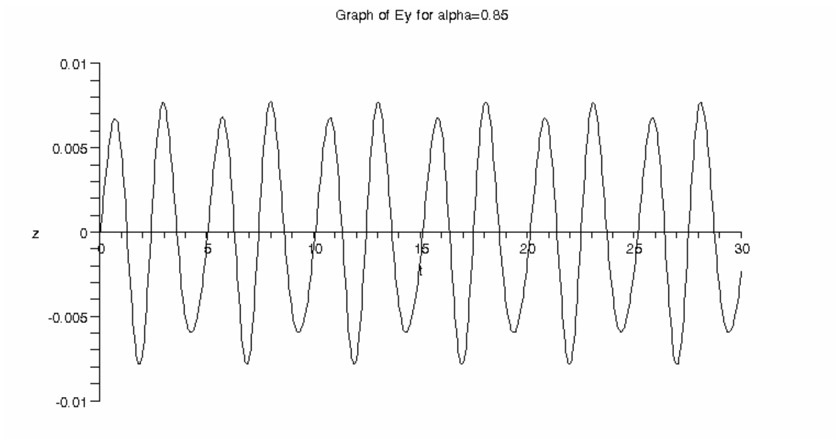
	$\alpha = 0.85$		$\alpha = 0.95$		$\alpha = 1$		Numerical solutions	
t	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**
0	**10**	**11**	**10**	**11**	**10**	**11**	**10**	**11**
2.5	**9.9849**	**12.6689**	**9.9815**	**12.6728**	**9.9798**	**12.6747**	**9.9783**	**12.6756**
5	**9.9725**	**11.0006**	**9.9725**	**11.0006**	**9.9725**	**11.0005**	**9.9706**	**11.0006**
7.5	**10.0136**	**12.6689**	**10.0103**	**12.6729**	**10.0087**	**12.6749**	**10.0092**	**12.6759**
10	**9.9451**	**11.0022**	**9.9452**	**11.0022**	**9.9452**	**11.0022**	**9.9412**	**11.0025**
12.5	**10.0423**	**12.6675**	**10.0392**	**12.6717**	**10.0376**	**12.6737**	**10.0402**	**12.6747**
15	**9.9179**	**11.005**	**9.9179**	**11.005**	**9.918**	**11.005**	**9.9121**	**11.0057**
20	**9.8908**	**11.0089**	**9.8909**	**11.0089**	**9.8909**	**11.0088**	**9.8832**	**11.0102**
30	**9.8374**	**11.02**	**9.8375**	**11.0199**	**9.8376**	**11.0198**	**9.8262**	**11.0228**
40	**9.7851**	**11.0355**	**9.7853**	**11.0352**	**9.7854**	**11.0351**	**9.7706**	**11.0403**
50	**9.7341**	**11.0551**	**9.7344**	**11.0547**	**9.7346**	**11.0545**	**9.7167**	**11.0626**

