

تصمیم‌گیری گروهی به کمک TOPSIS فازی*

صابر ساعتی^{۱*}، عادل حاتمی ماریینی^۲، احمد ماکوئی^۳

^۱ گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران-شمال

^۲ گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران-جنوب

^۳ گروه مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

چکیده

امروزه در دنیای واقعی بسیاری از فاکتورهای کمی و کیفی همچون کیفیت، قیمت، انعطاف‌پذیری و عملکرد تحویل می‌بایستی برای تصمیم‌گیری‌ها مورد توجه قرار گیرد. بدین منظور می‌توان برای تعیین نرخ‌ها و وزن‌ها از متغیرهای گفتاری استفاده نموده و آنها را به صورت اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای بیان نمود. بنابراین هدف از این مقاله توسعه روش TOPSIS در مسایل تصمیم‌گیری با داده‌های فازی می‌باشد تا تیم تصمیم‌گیری در محیطی از معیارهای مبهم و گنگ، توانایی انتخاب گزینه مناسب را به دست آورد. بر اساس مفهوم تکنیک TOPSIS در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره گروهی، شاخص ضریب نزدیکی بوسیله محاسبه فاصله از حل ایده‌آل فازی و حل ضد-ایده‌آل فازی توسط رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی به صورت همزمان برای هر گزینه تعریف گردیده تا بدین وسیله تمام گزینه‌ها رتبه‌بندی گردند. در نهایت، یک مثال عددی برای بیشتر روشن شدن روش پیشنهادی آورده شده است.

کلمات کلیدی: تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره فازی، متغیرهای گفتاری، رتبه‌بندی اعداد فازی، TOPSIS.

۱ مقدمه

تصمیم‌گیری چند معیاره یکی از حوزه‌های تحقیق در عملیات و علوم مدیریت بوده که در طول دهه اخیر با توجه به نیازمندی‌های کاربردی گوناگون به سرعت توسعه یافته است. با کمک کامپیوترها تکنیک‌های تصمیم‌گیری در تمام حوزه‌های فرایند تصمیم‌گیری بسیار قابل قبول گردیده‌اند. به طور خاص در چند سال اخیر، استفاده از کامپیوتر بسیار افزایش یافته است، بنابراین کاربرد روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره برای استفاده کنندگان با توجه به پیچیدگی‌های ریاضی در اجرا بسیار آسان گردیده است.

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی با همین عنوان می‌باشد که با حمایت مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال اجرا شده است.
عهده‌دار مکاتبات: ssaatim@yahoo.com

تصمیم‌گیری رویه‌ای برای پیدا کردن بهترین گزینه از میان مجموعه‌ای از گزینه‌های موجود می‌باشد. زمانی که در مسایل تصمیم‌گیری چندین معیار را در نظر می‌گیریم مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره (MCDM) نامیده می‌شوند [۱۵-۱]. یک مساله تصمیم‌گیری با m گزینه و n معیار می‌تواند در ماتریسی به صورت زیر بیان گردد:

$$G = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \dots & G_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad W = [W_1, W_2, \dots, W_n]$$

که A_1, A_2, \dots, A_m گزینه‌ها و C_1, C_2, \dots, C_n معیارهای ارزیابی، G_{ij} نرخ ارزیابی گزینه A_i تحت معیار C_j بوده، و W_j وزن معیار C_j می‌باشد.

مسایل MCDM به دو نوع از مسایل می‌تواند تقسیم شوند. یکی از آنها مسایل MCDM کلاسیک [۱] است، که در آنها نرخ‌ها و اوزان معیارها به صورت قطعی اندازه‌گیری می‌شود. دیگری مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره فازی (FMCDM) [۲-۱۵] می‌باشد، که در آنها نرخ‌ها و اوزان به صورت غیرقطعی، گنگ و مبهم ارزیابی شده و معمولاً به صورت متغیرهای گفتاری و به تبع آن اعداد فازی بیان می‌گردند [۱۶-۱۸]. تکنیک TOPSIS یکی از تکنیک‌های معروف برای MCDM کلاسیک می‌باشد که اولین بار توسط Hwang و Yoon [۱] معرفی گردید. منطق اصولی TOPSIS تعریف حل ایده‌آل و ضد ایده‌آل می‌باشد. حل ایده‌آل حلی است که معیارهای سود را ماکزیمم و معیارهای هزینه را مینیمم می‌نماید. به طور خلاصه، حل ایده‌آل شامل تمام بهترین مقادیر معیارهای در دسترس می‌باشد در حالی که حل ضد ایده‌آل ترکیبی از بدترین مقادیر معیارهای در دسترس می‌باشد. گزینه بهینه، گزینه‌ای است که کوتاهترین فاصله از حل ایده‌آل و بیشترین فاصله را از حل ضد ایده‌آل دارد.

نظر به اینکه TOPSIS روشی معروف برای مسایل MCDM کلاسیک می‌باشد، خیلی از محققان از آن برای حل مسایل FMCDM استفاده می‌کنند. عده‌ای از محققان [۱۳] نرخ‌ها و اوزان فازی را به مقادیر قطعی فازی زدایی نموده‌اند، در حالیکه فازی زدایی باعث از دست دادن مقداری از اطلاعات می‌گردد. دیگران، چون Raj, Liang, Chen و Kumar [۴، ۱۰ و ۱۲] فرض نموده‌اند که می‌بایست TOPSIS در محیط فازی تعمیم یابد. این روش‌ها می‌تواند کمبود اطلاعات فازی را تنزیل نماید، اما مشکلات عدیده‌ای در کارهای آنها مشاهده شده است.

در این مقاله، نرخ‌ها و وزن‌های معیارها در مساله توسط متغیرهای گفتاری بیان می‌گردد و سپس با استفاده از توسعه روش TOPSIS در محیط فازی، به حل مساله انتخاب گزینه مناسب برای مساله تصمیم‌گیری پرداخته می‌شود. بر اساس مفاهیم TOPSIS در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره، حل ایده‌آل فازی و حل ضد-

ایده آل فازی را تعریف کرده، و سپس با توجه به رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی فاصله بین دو عدد فازی را محاسبه می‌نماییم. با استفاده از این روش، فاصله هر گزینه را از حل ایده آل فازی و حل ضد ایده آل فازی محاسبه کرده و در نهایت، شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه محاسبه می‌گردد تا بر اساس آن رتبه‌بندی گزینه‌ها مشخص گردد. مقادیر بالاتر ضریب نزدیکی به معنای نزدیکی بیشتر به حل ایده آل فازی و دوری بیشتر از حل ضد ایده آل فازی می‌باشد.

