الگوریتمی عددی برای حل یک مساله معکوس با استفاده از روش تفاضلات متناهی

عبدالله شیدفر، افشین بابایی*
تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده ریاضی
shidfar@iust.ac.ir
afshin_babaei@mathdep.iust.ac.ir

چکیده

در این مقاله یک مساله هدایت گرمایی معکوس بررسی می‌شود. در این مساله علاوه بر تابع مجهول در معادله گرما، یکی از شرایط کرانه‌ای مساله نیز مجهول است. برای حل این مساله معکوس از یک شرط اضافی در یک نقطه داخلی ناحیه مفروض مساله استفاده می‌شود. با استفاده از روش تفاضلات متناهی یک الگوریتم عددی برای حل مساله ارایه و سپس پایداری و سازگاری این روش عددی مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش انتهایی مقاله چند مثال مطرح و با استفاده از این الگوریتم، حل عددی آنها ارایه می‌شود.

کلمات کلیدی: مسایل سهموی مستقیم و معکوس، روش تفاضلات متناهی ضمنی، روش کرانک- نیکلسون، پایداری، سازگاری.

۱ مقدمه

در مسایل مربوط به معادلات با مشتقات جزیی معمولا با مساله‌ای مواجه هستیم که در آن شرایط مساله اعم از شرایط اولیه و شرایط کرانه‌ای، مشخص هستند و در معادله اصلی نیز به جز تابع اصلی معادله، مشخصه مجهول دیگری در معادله وجود ندارد. در واقع در مساله فقط یک عامل مجهول وجود دارد. این‌گونه مسایل، مسایل مستقیم نامیده می شوند.

در مقابل دسته دیگری از مسایل وجود دارند که در آنها علاوه بر عامل اصلی مجهول در معادله، مشخصه های مجهول دیگری نیز در معادله و یا در شرایط آن وجود دارند. این گونه مسایل را مسایل معکوس می نامند. در واقع در این مسایل یکی از مشخصه های تعریف کننده خود مساله، مجهول است.

یک دسته مهم از این مسایل، مساله هدایت گرمایی معکوس است که از نوع مسایل سهموی معکوس می باشد. این مساله کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف مهندسی و علوم مانند مهندسی مکانیک، مهندسی

*عهده دار مکاتبات

شیمی و فیزیک دارد. مساله سهموی معکوس به‌وسیله متخصصین و محققین زیادی مورد بررسی قرار گرفته و شیوه‌های مختلفی برای حل این مسایل ارایه شده است.۵ و۶ و۷ و۸ برای حل مساله معکوس، به تعداد مشخصه های مجهول در مساله، شرط اضافی در نظر گرفته می‌شود.

در این مقاله یک مساله سهموی معکوس مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا مدل ریاضی مساله ارایه و سپس با استفاده از روش تفاضلات متناهی الگوریتمی عددی برای حل آن مطرح می‌شود. پایداری و سازگاری الگوریتم بررسی شده و در نهایت با ارایه چند مثال کارآیی الگوریتم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲ مدل ریاضی مساله

مساله سهموی معکوس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{۱}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{۲}$$

$$u(0,t) = g(t), \quad t > 0, \tag{۳}$$

$$u(1,t) = h(t), \quad t > 0, \tag{۴}$$

که در آن $f(x)$ و $g(t)$ توابعی مفروض و شناخته شده هستند، تابع $h(t)$ و همچنین تابع $u(x,t)$ مجهولات مساله هستند. برای تعیین مقدار $u(1,t) = h(t)$، شرط اضافی

$$u(\bar{x},t) = s(t) \tag{۵}$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن $x = \bar{x}$ یک نقطه داخلی از ناحیه مفروض مساله و s(t) تابعی معلوم است.

مساله (۱) تا (۴) را در دو بازه $0 < x < \bar{x} < 1$ و $0 < \bar{x} < x < 1$ برای مقادیر $t > 0$ درنظر می‌گیریم. با این کار مساله مفروض به دو مساله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

مساله اول که در ناحیه $\{(x,t) : 0 < x < \bar{x}, t > 0\}$ تعریف می‌شود، به شکل زیر است:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < \bar{x} < 1, \quad t > 0, \tag{۶}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \bar{x}, \tag{۷}$$

$$u(0,t) = g(t), \quad t > 0, \tag{۸}$$

$$u(\bar{x},t) = s(t), \quad t > 0, \tag{۹}$$

این مساله، یک مساله مستقیم است. جواب تحلیلی این مساله در [۱] ارایه شده است. برای حل عددی این مساله می‌توان از روش تفاضل متناهی کرانک- نیکلسون[۲] استفاده کرد.