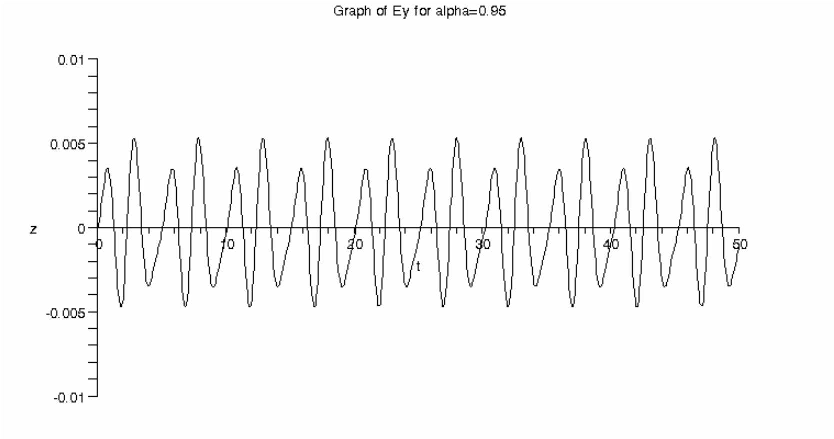
جدول ۳-۱

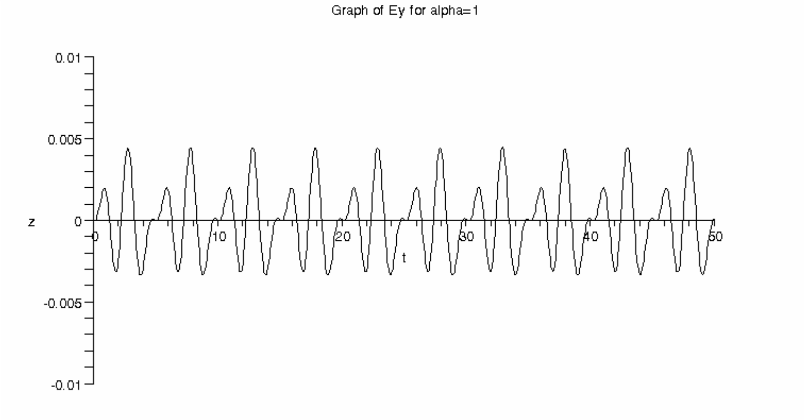

Graph of Ex for alpha=0.85
0.01
0.005
z
0
-0.005
-0.01
10
20
30
40
50
t


Graph of Ex for alpha=0.95
0.01
0.005
z
0
-0.005
-0.01
10
20
30
40
50
t


Graph of Ex for alpha=1
0.01
0.005
z
0
-0.005
-0.01
10
20
30
40
50
t


Graph of Ey for alpha=0.85
0.01
0.005
z
0
-0.005
-0.01
0
5
10
15
20
25
30
t





مثال ۳-۲

فرض می کنیم ضرایب موجود در دستگاه لوتکا- ولترا به صورت $a = 2$ ، $b = 0.2$ ، $c = 3$ و $d = 0.31$ باشند. در این صورت با توجه به شرایط اولیه $m = 10$ و $n = 10$ جواب های تقریبی به صورت زیر خواهند بود.

برای $\alpha = 0.75$،

$$x(t)=9.6747+.31989\cos(\sqrt{6}\,t)+0.0033\cos(\sqrt{6}\,t)\sin(\sqrt{6}\,t)+0.0054\cos^2(\sqrt{6}t)-0.0033\sin(\sqrt{6}\,t)$$

$$y(t)=10.0042+0.4048\sin(\sqrt{6}\,t)+0.0042\cos(\sqrt{6}\,t)+0.0034\cos(\sqrt{6}\,t)\sin(\sqrt{6}\,t)-0.0083\cos^2(\sqrt{6}t)$$

برای $\alpha = 0.85$،

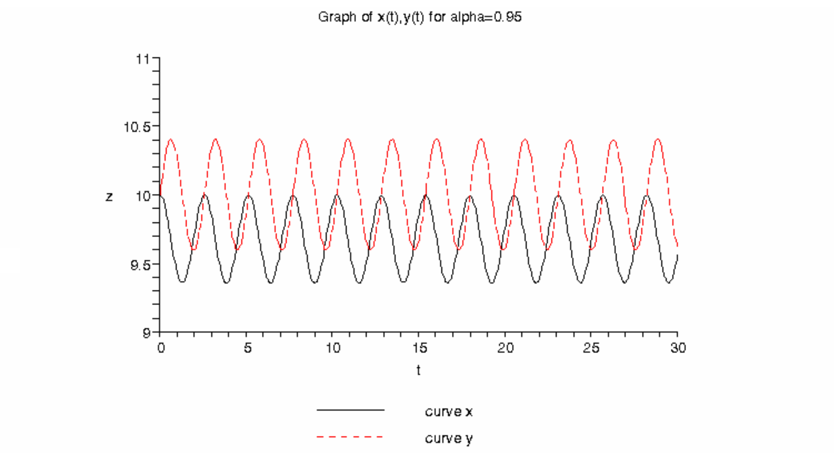
$$x(t)=9.6744+0.3195\cos(\sqrt{6}\,t)+0.0037\cos(\sqrt{6}\,t)\sin(\sqrt{6}\,t)+0.0061\cos^2(\sqrt{6}t)-0.0037\sin(\sqrt{6}\,t)$$

$$y(t)=10.0047+0.4044\sin(\sqrt{6}\,t)+0.0047\cos(\sqrt{6}\,t)+0.0039\cos(\sqrt{6}\,t)\sin(\sqrt{6}\,t)-0.0095\cos^2(\sqrt{6}t)$$