در ادامه این مقاله، ابتدا تعاریف اساسی بیان می‌گردد. در بخش دوم، روش تصمیم‌گیری TOPSIS فازی برای حل انتخاب گزینه مناسب برای مساله تصمیم‌گیری معرفی می‌شود و سپس روش پیشنهاد شده با یک مثال توضیح داده می‌شود. در نهایت، مقاله با یک نتیجه‌گیری به اتمام خواهد رسید.

۲ تعاریف اولیه

در این بخش تعدادی از تعاریف مجموعه‌های فازی ارائه می‌شود [۱۶-۱۸].

تعریف ۱ اگر X یک مجموعه از اشیاء باشد آنگاه یک مجموعه فازی \tilde{A} در X یک مجموعه از زوجهای مرتب به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\} \quad (1)$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت x در \tilde{A} نامیده می‌شود، که متناظر با هر عنصر x در X یک عدد حقیقی در فاصله $[0, 1]$ اختیار می‌کند.

تعریف ۲ عدد فازی \tilde{M} از نوع LR گفته می‌شود اگر و تنها اگر:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{m-l}\right) & l \leq x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{u-m}\right) & m < x \leq u \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (2)$$

و با $\tilde{M} = (l, m, u)_{LR}$ نشان می‌دهند که L و R دو تابع دلخواه می‌باشند.

تعریف ۳ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای \tilde{M} نوع خاصی از اعداد LR است که به صورت (M_1, M_2, M_3, M_4) نمایش داده می‌شود. تابع عضویت این نوع اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{x - M_1}{M_2 - M_1} & M_1 \leq x < M_2 \\ 1 & M_2 \leq x < M_3 \\ \frac{x - M_4}{M_3 - M_4} & M_3 \leq x < M_4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (3)$$

هرگاه در یک عدد فازی ذوزنقه‌ای $M_2 = M_3$ ، آنگاه \tilde{M} یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود. عدد غیر فازی r را می‌توان به صورت (r, r, r, r) بیان نمود.

بر اساس اصول بیان شده در مجموعه‌های فازی، جمع و تفریق هر دو عدد فازی ذوزنقه‌ای نیز یک عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشد، اما ضرب هر دو عدد فازی تنها تخمینی از یک عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشد. دو عدد فازی ذوزنقه‌ای مثبت $\tilde{M} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ و $\tilde{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)$ و یک عدد حقیقی r را در نظر بگیرید، عملیات اصلی روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای \tilde{M} و \tilde{N} به صورت زیر می‌باشد:

$$-\tilde{N} = (-N_4, -N_3, -N_2, -N_1) \quad (4)$$

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = [M_1 + N_1, M_2 + N_2, M_3 + N_3, M_4 + N_4]$$

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = [M_1 - N_4, M_2 - N_3, M_3 - N_2, M_4 - N_1]$$

$$\tilde{M} \otimes r = [M_1 r, M_2 r, M_3 r, M_4 r]$$

اگر $\tilde{M} > 0$ و $\tilde{N} > 0$ آنگاه:

$$\tilde{M} \otimes \tilde{N} \cong [M_1 N_1, M_2 N_2, M_3 N_3, M_4 N_4]$$

تعریف ۴ برای یک عدد فازی \tilde{M} ، مجموعه α -برش عدد فازی \tilde{M} بازاء $\alpha \in [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$[\tilde{M}]_\alpha = \{x \in R \mid \mu_{\tilde{M}}(x) \geq \alpha\} \quad (5)$$

برای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ ، فواصل حاصل شده توسط مجموعه α -برش‌ها را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$A(\alpha) = [a(\alpha), c(\alpha)] = [(b - a)\alpha + a, (c - d)\alpha + d] \quad (6)$$

روش های متعددی برای رتبه بندی اعداد فازی در ادبیات موضوع وجود دارد. مقالات [۱۹-۲۱] مروری جامع از روش های موجود می باشد. عده ای از این روش ها با استفاده از مفهوم مقدار میانی و بعضی دیگر اعداد فازی را با مفهوم مجموعه های α -برش، مقایسه می نمایند، علاوه بر آنها تعدادی روش های رتبه بندی امکان اعداد فازی وجود دارد. روش دیگر رتبه بندی فازی که تمرکز ما در این مقاله براساس آن می باشد، رتبه بندی بر اساس فاصله نام دارد [۲۲-۲۴]. Saade و Schwarzlander [۲۲] با استفاده از مفهوم فاصله به مقایسه اعداد فازی پرداخته اند. آنها برای مرتب کردن اعداد فازی تنها از مقادیر غیر منفی استفاده نموده اند. Wu و Yao [۲۴] فاصله d^* را طوری روی R لحاظ نموده اند که $d^*(a, \circ) = a$ و $d^*(a, b) = a - b$ برای تمام $a, b \in R$. آنگاه برای $\tilde{A}, \tilde{B} \in H(R)$ (خانواده اعداد فازی روی R)، فاصله را به صورت زیر تعریف می نمایند:

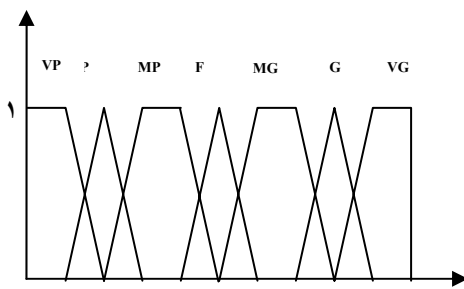
$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2} \int_0^1 ([\tilde{A}]_{\alpha}^L + [\tilde{A}]_{\alpha}^U - [\tilde{B}]_{\alpha}^L - [\tilde{B}]_{\alpha}^U) d\alpha \quad (7)$$