مساله دوم که در ناحیه $\{(x,t) : \bar{x} < x < 1, t > 0\}$ تعریف می‌شود، مساله معکوس زیر است:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < \bar{x} < x < 1, \quad t > 0, \tag{۱۰}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \bar{x} < x < 1, \tag{۱۱}$$

$$u(\bar{x},t) = s(t), \quad t > 0, \tag{۱۲}$$

$$u(1,t)=h(t),\quad t>0, \tag{۱۳}$$

در این مساله $h(t)$ و $u(x,t)$ توابع مجهول هستند. با حل این مساله مقادیر تابع در کران $x=1$ تعیین می شود.

۳ حل عددی مساله برای تعیین مقادیر تابع در کران $x=1$

در این بخش هدف تعیین مقادیر تابع $u(x,t)$ و همچنین تابع $u_x(x,t)$ در کران $x=1$ است. برای رسیدن به این هدف مساله (۱۰) تا (۱۳) در ناحیه $Q_1=\{(x,t):\bar{x}<x<1,0<t<T\}$ که $T>0$ یک مقدار ثابت است، به صورت عددی حل می‌شود.

ابتدا فرض کنید که در راستای مکان، بازه $[\bar{x},1]$ به P زیربازه متساوی الفاصله به طول h و در راستای زمان، بازه $[0,T]$ به M زیر بازه متساوی الفاصله به طول k تقسیم شده باشند. همچنین فرض کنید که این افرازها بوسیله مجموعه نقاط، $\{\bar{x}=x_0<x_1<\ldots<x_P=1\}$ و $\{0=t_0<t_1<\ldots<t_M=T\}$ به ترتیب در راستای مکان و زمان نشان داده شوند.

با توجه به این نمادگذاری‌ها داریم:

$$\begin{aligned} x_i&=ih,\quad i=0,\ldots,P\\ t_j&=jk,\quad j=0,\ldots,M \end{aligned} \tag{۱۴}$$

فرض کنید که $u(x_i,t_j)$ بوسیله u_{ij} نشان داده شود. با توجه به این فرض‌ها، برای حل عددی مساله (۱۰) تا (۱۳) از فرمول تفاضل متناهی ضمنی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{k}=\frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1j+1}-2u_{ij+1}+u_{i-1j+1}}{h^2}+\frac{u_{i+1j}-2u_{ij}+u_{i-1j}}{h^2}\right\} \tag{۱۵}$$

که در آن با توجه به فرض های (۵-۱۱) و (۵-۱۲) داریم:

$$\begin{aligned} u_{i0}&=f(x_i),\quad i=0,\ldots,P-1\\ u_{0j}&=s(t_j)\quad j=0,\ldots,M \end{aligned}$$

و همچنین $u_{-1j}=u(\bar{x}-h,t_j)$ با حل عددی مساله (۶) تا (۹) به‌دست می‌آید. برای حل عددی مساله (۶) تا (۹) در ناحیه $\{(x,t):0<x<\bar{x},0<t<T\}$، همان‌گونه که قبلاً ذکر شد از روش تفاضل متناهی کرانک–نیکلسون استفاده می‌شود.

فرض کنید $r=\dfrac{k}{h^2}$، در نتیجه معادله (۱۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$-ru_{i+1j+1}+(2+2r)u_{ij+1}-ru_{i-1j+1}=ru_{i+1j}+(2-2r)u_{ij}+ru_{i-1j} \tag{۱۶}$$

معادله (۱۶) به ازای $i=0,1,2,\ldots,P-1$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$AU_{j+1}+c=BU_j+d \tag{۱۷}$$