برای $\alpha = 0.95$،

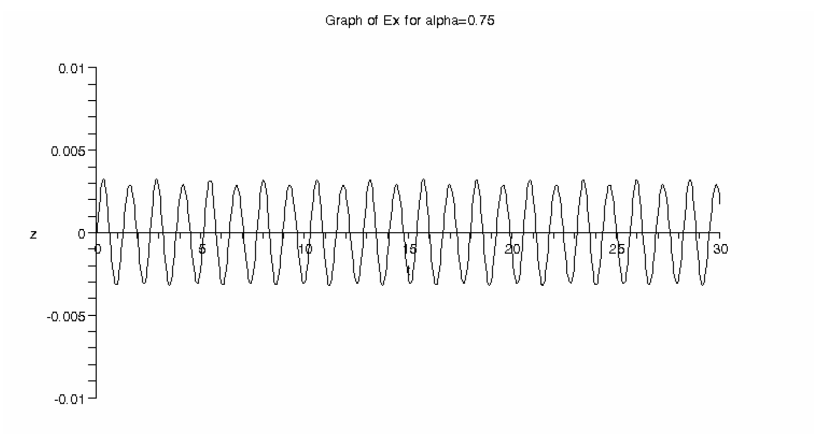
$$x(t)=9.6740+0.31918\cos(\sqrt{6}\,t)+0.0042\cos(\sqrt{6}\,t)\sin(\sqrt{6}\,t)+0.0068\cos^2(\sqrt{6}t)-0.0042\sin(\sqrt{6}\,t)$$

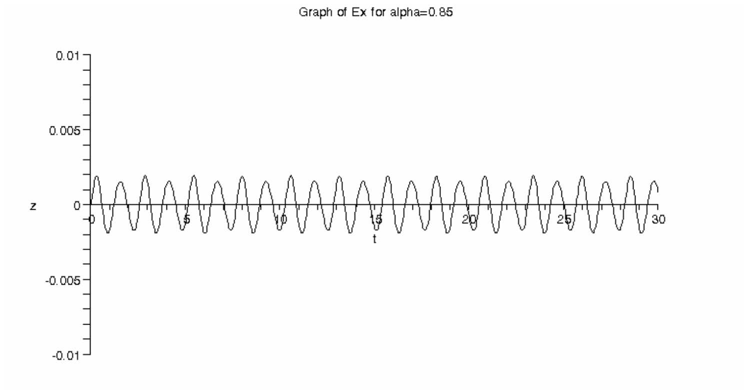
$$y(t)=10.0053+0.4039\sin(\sqrt{6}\,t)+0.0053\cos(\sqrt{6}\,t)+0.0043\cos(\sqrt{6}\,t)\sin(\sqrt{6}\,t)$$
$$-0.0106\cos^2(\sqrt{6}t)$$