که $[\tilde{A}]_{\alpha}^L, [\tilde{A}]_{\alpha}^U, [\tilde{B}]_{\alpha}^L$ و $[\tilde{B}]_{\alpha}^U$ به ترتیب نشان دهنده حد پایین و بالا اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} می باشند. بر اساس رابطه (۷) آنها ثابت کرده اند که سیستم رتبه بندی روی $H(R)$ به صورت زیر تعریف می گردد:

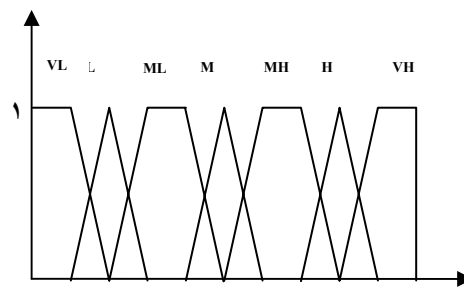
$$\tilde{B} < \tilde{A} \text{ if } d(\tilde{A}, \tilde{B}) > 0, \quad \tilde{B} > \tilde{A} \text{ if } d(\tilde{A}, \tilde{B}) < 0, \quad \tilde{B} \approx \tilde{A} \text{ if } d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0 \quad (8)$$

۳ الگوریتم TOPSIS فازی پیشنهادی

هدف روش TOPSIS فازی پیشنهاد شده در این مقاله رتبه بندی گزینه های موجود با توجه به معیارهای مورد نظر در محیطی فازی و نادقیق می باشد. در این مقاله، متغیرهای گفتاری برای اهمیت وزن های فاکتورها به صورت خیلی زیاد (VH)، زیاد (H)، تا حدودی زیاد (MH)، بی تفاوت (M)، تا حدودی کم (ML)، کم (L) و خیلی کم (VL) بوده و همچنین متغیرهای گفتاری برای نرخ های معیارهای هر گزینه به صورت خیلی خوب (VG)، خوب (G)، تا حدودی خوب (MG)، بی تفاوت (F)، تا حدودی ضعیف (MP)، ضعیف (P) و خیلی ضعیف (VP) می باشد [۲۵]. در میان انواع گوناگون اعداد فازی، اعداد فازی ذوزنقه ای از کاربرد بیشتری برخوردار هستند. بدین منظور داده های مورد نیاز روش پیشنهادی را به صورت ذوزنقه ای فرض نموده ایم. دسته بندی این متغیرها در این مقاله، به صورت شکل های ۱ و ۲ در نظر گرفته شده است.



شکل ۲: متغیرهای گفتاری برای نرخ های معیارهای هر گزینه



شکل ۱: متغیرهای گفتاری برای اهمیت وزن هر معیار

در مسایل واقعی پیرامون ما، مسایل تصمیم گیری اکثراً مسایل تصمیم گیری چند معیاره گروهی می باشد. بنابراین، در ابتدا یک تیم خبره با K تصمیم گیرنده که آشنا با عملیات و ماموریت های سازمان هستند، تشکیل می دهیم و این مجموعه از افراد را E_k می نامیم. فرض کنید، n زیر فاکتور روی مساله تصمیم گیری موثر هستند، به دست آمده و این مجموعه از معیارها را C_j بنامیم. در نهایت، متناسب با معیارها و مساله، m گزینه که موجود و شدنی است، تعیین گردیده و این مجموعه از گزینه ها را A_i می نامیم.

فرض کنید، مجموعه $X = \{x_{ij} | i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ نرخ های ارزیابی A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) با توجه به معیارهای C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) باشد. هر تصمیم گیرنده D_k ($k = 1, 2, \dots, K$) می تواند نرخ فازی خود را به صورت یک عدد فازی ذوزنقه ای مثبت \tilde{R}_k ($k = 1, 2, \dots, K$) با تابع عضویت $\mu_{\tilde{R}_k}(x)$ تعیین کند. اگر نرخ های فازی همه تصمیم گیرنده ها به صورت اعداد فازی ذوزنقه ای مثبت $\tilde{R}_k = (r_k^a, r_k^b, r_k^c, r_k^d)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) باشد، برای تلفیق نرخ های فازی تصمیم گیرنده ها، می توان نرخ فازی تلفیق شده را به صورت $\tilde{R} = (r^a, r^b, r^c, r^d)$ تعریف نمود، که در آن $r^a = \min_k \{r_k^a\}$

$$r^d = \max_k \{r_k^d\} \text{ و } r^c = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_k^c, r^b = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_k^b$$

فرض کنید معیارهای ارزیابی هر گزینه و اهمیت وزن های فازی هر معیار توسط k امین تصمیم گیرنده به ترتیب به صورت $\tilde{x}_{ijk} = (x_{ijk}^a, x_{ijk}^b, x_{ijk}^c, x_{ijk}^d)$ و $\tilde{w}_{jk} = (w_{jk}^a, w_{jk}^b, w_{jk}^c, w_{jk}^d)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) و $j = 1, 2, \dots, n$ باشد. از این رو تلفیق نرخ های فازی معیارهای هر گزینه \tilde{x}_{ij} به صورت $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^a, x_{ij}^b, x_{ij}^c, x_{ij}^d)$ محاسبه می گردد، به طوریکه $x_{ij}^a = \min_k \{x_{ijk}^a\}$ ، $x_{ij}^b = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{ijk}^b$ ، $x_{ij}^c = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{ijk}^c$ و $x_{ij}^d = \max_k \{x_{ijk}^d\}$. تلفیق وزن های فازی هر معیار \tilde{w}_j نیز به صورت $\tilde{w}_j = (w_j^a, w_j^b, w_j^c, w_j^d)$ محاسبه می گردد، به طوریکه $w_j^a = \min_k \{w_{jk}^a\}$ ، $w_j^b = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K w_{jk}^b$ ، $w_j^c = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K w_{jk}^c$ و $w_j^d = \max_k \{w_{jk}^d\}$

پس با توجه به محاسبات مربوط به تلفیق نرخ های فازی معیارهای هر گزینه و تلفیق وزن های هر معیار ماتریس های تصمیم گیری فازی را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n] \quad (9)$$

به طوری که $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^a, x_{ij}^b, x_{ij}^c, x_{ij}^d)$ و $\tilde{W}_j = (W_j^a, W_j^b, W_j^c, W_j^d)$ و $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ می باشد.