که در آن

$$U_{j+1}^t=(u_{1,j+1},u_{2,j+1},\ldots,u_{P,j+1})$$

$$U_j^t = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{P,j})$$

همچنین

$$A = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 2+2r & -r & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -r & 2+2r & -r & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2+2r & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2+2r & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -r & 2+2r & -r \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -ru_{-1,j+1} + (2+2r)u_{0,j+1} \\ -ru_{0,j+1} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و

$$B = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 2-2r & r & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ r & 2-2r & r & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 2-2r & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2-2r & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & r & 2-2r & r \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d} = \begin{pmatrix} \mathrm{ru}_{-1,\mathrm{j}} + (2-2\mathrm{r})\mathrm{u}_{0,\mathrm{j}} \\ \mathrm{ru}_{0,\mathrm{j}} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تفاوت این روش با روش کرانک- نیکلسون در اینجاست که در روش کرانک- نیکلسون ماتریس‌ها سه قطری هستند، در حالی‌که در روش بالا چون فرمول تفاضل متناهی (۱۶) به‌ازای $i = 0,$ ۱،۲،...،p-۱ در نظر گرفته شده است، ماتریس های A و B پایین مثلثی هستند.

با حل دستگاه معادلات خطی (۱۷)، M مقدار مجهول در نقاط مش در کران $x = 1$ معلوم می‌شود. حال همگرایی این روش عددی را بررسی می کنیم.

قضیه ۱

روش تفاضل متناهی (۱۶) بازای تمامی مقادیر r پایدار است.

برهان

اگر در معادله (۱۷)، $i = 0$ ،۱،۲،...، p-۱ قرار گیرد، خواهیم داشت:

$$U_{j+1} = EU_j + e \qquad (۱۸)$$

که در آن

$$E = A^{-1}B$$

عامل گسترش خطا در رابطه (۱۸) ماتریس E است. روش تفاضل متناهی (۱۶) پایدار است اگر مقادیر ویژه ماتریس E از نظر قدرمطلق از ۱ بیشتر نباشد.[۲]

تنها مقدار ویژه ماتریسE ، ۱- است. بنابراین بزرگترین مقدار در بین قدرمطلق مقادیر ویژه این ماتریس، برابر ۱ خواهد بود. از این رو روش (۱۶) بازای تمامی مقادیر r پایدار است. □

قضیه ۲

روش تفاضل متناهی (۱۶) بازای P-1 ,...,۲،۱، $i = 0$، سازگار است.

برهان

ثابت می‌کنیم که اگر U جواب دقیق مساله (۱۰) تا (۱۳) و u جواب دقیق (۱۶) باشد، آنگاه خطای گسسته‌سازی $e_{ij} = U_{ij} - u_{ij}$ وقتی که $n \to \infty$، به سمت صفر میل خواهد کرد.

قرار می دهیم $e = U - u$، با جایگذاری $u_{ij} = U_{ij} - e_{ij}$ در معادله (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} &re_{i+1j+1} - (2+2r)e_{ij+1} + re_{i-1j+1} - rU_{i+1j+1} + (2+2r)U_{ij+1} - rU_{i-1j+1} = \\ &-re_{i+1j} - (2-2r)e_{ij} - re_{i-1j} + rU_{i+1j} + (2-2r)U_{ij} + rU_{i-1j} \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با استفاده از قضیه تیلور داریم:

$$\begin{aligned} U_{i-1j+1} &= U_{ij+1} - h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{ij+1} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(x_i - \theta_1 h, t_{j+1}), \\ U_{i+1j+1} &= U_{ij+1} + h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{ij+1} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(x_i + \theta_2 h, t_{j+1}), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} U_{i-1j} &= U_{ij} - h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(x_i - \theta_3 h, t_j), \\ U_{i+1j} &= U_{ij} + h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(x_i + \theta_4 h, t_j), \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$U_{ij+1} = U(x_i, t_j + k) = U_{ij} + k\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)(x_i, t_j + \theta_5 k),$$

که $0 < \theta_i < 1$ بازای $i = 1,2,...,5$. جایگذاری نتایج بالا در معادله (۱۹) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} &re_{i+1j+1} - (2+2r)e_{ij+1} + re_{i-1j+1} + re_{i+1j} - 2re_{ij} + re_{i-1j} \\ &+2k\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)(x_i, t_j + \theta_5 k) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(x_i + \theta_6 h, t_j + \theta_7 k)\right] = -2e_{ij} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که $-1 < \theta_6 < 1$ و $0 < \theta_7 < 1$ است.