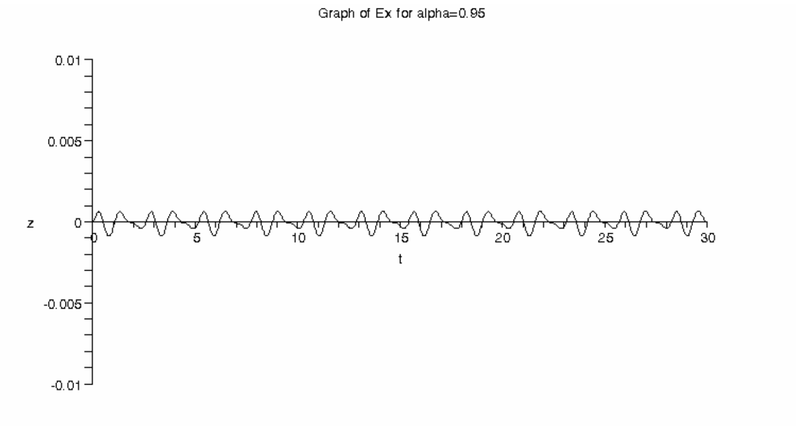


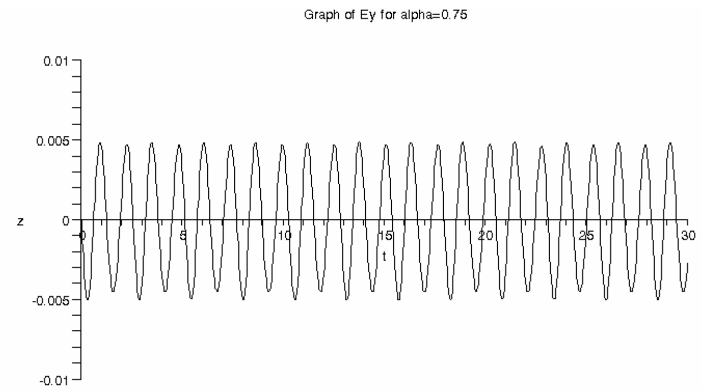
	$\alpha = 0.75$		$\alpha = 0.85$		$\alpha = 0.95$		Numerical solutions	
t	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**
0	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**
1	**9.4279**	**10.2527**	**9.4278**	**10.2517**	**9.4276**	**10.2506**	**9.4279**	**10.2502**
2	**9.7369**	**9.6062**	**9.7368**	**9.6072**	**9.7368**	**9.6082**	**9.7365**	**9.6084**
3	**9.8294**	**10.3599**	**9.8289**	**10.3602**	**9.8283**	**10.3606**	**9.8283**	**10.3606**
4	**9.3838**	**9.8466**	**9.3847**	**9.846**	**9.3856**	**9.8454**	**9.3857**	**9.846**
5	**9.9834**	**9.8727**	**9.9833**	**9.8727**	**9.9833**	**9.8728**	**9.9831**	**9.8722**
10	**9.9356**	**9.7595**	**9.9395**	**9.7598**	**9.9353**	**9.7601**	**9.9345**	**9.7591**
15	**9.862**	**9.6713**	**9.8618**	**9.672**	**9.8616**	**9.6726**	**9.8601**	**9.6717**
20	**9.7705**	**9.6164**	**9.7704**	**9.6173**	**9.7703**	**9.6182**	**9.768**	**9.6178**
25	**9.6705**	**9.5994**	**9.6706**	**9.6004**	**9.6707**	**9.6014**	**9.6679**	**9.6019**
30	**9.572**	**9.6216**	**9.5724**	**9.6224**	**9.5728**	**9.6232**	**9.5698**	**9.5698**