در مسایل تصمیم گیری اکثراً فاکتورها ماهیتاً با یکدیگر در تعارض می باشند. عده ای از آنها مانند قیمت، تأخیر در تحویل و ... به صورت هزینه معرفی شده و بعضی دیگر از معیارها مانند کیفیت، ظرفیت و ... به صورت سود معرفی می گردند. بنابراین، برای بی مقیاس کردن ماتریس تصمیم گیری فازی را به صورت $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n}$ نرمال می کنیم.

اگر B و C به ترتیب معیارهای سود و هزینه باشند، آنگاه:

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{x_{ij}^a}{\theta_j^*}, \frac{x_{ij}^b}{\theta_j^*}, \frac{x_{ij}^c}{\theta_j^*}, \frac{x_{ij}^d}{\theta_j^*} \right) \quad (j \in B)$$

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^d}, \frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^c}, \frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^b}, \frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^a} \right) \quad (j \in C)$$

که $\theta_j^* (j \in B)$ و $\varphi_j^- (j \in C)$ بترتیب به صورت $\max_i \{x_{ij}^d\}$ و $\min_i \{x_{ij}^a\}$ تعریف می گردد.

روش نرمال سازی فوق، تمام خصوصیات را همچنان حفظ می نماید، در حالی که \tilde{r}_{ij} به ازای هر i و j اعداد فازی ذوزنقه ای نرمال می باشند. حال ماتریس تصمیم گیری فازی نرمال وزین شده را به صورت $\tilde{Q} = [\tilde{q}_{ij}]_{m \times n}$ ؛ $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ به دست می آوریم، به طوریکه $\tilde{q}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(\cdot) \tilde{W}_j$. عناصر ماتریس تصمیم گیری فازی نرمال وزین $(\forall i, j) \tilde{q}_{ij} \cong (q_{ij}^a, q_{ij}^b, q_{ij}^c, q_{ij}^d)$ ، همچنان تقریباً به صورت عدد فازی ذوزنقه ای می باشند. اکنون حل ایده آل فازی (F^*) و حل ضد ایده آل فازی (F^-) را به صورت زیر می توانیم تعریف نماییم:

$$\begin{aligned} F^* &= (V_1^*, V_2^*, \dots, V_n^*) \\ F^- &= (V_1^-, V_2^-, \dots, V_n^-) \end{aligned} \quad (10)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} V_j^* &= (v_j^*, v_j^*, v_j^*, v_j^*) & , & & V_j^- &= (v_j^-, v_j^-, v_j^-, v_j^-) & \quad \forall i, j. \\ v_j^* &= \max_i \{q_{ij}^d\} & , & & v_j^- &= \min_i \{q_{ij}^a\} \end{aligned}$$

حل ایده آل فازی یک حل مجازی ایده آل است که معیارهای سود را ماکزیم کرده و معیارهای زیان را مینیمم می کند یا به عبارتی دیگر گزینه ای است که معیارهای آن در بهترین مقدار خود می باشند، بنابراین در ماتریس تصمیم گیری فازی نرمالیزه وزین می توانیم گزینه را به عنوان حل ایده آل فازی در نظر بگیریم که هر یک از معیارهای آن به صورت $(1, 1, 1, 1)$ می باشد. از طرف دیگر، حل ضد-ایده آل فازی یک حل مجازی ضد ایده آل است که معیارهای سود را مینیم کرده و معیارهای زیان را ماکزیم می کند یا به عبارتی دیگر گزینه ای که معیارهای آن در بدترین مقدار خود می باشند، بنابراین، در ماتریس تصمیم گیری فازی نرمالیزه وزین می توانیم گزینه را به عنوان حل ضد-ایده آل فازی در نظر بگیریم که هر یک از معیارهای آن به صورت $(0, 0, 0, 0)$ می باشد. در این مقاله همانطور که از رابطه (۱۰) مشاهده می گردد، گزینه ایده آل و ضد ایده آل از بین درایه های ماتریس تصمیم گیری فازی نرمال وزین شده انتخاب می گردند.

فاصله هر گزینه از F^* و F^- بر اساس رابطه (۷) به صورتی که سیستم رتبه بندی روی $H(R)$ می باشد، به ازای α های گوناگون از رابطه زیر به دست می آید:

$$d_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^n d(\tilde{V}_j^*, \tilde{q}_{ij}) = \sum_{j=1}^n (2V_j^* - q_{ij}^a - q_{ij}^d) + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=1}^n (q_{ij}^a + q_{ij}^d - q_{ij}^b - q_{ij}^c), \quad \forall i, \quad (11)$$

$$d_i^-(\alpha) = \sum_{j=1}^n d(\tilde{q}_{ij}, \tilde{V}_j^-) = \sum_{j=1}^n (q_{ij}^a + q_{ij}^d - 2V_j^-) + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=1}^n (q_{ij}^b + q_{ij}^c - q_{ij}^a - q_{ij}^d), \quad \forall i.$$

توجه کنید که در رابطه فوق $d(0,0)$ مقدار فاصله بین دو عدد فازی بوده و $\alpha \in [0, 1]$ می باشد. هدف در این تکنیک تصمیم گیری این است که گزینه ای را انتخاب کنیم که به طور همزمان تا حد ممکن به گزینه ایده آل فازی نزدیک بوده و از گزینه ضد ایده آل فازی دور باشد. بدین منظور یک شاخص ضریب نزدیکی برای رتبه بندی تمام گزینه ها با توجه به فاصله حل ایده آل فازی (F^*) و حل ضد-ایده آل فازی (F^-) با توجه به α مربوطه می بایست تعریف نمود. بدین منظور شاخص ضریب نزدیکی (CC_i) برای هر گزینه به ازای α خاص به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$CC_i(\alpha) = \frac{d_i^-(\alpha)}{d_i^*(\alpha) + d_i^-(\alpha)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

واضح است که از رابطه (۱۲) اگر $F_i = F^*$ آنگاه $CC_i(\alpha) = 1$ است، و اگر $F_i = F^-$ آنگاه $CC_i(\alpha) = 0$ می گردد. به عبارت دیگر زمانی که گزینه F_i به F^* نزدیک و از F^- دور می گردد، با توجه به رابطه (۱۲) شاخص ضریب نزدیکی ($CC_i(\alpha)$) به عدد ۱ نزدیک می شود. به طور خلاصه الگوریتم TOPSIS فازی به صورت زیر بیان می شود:

قدم ۱: تشکیل یک تیم تصمیم گیری و سپس تعیین گزینه ها و معیارهای ارزیابی آنها.

