محاسبه علامت مقادیر ویژه ماتریس ها با استفاده از قضیه ممان اینرسی(Inertia)

هاشم صابری نجفی[1]*، فرهاد نعیمی دافچاهی
[1]گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان
دانشگاه گیلان- دانشکده علوم- گروه ریاضی- صندوق پستی ۱۴۱۹- ۴۱۳۳۵
hnajafi@guilan.ac.ir
f_naeimidafchahi@yahoo.com

چکیده

در این مقاله ما چندین قضیه اینرشیا را به طور کامل اثبات می کنیم که در محاسبه اینرشیا ماتریس ها استفاده می شود. سپس یک اثبات جدید برای قضیه اساسی اینرشیا بیان می کنیم. در بخش آخر با استفاده از قضیه اساسی اینرشیا و روش ابداعی نویسندگان [3] اینرشیای چندین ماتریس را به دست می آوریم.

کلمات کلیدی: اینرشیا، معادلات ماتریسی، کنترل پذیری.

۱ مقدمه

دستگاه معادلات دیفرانسیل $\dot{x}(t) = Ax(t)$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A، منفی باشند. با توجه به اهمیت یافتن علامت قسمت حقیقی مقادیر ویژه در بررسی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل، روش هایی برای یافتن آنها ابداع شده است مانند قضیه گرشگورین، کمک گرفتن از معادلات لیاپانوف و....

۱-۱ تعاریف اینرشیا [1]

سه تایی $(\pi(A),\upsilon(A),\delta(A))$ را اینرشیای ماتریس A گویند و آنرا با $In(A)$ نشان می دهند که در آن $\pi(A)$ برابر است با تعداد مقادیر ویژه ماتریس A با قسمت حقیقی مثبت و $\upsilon(A)$ برابر است با تعداد مقادیر ویژه ماتریس A با قسمت حقیقی منفی و $\delta(A)$ برابر است با تعداد مقادیر ویژه ماتریس A با قسمت حقیقی صفر. در نتیجه اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد ،انگاه $\pi(A)+\upsilon(A)+\delta(A)=n$.

*عهده‌دار مکاتبات

۱-۲ تعریف کنترل پذیری

فرض کنید A ، ماتریسی $n\times n$ و B ماتریسی $n\times m$ $(m\le n)$ است. زوج (A,B) را کنترل پذیر گویند هرگاه ماتریس $C_M=(B,AB,A^2B,\ldots,A^{n-1}B)$ دارای رتبه n باشد.

۱-۳ قضیه (شرط کنترل پذیری)

فرض کنید (λ,x) زوج ویژه ماتریس A^* باشند یعنی $x^*A=\overline{\lambda}x^*$. اگر زوج (A,B) کنترل پذیر باشد آنگاه $x^*B\neq 0$

۲ قضیه اینرشیا برای ماتریس ها

در این بخش ابتدا قضیه سیلوستر را برای اینرشیا مطرح می کنیم. سپس اثباتی جدید برای قضیه اساسی اینرشیا ارایه می دهیم و به کمک آن و اتصال آن به مباحث کنترل پذیری اینرشیای چند ماتریس را محاسبه می کنیم.

۲-۱ قضیه

فرض کنید A ماتریسی هرمیتی باشد و P ماتریسی نامنفرد، آنگاه $In(A)=In(PAP^*)$.

۲-۲ قضیه اساسی اینرشیا [2]

فرض کنید M ماتریس معین مثبت و هرمیتی دلخواه باشد.(M>0)

(۱) شرط لازم وکافی برای آنکه ماتریس هرمیتی X موجود باشدکه در(۲) $AX+XA^*=M$ or $\Re(AX)>0$ صدق کند آن است که $\delta(A)=0$ (۲) و $In(A)=In(X)$.

اثبات

ابتدا در بخش (i) ثابت می کنیم که اگر $\delta(A)=0$ آنگاه ماتریس هرمیتی X_0 موجود است که $\Re(AX_0)>0$ و $In(A)=In(X_0)$. در بخش (ii) نشان می دهیم که برای ماتریس هرمیتی X_1 که $\Re(AX_1)>0$ باشد خواهیم داشت.

$In(A)=In(X_1)$. در بخش (iii) ثابت می کنیم که اگر ماتریس هرمیتی X موجود باشد که $\Re(AX)>0$ آنگاه $\delta(A)=0$.