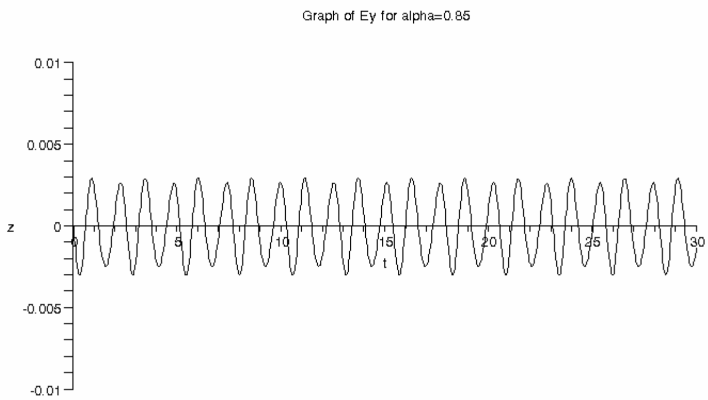
جدول ۳-۲

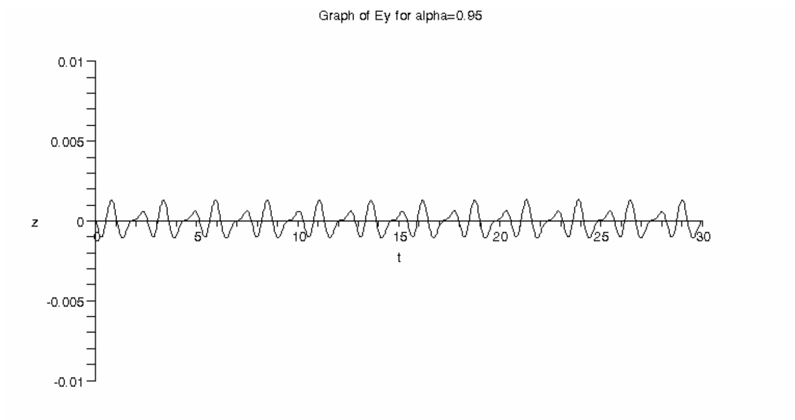



Graph of Ex for alpha=0.85
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
z
0
5
10
15
20
25
30
t


Graph of Ex for alpha=0.95
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
z
0
5
10
15
20
25
30
t


Graph of Ey for alpha=0.75
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
z
0
5
10
15
20
25
30
t


Graph of Ey for alpha=0.85
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
z
0
5
10
15
20
25
30
t



مثال ۳-۳

بـا فـرض ایـن کـه $a = 0.24$، $b = 0.001$، $c = 0.245$ و $d = 0.001$ و شـرایط اولیـه $m = 250$ و $n = 240$ باشند، جواب های تقریبی به صورت زیر خواهند بود.

برای $\alpha = 0.85$،

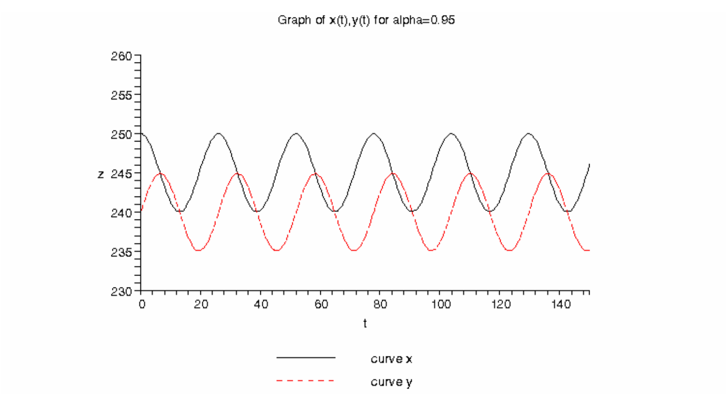
$$x(t)=244.9711+4.9711\cos(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0292\cos(\sqrt{0.0588}\,t)\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$+0.0578\cos^2(\sqrt{0.0588}\,t)-0.0292\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$y(t)=240.0289+4.9201\sin(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0286\cos(\sqrt{0.0588}\,t)\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$-0.0578\cos^2(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0289\cos(\sqrt{0.0588}\,t)$$

برای $\alpha = 0.95$،

$$x(t)=244.9677+4.9677\cos(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0326\cos(\sqrt{0.0588}\,t)\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$+0.0646\cos^2(\sqrt{0.0588}\,t)-0.0326\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$y(t)=240.0323+4.9167\sin(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0320\cos(\sqrt{0.0588}\,t)\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$-0.0646\cos^2(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0323\cos(\sqrt{0.0588}\,t)$$