قدم ۲: تعیین اهمیت معیارها توسط هر تصمیم گیرنده با استفاده از متغیرهای گفتاری از پیش تعیین شده.

قدم ۳: تعیین نرخ های گزینه ها با توجه به هر معیار با استفاده از متغیرهای گفتاری از پیش تعیین شده.

قدم ۴: تشکیل ماتریس تصمیم گیری فازی.

قدم ۵: تشکیل ماتریس تصمیم گیری فازی نرمال شده.

قدم ۶: تشکیل ماتریس تصمیم گیری فازی نرمال وزین شده.

قدم ۷: تعیین حل ایده آل فازی و حل ضد-ایده آل فازی.

قدم ۸: محاسبه فاصله هر گزینه از حل ایده آل فازی و حل ضد-ایده آل فازی برای هر α معین.

قدم ۹: محاسبه شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه برای هر α معین.

قدم ۱۰: رتبه بندی گزینه ها با توجه به شاخص ضریب نزدیکی محاسبه شده در قدم قبل.

۴ مثال عددی

فرض کنید می خواهیم از بین ۴ گزینه (WT, WO, ST, SO) با توجه به معیارهای $(C_9, C_8, C_7, C_6, C_5, C_4, C_3, C_2, C_1)$ توسط یک تیم خبره ۳ نفره گزینه مطلوب را انتخاب نماییم. برای حل این مساله با توجه به الگوریتم پیشنهادی به طور مختصر داریم:

قدم ۱ و ۲: سه تصمیم گیرنده اهمیت معیارها را با استفاده از متغیرهای گفتاری در شکل ۱ ارزیابی کرده، که نتایج در جدول ۱ آمده است.

قدم ۳: نتایج ارزیابی نرخ های گزینه ها توسط سه تصمیم گیرنده با استفاده از متغیرهای گفتاری در شکل ۲ به صورت جدول ۲ است.

معیارها	تصمیم گیرنده ها		
	D_1	D_2	D_3
C_1	H	H	H
C_2	VH	VH	VH
C_3	VH	VH	H
C_4	MH	M	M
C_5	H	VH	H
C_6	VH	VH	VH
C_7	VL	VL	ML
C_8	H	H	VH
C_9	H	M	MH

جدول ۱: اهمیت وزن معیارها توسط سه تصمیم گیرنده

قدم ۴: حال ارزیابی های به دست آمده در قدم های دوم و سوم را به اعداد فازی دوزنقه ای متناسب با آن تبدیل نموده تا ماتریس تصمیم گیری فازی و اعداد فازی وزن های گزینه ها به دست آید. که نتایج در جدول ۳ آمده است.

قدم ۵ و ۶: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمالیزه وزین که در جدول ۴ به دست آمده است.
قدم ۷: تعیین حل ایده‌آل فازی و حل ضد ایده‌آل فازی.

معیارها	گزینه	تصمیم‌گیرنده‌ها		
		D_1	D_2	D_3
C_1	SO	MG	MG	MG
	ST	G	G	G
	WO	VG	VG	G
	WT	G	G	G
C_2	SO	MG	MG	VG
	ST	VG	VG	VG
	WO	VG	G	G
	WT	G	G	MG
C_3	SO	G	G	G
	ST	VG	VG	VG
	WO	VG	VG	G
	WT	MG	F	G
C_4	SO	G	G	G
	ST	P	VP	P
	WO	VG	VG	VG
	WT	VG	G	G
C_5	SO	G	G	G
	ST	VG	VG	VG
	WO	P	VP	P
	WT	G	G	VG
C_6	SO	MG	G	VG
	ST	VG	G	MG
	WO	G	VG	G
	WT	VG	MG	MG
C_7	SO	F	MG	G
	ST	MG	G	MG
	WO	MG	VG	G
	WT	G	MG	VG
C_8	SO	G	VG	MG
	ST	VG	MG	VG
	WO	G	MG	MG
	WT	VG	G	VG
C_9	SO	MG	G	G
	ST	VG	VG	MG
	WO	G	G	G
	WT	MG	G	MG

جدول ۲: نرخ‌های پنج‌گزینه با توجه به معیارها توسط تصمیم‌گیرنده‌ها

	SO	ST	WO	WT	وزن
C_1	(۱, ۵/۵, ۷, ۸)	(۲, ۷/۶۷, ۸, ۹)	(۳, ۸/۳۳, ۹/۳۳, ۱۰)	(۴, ۷/۶۷, ۸, ۹)	(۰/۷, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۹)
C_2	(۵, ۶/۶۷, ۸, ۱۰)	(۶, ۸/۶۷, ۱۰, ۱۰)	(۷, ۸, ۸/۶۷, ۱۰)	(۵, ۷, ۷/۶۷, ۹)	(۰/۸, ۰/۹, ۱, ۱)
C_3	(۷, ۷/۶۷, ۸, ۹)	(۸, ۸/۶۷, ۱۰, ۱۰)	(۷, ۸/۳۳, ۹/۳۳, ۱۰)	(۴, ۶, ۶/۶۷, ۹)	(۰/۷, ۰/۸۷, ۰/۹۳, ۱)
C_4	(۷, ۷/۶۷, ۸, ۹)	(۰, ۱, ۱/۶۷, ۳)	(۸, ۸/۶۷, ۱۰, ۱۰)	(۷, ۸, ۸/۶۷, ۱۰)	(۰/۴, ۰/۵۳, ۰/۵۷, ۰/۸)
C_5	(۷, ۷/۶۷, ۸, ۹)	(۸, ۸/۶۷, ۱۰, ۱۰)	(۰, ۱, ۱/۶۷, ۳)	(۷, ۸, ۸/۶۷, ۱۰)	(۰/۷, ۰/۸۳, ۰/۸۷, ۱)
C_6	(۷, ۷/۳۳, ۸/۳۳, ۱۰)	(۵, ۷/۳۳, ۸/۳۳, ۱۰)	(۷, ۸, ۸/۶۷, ۱۰)	(۵, ۶/۶۷, ۸, ۱۰)	(۰/۸, ۰/۹, ۱, ۱)
C_7	(۵, ۶, ۶/۶۷, ۹)	(۵, ۶/۳۳, ۷/۳۳, ۹)	(۷, ۷/۳۳, ۸/۳۳, ۱۰)	(۵, ۷/۳۳, ۸/۳۳, ۱۰)	(۰, ۰/۱, ۰/۲, ۰/۵)
C_8	(۵, ۷/۳۳, ۸/۳۳, ۱۰)	(۵, ۷/۶۷, ۹, ۱۰)	(۵, ۶/۳۳, ۷/۳۳, ۹)	(۷, ۸/۳۳, ۹/۳۳, ۱۰)	(۰/۷, ۰/۸۳, ۰/۸۷, ۱)
C_9	(۷, ۷, ۷/۶۷, ۹)	(۵, ۷/۶۷, ۹, ۱۰)	(۷, ۷/۶۷, ۸, ۹)	(۵, ۶/۳۳, ۷/۳۳, ۹)	(۰/۴, ۰/۶۳, ۰/۶۷, ۰/۹)