حال فرض کنید که ماکزیمم مقادیر $|e_{ij}|$ در سطح زمانی $t = jk$ برابر E_jباشد. همچنین فرض کنید که M ماکزیمم مقدار عبارت داخل براکت در معادله (۲۰)، بازای تمامی مقادیر i و j باشد.

آنگاه از معادله (۲۰) نتیجه می گیریم که:

$$(2+2r)|e_{ij+1}| - r|e_{i+1j+1}| - r|e_{i-1j+1}| + 2r|e_{ij}| - r|e_{i+1j}| - r|e_{i-1j}| \le 2|e_{ij}| + 2kM$$

چون این رابطه بازای تمامی مقادیر i برقرار است، بنابراین بازای $\max|e_{ij}|$ نیز درست خواهد بود. از این رو نتیجه می گیریم:

$$2E_{j+1} \le 2E_j + 2kM$$

بنابراین

$$E_{j+1} \le E_0 + jkM \tag{۲۱}$$

مقادیر اولیه u و U یکسان است، از این رو $E_0 = 0$. اگر h به سمت صفر میل کند، آنگاه k نیز به سمت صفر میل می‌کند و M نیز به سمت $\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{ij}$ میل می‌کند. چون طبق فرض U یک جواب معادله (۱۰) است، بنابراین از معادله (۲۱) نتیجه می‌شود که E_j صفر است. این نتیجه حکم قضیه را ثابت می‌کند.□

قضیه ۳

روش تفاضل متناهی (۱۶) بازای $i = 0,1,2,\ldots,P-1$ برای تعیین مقادیر گره‌ای در کران $x=1$، بازای تمامی مقادیر r همگرا است.

برهان

این قضیه نتیجه قضایای قبلی می باشد.

با استفاده از قضیه تیلور برای توابع دو متغیره و اعمال آن بر تابع $u(x,t)$ در نقطه مفروض $(1,t_j)$ فرمول تقریبی زیر به‌دست می‌آید:

$$u_x(1,t_j) = \frac{1}{h}\left(u_{Pj} - u_{(P-1)j}\right) + \frac{h}{2k}\left(u_{Pj+1} - u_{Pj}\right)$$
$$-\frac{h}{6k}\left(u_{Pj+1} - u_{(P-1)j+1} - u_{Pj} + u_{(P-1)j}\right) + O(h^4) \tag{۲۲}$$

از این فرمول تقریبی برای تعیین مقادیر $u_x(x,t)$ در کران $x=1$، استفاده می‌کنیم.

٤ حل چند مثال

مثال ٤-۱

در این مثال مساله زیر بررسی می‌شود:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = x^2, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,t) = 2t, \quad t > 0,$$
$$u(\overline{x},t) = 2t + \overline{x}^2, \quad t > 0,$$

برای تعیین مقادیر $u(x,t)$ درکران $x=1$ از فرمول تفاضل متناهی (۱۶) و برای تعیین مقادیر $u_x(x,t)$ از رابطه تقریبی (۲۲) استفاده می‌کنیم. برای به‌دست آوردن نتایج عددی حاصل از الگوریتم، از نرم‌افزار ریاضی *mathematica* استفاده شده است. نتایج برای این مثال در جدول (۱) آورده شده است.

مثال ٤-۲

در این مثال مساله زیر را بررسی می کنیم

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \cos(x), \quad 0 < x < 1,\\
&u(0,t) = \exp(-t), \quad t > 0,\\
&u(\bar{x},t) = \exp(-t)\cos(\bar{x}), \quad t > 0,
\end{aligned}
$$

مشابه مثال قبل، از روش تفاضل متناهی (۱۶) و فرمول تقریبی(۲۲)برای تعیین مقادیر $u(x,t)$ و $u_x(x,t)$ استفاده می‌کنیم. نتایج حاصل در جدول (۲) ارایه شده است.