(i) فرض کنید که $\delta(A)=0$.با استفاده از فرم کانونی جردن داریم:

$$S_1^{-1}AS_1=\sum\oplus(\lambda_k\mathrm{I}_k+U_k)$$

که در آن

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

این فرم را برای $A_\in$ ($\in\neq 0$) به کار می بریم:

$$S^{-1}AS = A_\in = \sum \oplus (\lambda_k \mathrm{I}_k + U'_k)$$

X را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X = \sum \oplus (\operatorname{sgn} \Re(\lambda_k))\mathrm{I}_k$$

داریم: $In(A) = In(X)$ و

$$\Re(A_\in X) = \sum \oplus |\Re(\lambda_k)| \mathrm{I}_k + \frac{\in}{2} \sum \oplus (U_k + U'_k)$$

عبارت سمت راست برای $|\in|$ کوچک معین مثبت است و چون $\Re(\lambda_k) \neq 0$ بنا به ۲-۱ داریم:

$$0 < S\Re(A_\in X)S^* = \Re(SA_\in XS^*) = \Re(ASXS^*) = \Re(AX_0)$$

که $X_0 = SXS^*$. بنابراین $\Re(AX_0)$ معین مثبت است و همچنین بنا به ۲-۱ داریم:

$$In(X_0) = In(X) = In(A)$$

(ii) فرض کنید برای X_1 هرمیتی $\Re(AX_1) = P_1 > 0$. قرار دهید: $P_0 = \Re(AX_0)$ که X_0 ماتریس هرمیتی است که $In(A) = In(X_0)$ و $\Re(AX_0) > 0$.

قرار دهید: $0 \le t \le 1$ $\quad P_t = tP_1 + (1-t)P_0$.

چون برای هر $x \neq 0$ داریم:

$$x^* P_t x = tx^* P_1 x + (1-t)x^* P_0 x > 0$$

بنابراین P_t معین مثبت است.

حال اگر $\Delta(A) \neq 0$. ماتریس هرمیتی X_t موجود است که $\Re(AX_t) = P_t$ برای هر $0 \le t \le 1$ و چون همه مقادیر ویژه X_t حقیقی هستند. پس نامنفرد است. در نتیجه

$$In(X_1) = In(X_0) = In(A)$$

درصورتی که $\Delta(A) = 0$ باشد و $\Re(AX_1) = P_1 > 0$ و با توجه به اینکه $In(A_t) = In(A)$ و $\Delta(A + t\mathrm{I}) = \Pi(\lambda_\mu + \lambda_\nu + 2t)$ برای هر $0 \le t \le 1$ چند جمله ای غیر صفر است و $\Re(A_t X) = P_t$ و با توجه به اینکه $\delta(A) \neq 0$ پس $In(X_1) = In(A_t) = In(A)$ واین اثبات این قسمت را تمام می کند.

(iii) حال فرض کنید برای ماتریسی هرمیتی مانند X داریم: $\Re(AX) > 0$. A را با $A + t\mathrm{I}$ تعویض کنید داریم:

$$\pi(A_t)=\pi(A)+\delta(A) \quad , \quad \nu(A_t)=\nu(A)$$

و با توجه به نتایج بالا وبا توجه به اینکه

$$\Re(A_t X)>0 \quad , \quad \delta(A_t)=0$$

خواهیم داشت:

$$\pi(X)=\pi(A)+\delta(A) \quad , \quad \nu(X)=\nu(A)$$

با تبدیل $t \to -t$ داریم :

$$\pi(X)=\pi(A) \quad , \quad \nu(X)=\nu(A)+\delta(A)$$

بنابراین $\delta(A)=0$.

نکته: در حالت اینکه ماتریس A حقیقی باشد A^* در قضیه به A^T تبدیل خواهد شد.

در قضیه اساسی اینترشیا یافتن برقراری شرط $\delta(A)=0$ در بسیاری از موارد سخت و دشوار است، اکنون با استفاده از ۱-۳ این شرط را به شرطی ساده تری تبدیل می کنیم تا در استفاده آسانتر باشد.

قضیه

فرض کنید X ماتریس نامنفرد هرمیتی باشد که $AX+XA^*=M$ و زوج (A,M) کنترل پذیر باشد آنگاه $\delta(A)=0$.

اثبات

فرض کنید (A,M) کنترل پذیر باشد و λ مقدار ویژه دلخواه از A باشد و x بردار ویژه وابسته به آن باشد آنگاه بنا به ۱-۳ داریم:

$$x^*M\neq 0 \Rightarrow x^*Mx\neq 0 \Rightarrow x^*(AX+XA^*)x\neq 0$$
$$\Rightarrow x^*AXx+x^*XA^*x\neq 0 \Rightarrow (\bar{\lambda}+\lambda)x^*Xx\neq 0 \Rightarrow \bar{\lambda}+\lambda\neq 0$$

در نتیجه $R(\lambda)\neq 0$ و با توجه به دلخواه بودن λ داریم $\delta(A)=0$.

لم ۱

بنا به قضایای اساسی اینرشیا و قضیه بالا داریم:

اگر ماتریس نامنفرد و هرمیتی X در معادله $AX+XA^*=M$ صدق کند و (A,M) کنترل پذیر باشند آنگاه $In(A)=In(X)$.