جدول ۳: ماتریس تصمیم‌گیری فازی و اعداد فازی وزن‌های پنج‌گزینه

$$F^* = [(0/9, 0/9, 0/9, 0/9), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0/8, 0/8, 0/8, 0/8), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0/5, 0/5, 0/5, 0/5), (1, 1, 1, 1), (0/9, 0/9, 0/9, 0/9)]$$

$$F^- = [(0/07, 0/07, 0/07, 0/07), (0/4, 0/4, 0/4, 0/4), (0/28, 0/28, 0/28, 0/28), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0/4, 0/4, 0/4, 0/4), (0, 0, 0, 0), (0/35, 0/35, 0/35, 0/35), (0/2, 0/2, 0/2, 0/2)]$$

	SO	ST	WO	WT
C_1	(0/088, 0/114, 0/145, 0/9)	(0/078, 0/1, 0/104, 0/45)	(0/07, 0/086, 0/096, 0/3)	(0/078, 0/1, 0/104, 0/225)
C_2	(0/4, 0/563, 0/75, 1)	(0/4, 0/45, 0/577, 0/833)	(0/4, 0/519, 0/625, 0/714)	(0/444, 0/587, 0/714, 1)
C_3	(0/49, 0/667, 0/744, 0/9)	(0/56, 0/754, 0/93, 1)	(0/49, 0/725, 0/868, 1)	(0/28, 0/522, 0/62, 0/9)
C_4	(0/28, 0/407, 0/456, 0/72)	(0, 0/053, 0/095, 0/24)	(0/32, 0/46, 0/57, 0/8)	(0/28, 0/424, 0/494, 0/8)
C_5	(0/49, 0/637, 0/696, 0/9)	(0/56, 0/72, 0/87, 1)	(0, 0/083, 0/145, 0/3)	(0/49, 0/664, 0/754, 1)
C_6	(0/4, 0/54, 0/682, 0/714)	(0/4, 0/54, 0/682, 1)	(0/4, 0/519, 0/625, 0/714)	(0/4, 0/563, 0/75, 1)
C_7	(0/075, 0/167, 0/5)	(0, 0/068, 0/158, 0/5)	(0, 0/06, 0/136, 0/357)	(0, 0/06, 0/136, 0/5)
C_8	(0/35, 0/608, 0/725, 1)	(0/35, 0/637, 0/783, 1)	(0/35, 0/525, 0/638, 0/9)	(0/49, 0/691, 0/812, 1)
C_9	(0/28, 0/441, 0/514, 0/81)	(0/2, 0/483, 0/603, 0/9)	(0/28, 0/483, 0/536, 0/81)	(0/2, 0/399, 0/491, 0/81)

جدول ۴: ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمالیزه وزین

قدم ۸: محاسبه فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل فازی و حل ضد ایده‌آل فازی به ازای α های معین، که در جدول ۵ آمده است.

قدم ۹ و ۱۰: شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه به ازای α های معین محاسبه گشته، و بر اساس آن چهار گزینه مورد نظر رتبه بندی می‌گردند که نتایج در جدول ۶ آمده است. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌شود، با افزایش α شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه کاهش می‌یابد. رتبه‌بندی گزینه‌ها به صورت $SO > WT > ST > WO$ به دست آمده است.

$\alpha = 0$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
$d(SO, A^*)$	0/812	0/6	0/61	0/6	0/61	0/886	0/5	0/65	0/71
$d(ST, A^*)$	1/272	0/767	0/44	1/36	0/44	0/6	0/5	0/65	0/7
$d(WO, A^*)$	1/43	0/886	0/51	0/48	1/7	0/886	0/643	0/75	0/71
$d(WT, A^*)$	1/497	0/556	0/82	0/52	0/51	0/6	0/5	0/51	0/79
$d(SO, A^-)$	0/848	0/6	0/83	1	1/39	0/314	0/5	0/65	0/69
$d(ST, A^-)$	0/388	0/433	1	0/24	1/56	0/6	0/5	0/65	0/7
$d(WO, A^-)$	0/23	0/314	0/93	1/12	3	0/314	0/357	0/55	0/69
$d(WT, A^-)$	0/163	0/644	0/62	1/08	1/49	0/6	0/5	0/79	0/61
$\alpha = 0/25$									
$d(SO, A^*)$	0/903	0/611	0/607	0/617	0/617	0/873	0/532	0/652	0/727
$d(ST, A^*)$	1/313	0/793	0/425	1/372	0/436	0/622	0/534	0/641	0/702
$d(WO, A^*)$	1/454	0/882	0/497	0/491	1/709	0/882	0/663	0/761	0/719
$d(WT, A^*)$	1/509	0/574	0/825	0/54	0/519	0/611	0/538	0/508	0/805
$d(SO, A^-)$	0/757	0/589	0/833	0/983	1/383	0/328	0/468	0/648	0/673
$d(ST, A^-)$	0/348	0/407	1/016	0/229	1/564	0/578	0/466	0/659	0/698
$d(WO, A^-)$	0/207	0/318	0/943	1/109	0/291	0/318	0/337	0/539	0/681
$d(WT, A^-)$	0/151	0/626	0/615	1/06	1/481	0/589	0/462	0/792	0/595