	جواب عددی		جواب دقیق	
	$u(1,t)$	$u_x(1,t)$	$u(1,t)$	$u_x(1,t)$
$t=$ ۱	۳	۲	۳	۲
$t=$ ۲	۵	۲	۵	۲
$t=$ ٤	۹	۲	۹	۲
$t=$ ٦	۱۳	۲	۱۳	۲
$t=$ ۸	۱۷	۲	۱۷	۲
$t=$ ۱۰	۲۱	۲	۲۱	۲

جدول ۱: مقادیر $u(1,t)$ و $u_x(1,t)$ به کمک روش ارایه شده با فرض $k=$ ۰/۵ و $r=$ ۵۰ و $\bar{x}=$ ۰/۴

	جواب عددی		جواب دقیق	
	$u(1,t)$	$u_x(1,t)$	$u(1,t)$	$u_x(1,t)$
$t=$ ۰/۵	۰/۳۲۷۷۰۹	−۰/۵۰۹۵۳۵	۰/۳۲۷۷۱	−۰/۵۱۰۳۷۸
$t=$ ۱	۰/۱۹۸۷۶۸	−۰/۳۰۹۰۳۲	۰/۱۹۸۷۶۶	−۰/۳۰۹۵۶
$t=$ ۱/۵	۰/۱۲۰۵۵۲	−۰/۱۸۷۴۸۲	۰/۱۲۰۵۵۸	−۰/۱۸۷۷۵۸
$t=$ ۲	۰/۰۷۳۱۳۲۱	−۰/۱۱۳۶۱۹	۰/۰۷۳۱۲۲	−۰/۱۱۳۸۸۱
$t=$ ۲/۵	۰/۰۴۴۳۳۳۱	−۰/۰۶۹۰۸۸	۰/۰۴۴۳۵۰۷	−۰/۰۶۹۰۷۲۱

جدول ۲: مقادیر $u(1,t)$ و $u_x(1,t)$ با استفاده از روش ارایه شده با فرض $k=$ ۰/۱ و $r=$ ۱۰ و $\bar{x}=$ ۰/۵

۵ نتیجه‌گیری

دراین مقاله یک مساله سهموی معکوس موردبررسی قرار گرفت. در این مساله معکوس یکی از شرایط کرانه‌ای معادله سهموی موردنظر مجهول بود که برای تعیین آن یک شرط اضافی مناسب در نظرگرفته شد. برای حل عددی مساله یک الگوریتم عددی براساس روش تفاضلات متناهی مطرح شد. مقایسه نتایج عددی ارایه شده با جواب دقیق نشان‌دهنده دقت مطلوب این روش عددی است. به خوانندگان علاقه‌مند، بررسی این مساله برای معادلات با مشتقات جزیی در بعد دو و ابعاد بالاتر و همچنین حل مساله برای معادلات غیرهمگن متناظر، پیشنهاد می‌شود.

منابع

[1] Cannon, J.R., “The One-Dimensional Heat Equation”, Addison Wesley, Reading, MA, (1984).
[2] Smith, G.D., “Numerical Solution of Partial Differential Equations”, Clarendon Press, Oxford, (1978).
[3] Beck, J.V., Blackwell, B., St-Clair, C.R., “Inverse Heat Conduction Ill-Posed Problems”, John Wiley Int Sc, (1985).
[4] Burden, R.L., Faires, J.D., “Numerical Analysis” Sixth Edition, Brooks/ Cole Publishing Company, (1997).
[5] Cannon J.R., Duchateau P., “An inverse problem for a nonlinear diffusion equation”, SIAM J. Appl. Math. 39 (2), pp. 272–289 (1980).
[6] Shidfar, A., Azary, H., “An Inverse Problem for A Nonlinear Diffusion Equation”, Nonlinear Analysis, Theory Meth. Appl. 28 (4), pp. 589– 593 (1997).
[7] Shidfar, A., Pourgholi, R., “Application Of Finite Difference Method To Analysis An Ill-Posed Problem”, Applied Mathematics and Computation 168, pp. 1400–1408 (2005).
[8] Shidfar, A., Damirchi, J., Reihani, P., “An Stable Numerical Algorithm For Identifying The Solution Of An Inverse Problem”, Applied Mathematics And Computation190, pp. 231–236 (2007).
[۹] شیدفر، ع.، "ریاضیات عالی مهندسی"، انتشارات دالفک، تهران (۱۳۸۳).