حال اگر شرایط لم ۱ برقرار باشد و ماتریس هرمیتی و نامنفرد X یافت شود آنگاه بنا به ۲-۱ اگر ماتریس P به نحوی اختیار شود که P^*AP ماتریس قطری شود آنگاه با توجه به اینکه مقادیر ویژه ماتریس قطری، عناصر روی قطر هستند، یافتن علامت مقادیر ویژه X و در نتیجه علامت مقادیر ویژه A آسان خواهد شد.

۳ چند مثال کاربردی

مثال ۳-۱ ماتریس $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -.5 & -.4 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & .7\\ -.5 & 0 & 2 & 1 & .2\\ -.4 & 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & .7 & .2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. روشن است که یافتن مقادیر ویژه ماتریس A از روش چند جمله ای مشخصه بسیار دشواراست، اما با توجه به قضیه اساسی اینرشیا می توان به راحتی اینرشیای A را محاسبه کرد. در معادله $AX+XA^T=M$ چون M ماتریس معین مثبت و هرمیتی (در حالت حقیقی، متقارن) است می توان آن را در اخر محاسبات تعیین کرد. در این جا با انتخاب هوشمندانه ای از X و با توجه به اینکه $\delta(A)=0$ است، اگر $X=diag(1,-1,1,-1,1)$ اختیار شود داریم:

$$AX+XA^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -.5 & -.4 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & .7\\ -.5 & 0 & 2 & 1 & .2\\ -.4 & 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & .7 & .2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -.5 & -.4 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & .7\\ -.5 & 0 & 2 & 1 & .2\\ -.4 & 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & .7 & .2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & -.5 & .4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & .7\\ -.5 & 0 & 2 & -1 & .2\\ -.4 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -.7 & .2 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -.5 & -.4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -.7\\ -.5 & 0 & 2 & 1 & .2\\ .4 & 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & .7 & .2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 4 & 0 & .4\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & .4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

چون M قطر غالب با عناصر روی قطر مثبت است، بنابراین معین مثبت است و متقارن نیز هست. حال اگر ماتریس M در معادله اساسی اینرشیا قرارگیرد نتیجه خواهیم گرفت که ماتریس $X=diag(1,-1,1,-1,1)$ در معادله (۲) صدق می کند و بنا به قضیه اساسی اینرشیا داریم: $In(A)=In(X)$ و چون مقادیر ویژه X عبارتند از $1,-1,1,-1,1$ آنگاه $In(A)=In(X)=(3,2,0)$.

این روش توسط دکتر هاشم صابری و فرهاد نعیمی دافچاهی (نویسنده) این مقاله ابداع شده است.[3]

مثال ۳-۲

فرض کنید که $A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ i & 2\end{pmatrix}$ و M مناسب به صورت $M=\begin{pmatrix}6 & -i\\ i & 2\end{pmatrix}$ اختیار شود. آنگاه بنا به تعریف ۱-۲ برای زوج (A,M) داریم:

$$C_M=(M,AM)=\begin{pmatrix}6 & -i & -18 & 3i\\ i & 2 & 8i & 5\end{pmatrix}$$

ماتریس C_M دارای زیر ماتریس با رتبه ۲ به صورت $\begin{pmatrix}-18 & 3i\\ 8i & 5\end{pmatrix}$ است. پس $\operatorname{rank} C_M=2$ ، بنابراین زوج (A,M) کنترل پذیر است وحال اگر $X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ اختیار شود داریم: $AX+XA^*=M$ بنابراین بنا به لم ۱ خواهیم داشت $In(A)=(1,1)$. این نتیجه با این واقعیت که مقادیر ویژه A ۳-، ۲ است سازگار است.

٤ نتیجه گیری

بحث پایداری سیستم های معادلات دیفرانسیل از مباحث مورد نظر بسیاری از علوم مانند مهندسی و فیزیک و... می باشد و به دنبال آن مباحث مربوط به اینرشیا از اهمیت ویژهای برخوردار است و ارتباط این موضوع با معادلات ماتریسی در سال های اخیر رشد زیادی کرده است. در [3] روش جدیدی برای محاسبه اینرشیا توسط نویسنده آورده شده است و در این مقاله نیز علاوه برآوردن اثباتی جدید از قضیه اساسی اینرشیا به شیوه ای جدیدتر روش ابداعی خود را ارایه کرده ایم.

منابع

[1] Datta.B.N,Numerical Linear Algebra and its Applications, Book,(1999).

[2] Datta.B.N,Stability and Inertia, Linear Algebra and its Applications,302-303(1999).

[3] Saberi.N.H,Naeimi.Dafchahi.F,Signs of Eigenvalues for Inertia of a matrix using Gerschgorin Circle, Numerical Linear Algebra With Applications, reviewed(2007).