$\alpha = 0/5$									
$d(SO, A^*)$	۰/۹۹۴	۰/۶۲۲	۰/۶۰۵	۰/۶۳۴	۰/۶۲۴	۰/۸۵۹	۰/۵۶۵	۰/۶۵۴	۰/۷۴۴
$d(ST, A^*)$	۱/۳۵۳	۰/۸۱۹	۰/۴۰۹	۱/۳۸۳	۰/۴۳۳	۰/۶۴۵	۰/۵۶۹	۰/۶۳۳	۰/۷۰۴
$d(WO, A^*)$	۱/۴۷۷	۰/۸۷۹	۰/۴۸۴	۰/۵۰۳	۱/۷۱۸	۰/۸۷۹	۰/۶۸۳	۰/۷۷۲	۰/۷۲۸
$d(WT, A^*)$	۱/۵۲۲	۰/۵۹۲	۰/۸۳۰	۰/۵۶۱	۰/۵۲۸	۰/۶۲۲	۰/۵۷۶	۰/۵۰۷	۰/۸۲۰
$d(SO, A^-)$	۰/۶۶۶	۰/۵۷۸	۰/۸۳۵	۰/۹۶۶	۱/۳۷۶	۰/۳۴۱	۰/۴۳۶	۰/۶۴۶	۰/۶۵۶
$d(ST, A^-)$	۰/۳۰۷	۰/۳۸۲	۱/۰۳۱	۰/۲۱۷	۱/۵۶۸	۰/۵۵۶	۰/۴۳۲	۰/۶۶۸	۰/۶۹۷
$d(WO, A^-)$	۰/۱۸۳	۰/۳۲۲	۰/۹۵۶	۱/۰۹۸	۰/۲۸۲	۰/۳۲۲	۰/۳۱۷	۰/۵۲۸	۰/۶۷۲
$d(WT, A^-)$	۰/۱۳۸	۰/۶۰۸	۰/۶۱۱	۱/۰۴	۱/۴۷۲	۰/۵۷۸	۰/۴۲۴	۰/۷۹۳	۰/۵۸۰
$\alpha = 0/75$									
$d(SO, A^*)$	۱/۰۸۵	۰/۶۳۳	۰/۶۰۲	۰/۶۵۱	۰/۶۳۱	۰/۸۴۶	۰/۵۹۷	۰/۶۵۶	۰/۷۶۱
$d(ST, A^*)$	۱/۳۹۴	۰/۸۴۴	۰/۳۹۴	۱/۳۹۵	۰/۴۲۹	۰/۶۶۷	۰/۶۰۳	۰/۶۲۴	۰/۷۰۵
$d(WO, A^*)$	۱/۵۰۱	۰/۸۷۵	۰/۴۷۱	۰/۵۱۴	۱/۷۲۷	۰/۸۷۵	۰/۷۰۳	۰/۷۸۳	۰/۷۳۷
$d(WT, A^*)$	۱/۵۳۴	۰/۶۱۰	۰/۸۳۴	۰/۵۸۱	۰/۵۳۷	۰/۶۳۳	۰/۶۱۴	۰/۵۰۵	۰/۸۳۵
$d(SO, A^-)$	۰/۵۷۵	۰/۵۶۷	۰/۸۳۸	۰/۹۶۹	۱/۳۶۹	۰/۳۵۵	۰/۴۰۳	۰/۶۴۴	۰/۶۳۹
$d(ST, A^-)$	۰/۲۶۷	۰/۳۵۶	۱/۰۴۷	۰/۲۰۶	۱/۵۷۱	۰/۵۳۳	۰/۳۹۷	۰/۶۷۶	۰/۶۹۵
$d(WO, A^-)$	۰/۱۶۰	۰/۳۲۵	۰/۹۶۹	۱/۰۸۶	۰/۲۷۳	۰/۳۲۵	۰/۲۹۷	۰/۵۱۷	۰/۶۶۳
$d(WT, A^-)$	۰/۱۲۶	۰/۵۹۰	۰/۶۰۶	۱/۰۱۹	۱/۴۶۳	۰/۵۶۷	۰/۳۸۶	۰/۷۹۵	۰/۵۶۵
$\alpha = 1$									
$d(SO, A^*)$	۱/۱۷۷	۰/۶۴۴	۰/۶۰۰	۰/۶۶۹	۰/۶۳۹	۰/۸۳۲	۰/۶۲۹	۰/۶۵۹	۰/۷۷۸
$d(ST, A^*)$	۱/۴۳۴	۰/۸۷۰	۰/۳۷۸	۱/۴۰۶	۰/۴۲۵	۰/۶۸۹	۰/۶۳۷	۰/۶۱۵	۰/۷۰۷
$d(WO, A^*)$	۱/۵۲۴	۰/۸۷۱	۰/۴۵۹	۰/۵۲۵	۱/۷۳۶	۰/۸۷۱	۰/۷۲۴	۰/۷۹۴	۰/۷۴۶
$d(WT, A^*)$	۱/۵۴۷	۰/۶۲۸	۰/۸۳۹	۰/۶۰۱	۰/۵۴۶	۰/۶۴۴	۰/۶۵۲	۰/۵۰۴	۰/۸۵۰
$d(SO, A^-)$	۰/۴۸۴	۰/۵۵۷	۰/۸۴۱	۰/۹۳۲	۱/۳۶۲	۰/۳۶۸	۰/۳۷۱	۰/۶۴۲	۰/۶۲۳
$d(ST, A^-)$	۰/۲۲۶	۰/۳۳۰	۱/۰۶۲	۰/۱۹۴	۱/۵۷۵	۰/۵۱۱	۰/۳۶۳	۰/۶۸۵	۰/۶۹۳
$d(WO, A^-)$	۰/۱۳۶	۰/۳۲۹	۰/۹۸۲	۱/۰۷۵	۰/۲۶۴	۰/۳۲۹	۰/۲۷۷	۰/۵۰۷	۰/۶۵۵
$d(WT, A^-)$	۰/۱۱۴	۰/۵۷۳	۰/۶۰۱	۰/۹۹۹	۱/۴۵۴	۰/۵۵۷	۰/۳۴۸	۰/۷۹۷	۰/۵۵