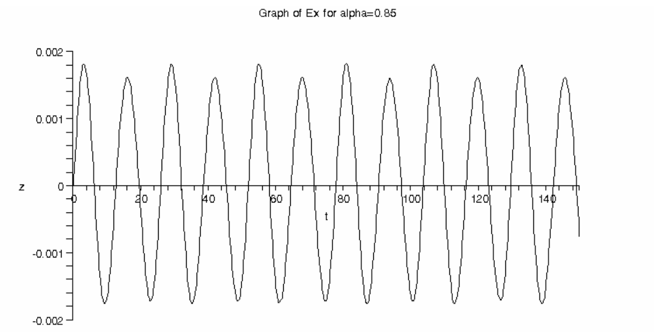
برای $\alpha = 1$،

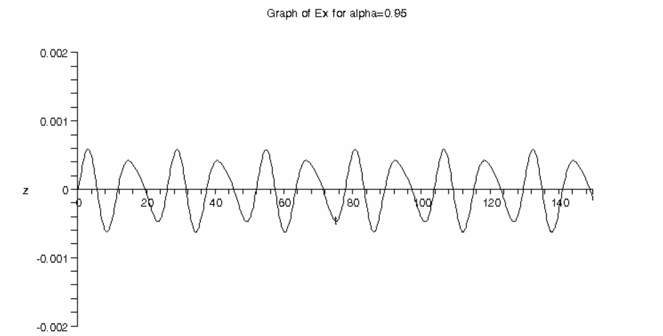
$$x(t)=244.9660+4.9660\cos(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0344\cos(\sqrt{0.0588}\,t)\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$+0.0680\cos^2(\sqrt{0.0588}\,t)-0.0344\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$y(t)=240.0340+4.9151\sin(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0337\cos(\sqrt{0.0588}\,t)\sin(\sqrt{0.0588}\,t)$$
$$-0.0680\cos^2(\sqrt{0.0588}\,t)+0.0340\cos(\sqrt{0.0588}\,t)$$

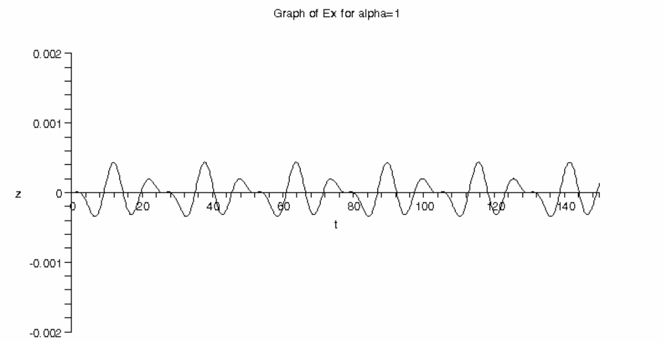


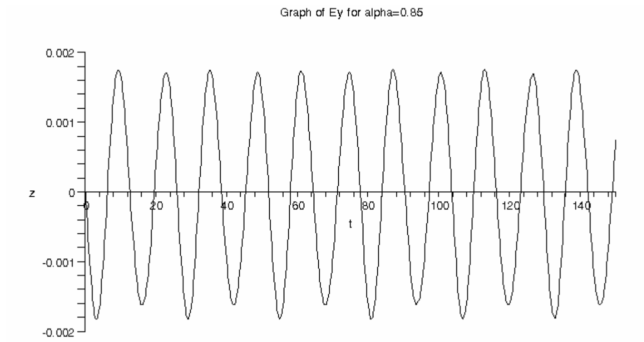
	$\alpha = 0.85$		$\alpha = 0.95$		$\alpha = 1$		Numerical solutions	
t	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**	**x(t)**	**y(t)**
0	250.0000	240.0000	250.0000	240.0000	250.0000	240.0000	250.0000	240.0000
5	246.7040	244.6489	246.6982	244.6506	246.6952	244.6514	246.6955	244.6512
10	241.2223	243.1922	241.2214	243.1853	241.2288	243.1818	241.2224	243.1821
15	240.6692	237.6304	240.6772	237.6286	240.6811	237.6277	240.6795	237.6292
20	245.6778	235.1541	245.6770	235.1608	245.6766	235.1641	245.6758	235.1631
25	249.8765	238.9174	249.8762	238.9177	249.8761	238.9178	249.8759	238.9168
30	247.6990	244.1577	247.6945	244.1597	247.6922	244.1606	247.6932	244.1600
40	240.2555	238.6203	240.2635	238.6160	240.2675	238.6138	240.2660	238.6167
50	249.5129	237.8921	249.5121	237.8932	249.5117	237.8937	249.5108	237.8917
75	248.9287	236.9736	248.9273	236.9759	248.9266	236.9770	248.9247	236.9744
100	248.1545	236.2053	248.1526	236.2090	248.1517	236.2109	248.1485	236.2079
125	247.2297	235.6227	247.2278	235.6279	247.2269	235.6306	247.2223	235.6276
150	246.2005	235.2523	246.1992	235.2586	246.1986	235.2618	246.1926	235.2595