جدول ۵: محاسبه فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل فازی و حل ضد-ایده‌آل فازی به ازای α های مختلف

α	مقدار CC				رتبه بندی			
	SO	ST	WO	WT	SO	ST	WO	WT
۰	۰/۵۳۳	۰/۴۷۴	۰/۳۷۵	۰/۵۰۸	۱	۳	۴	۲
۰/۲۵	۰/۵۲۰	۰/۴۶۶	۰/۳۷۰	۰/۴۹۸	۱	۳	۴	۲
۰/۵	۰/۵۰۸	۰/۴۵۷	۰/۳۶۶	۰/۴۸۸	۱	۳	۴	۲
۰/۷۵	۰/۴۹۵	۰/۴۴۹	۰/۳۶۱	۰/۴۷۸	۱	۳	۴	۲
۱	۰/۴۸۳	۰/۴۴۱	۰/۳۵۶	۰/۴۶۸	۱	۳	۴	۲

جدول ۶: محاسبه شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه و رتبه‌بندی گزینه‌ها به ازای α های معین

۵ نتیجه گیری

اکثر مطالعات موجود در مسایل تصمیم گیری مساله را در محیطی از داده های قطعی فرض نموده است. اما در بعضی حالات مشاهده می شود که تعیین مقادیر دقیق برای معیارها مشکل می باشد و می بایست مقادیر به صورت فازی منظور گردد. در این مقاله، ما گزینه ها موجود را در محیطی فازی و با توجه به تئوری مجموعه های فازی مورد ارزیابی قرار داده ایم. متغیرهای گفتاری به صورت اعداد فازی برای ارزیابی نرخ ها و اوزان فاکتورها استفاده گردیده، آنگاه بر اساس مفاهیم TOPSIS در مسایل تصمیم گیری چند معیاره گروهی، ما حل ایده آل فازی و حل ضد ایده آل فازی را تعریف کرده، و سپس با توجه به رویکرد رتبه بندی اعداد فازی فاصله بین دو عدد فازی را محاسبه می گردد. در نهایت، شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه محاسبه گردیده تا بر اساس آن گزینه مناسب انتخاب گردد.

روش فازی ارائه شده بسیار ساده و انعطاف پذیر می باشد، بدین منظور می توان از این روش برای سایر مسایل تصمیم گیری در حوزه مدیریت استفاده گردد.

منابع

- [1] Hwang C.L., Yoon K., Multiple Attribute Decision Making: Methods and Application, Springer, New York, (1981).
- [2] Bellman R.E., Zadeh L.A., Decision-making in a fuzzy environment, Management Sciences 17, 141–164, (1970).
- [3] Boender C.G.E., Graan J.G. de, Lootsma F.A., Multi-attribute decision analysis with fuzzy pairwise comparisons, Fuzzy Sets and Systems 29, 133–143, (1989).
- [4] Chen C.T., Extensions to the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment, Fuzzy Sets and Systems 114, 1–9, (2000).
- [5] Chen S.J., Hwang C.L., Fuzzy multiple attribute decision making methods and application, in: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, New York, (1992).
- [6] Hsu H.M., Chen C.T., Aggregation of fuzzy opinions under group decision making, Fuzzy Sets and Systems 79, 279–285, (1996).
- [7] H.M. Hsu, C.T. Chen, Fuzzy credibility relation method for multiple criteria decision-making problems, Information Sciences 96, 79–91, (1997).
- [8] Jain R., A procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets, The International Journal of Systems Sciences 8, 1–7, (1978).
- [9] Kacprzyk J., Fedrizzi M., Nurmi H., Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority, Fuzzy Sets and Systems 49, 21–31, (1992).
- [10] Liang G.S., Fuzzy MCDM based on ideal and anti-ideal concepts, European Journal of Operational Research 112, 682–691, (1999).
- [11] Nurmi H., Approaches to collect decision making with fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 6, 249–259, (1981).
- [12] Raj P.A., Kumar D.N., Ranking alternatives with fuzzy weights using maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems 105, 365–375, (1999).
- [13] Tsaur S.H., Chang T.Y., Yen C.H., The evaluation of airline service quality by fuzzy MCDM, Tourism Management 23 (2002) 107–115.
- [14] T. Tanino, Fuzzy preference in group decision making, Fuzzy Sets and Systems 12, 117–131, (1984).
- [15] Wang Y.J., Lee H.S., Lin K., Fuzzy TOPSIS for multi-criteria decision-making, International Mathematical Journal 3, 367–379, (2003).
- [16] Zimmermann H.J., Fuzzy Set Theory and its Applications, fourth ed. Springer, New York, (2005).
- [17] Klir G.J., Yuan B., Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice-Hall Inc., USA, (1995).
- [18] Dubois D., Prade H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press Inc., New York, (1980).

-
- [19] Bortolan G., Degani R., A review of some methods for ranking fuzzy subsets, *Fuzzy Sets and Systems* 15, 1–19, (1985).
- [20] Wang X., Kerre E., Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), *Fuzzy Sets and Systems* 118, 375–385, (2001).
- [21] Wang X., Kerre E., Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II), *Fuzzy Sets and Systems* 118, 387–405, (2001).
- [22] Saade J., Schwarzlander H., Ordering fuzzy sets over the real line: an approach based on decision making under uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems* 50, 237–246, (1992).
- [23] Tran L., Duckstein L., Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure, *Fuzzy Sets and Systems* 130, 331–341, (2002).
- [24] Yao J.-S., Wu K. Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance, *Fuzzy Sets and Systems* 116, 275–288, (2000).
- [25] Chen C.-T., Lin C.-T., Huang S.-F., A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management, *International Journal of Production Economics* 102, 289–301, (2006).