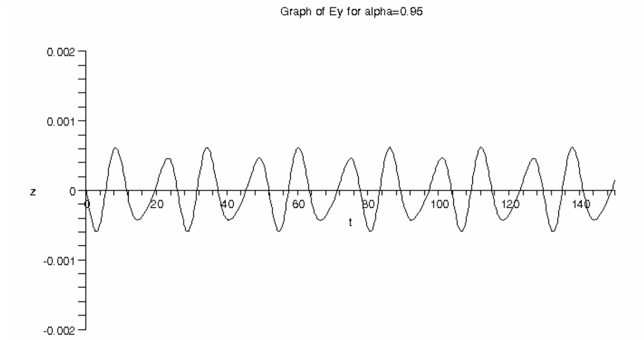
جدول ۳-۳

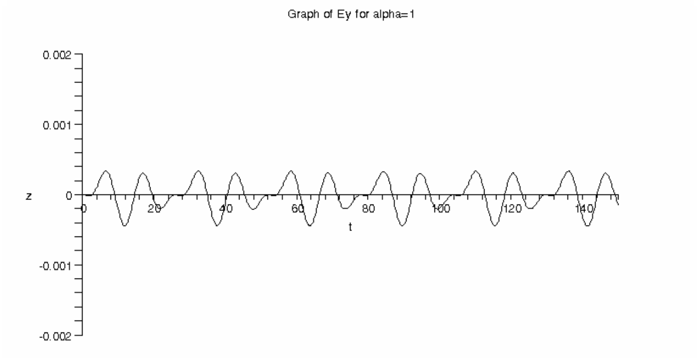












٤ نتیجه گیری

نقطه $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل لوتکا- ولترا یک نقطه بحرانی از نوع مرکز است. همان طور که دیدیم جوابهای تقریبی به دست آمده دارای خاصیت تناوبی هستند. این با نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل نیز سازگار است، زیرا اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل دارای یک نقطه بحرانی ازنوع مرکز باشد حتماً دارای جواب تناوبی است.

در مورد دقت جوابهای تقریبی گفتنی است که تنها از سه جمله اول بسط جواب های دستگاه استفاده نموده ایم و با این حال مثال های ارائه شده نشان می دهند که جوابهای تقریبی از دقت نسبتاً خوبی برخوردارند. هر چند که به دلیل محدودیت جدول و نمودارها، این دقت به ازای tهای محدود بررسی شده است ولی به ازای tهای بزرگتر از این حدود نیز تقریبها از همان دقت، به خوبی برخوردار هستند. با این اوصاف مقایسه جواب های

حاصل از این روش با جواب های حاصل از روش های به کار رفته در [۵] و [۶] نیز می تواند مؤید این مطلب باشد.

وضعیت همگرایی یا واگرایی جواب ها(سری جواب ها)، موضوع کاملاً پیچیده ای است که در این طرح به آن پرداخته نشده وتنها جنبه تقریبی جواب ها در نظر گرفته شده است. با وجود این، بررسی وضعیت همگرایی سری جوابها و همچنین تعمیم روش ارائه شده در این طرح برای دستگاه های مشابه، جهت به دست آوردن جواب های تقریبی، می تواند موضوعی برای کارهای آینده باشد.

منابع

[1] M.Braun, differential eqations and their Applications, Springer-Verlag, 1992.
[2] D.W.Jordan, P.smith, Nonlinear Ordinary differential equations, Oxford Univesity press, 1999.
[3] J.Biazar, R. Montazeri, A computational method for solution of prey and predator problem, Applied Mathematics and Computational 163 (2) (2005) 841-847.
[4] J. Biazar, M. Ilie, A. Khoshkenar, A new approach to the solution of the prey and predator problem and comparison of the results with the Adomian method, 171 (2005) 486-491.