# تحلیل حساسیت و کاربرد آن در تحلیل پوششی داده ها

**سهراب کردرستمی، صادق پورجعفر، آرمین قانع*، عطا اله نظری معافی، رضا احمد زاده**
اعضای انجمن ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

## چکیده

توجه اصلی ما در این مقاله ایجاد آشفتگی در تمام داده های خروجی و ورودی یک واحد تصمیم گیرنده کارا ( $DMU$ ) با استفاده از مدل جمعی می باشد به طوری که بعد از تغییرات همچنان کارا باقی بماند. شرایط مناسب، برای آنکه یک $DMU$ کارا بعد از ایجاد آشفتگی در تمام داده ها کارایی خود را حفظ نماید، را به دست خواهیم آورد. نتایج به دست آمده را روی ۱۰ شعبه از بانک های تجاری که هر کدام از ۳ ورودی برای تولید ۲ خروجی استفاده می کنند، اعمال خواهیم کرد. برای هر $DMU$ مطابق با کارایی مدل جمعی، یک ناحیه کارایی به دست می آید. در این ناحیه ورودی و خروجی های متناظر با $DMU$ کارا با حفظ کارایی می توانند تغییر یابند.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده ها، کارایی، تحلیل حساسیت، برنامه ریزی خطی.

## ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها ( $DEA$ ) یک روش برنامه ریزی ریاضی غیر پارامتری و غیر آماری است که جهت ارزیابی کارایی نسبی واحد های متجانس، متشکل از چندین ورودی برای تولید چندین خروجی به کار می رود. پوسته محدب قطعه قطعه خطی که به منظور تخمین کارایی نسبی واحد های تصمیم گیرنده به کار می رود پیشنهاد فارل (۱۹۵۷) می باشد. تا این که مقاله ای توسط چارنز،کوپر و رودز ( ۱۹۷۸ ) [ ۱ ]، [ ۲ ]، نوشته شد که مدل به کار رفته در آن به $CCR$ شهرت یافت و باعث به وجود آمدن مقاله های بسیاری با مدل های مختلف از جمله مدل جمعی [ ۲ ]، [ ۳ ] در بحث روش های کاربردی $DEA$ گردید.

بخشی از تحلیل پوششی داده ها، بررسی حساسیت مجموعه ای از $DMU$ های کارا به تغییرات مقادیر ورودی و خروجی است که می تواند بحث جالبی باشد.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. برخی از مفاهیم مقدماتی در بخش ۲ آورده شده است، آشفتگی در تمام ورودی ها و خروجی های واحد تصمیم گیرنده کارا با حفظ کارایی خود، مورد توجه ما در

* عهده دار مکاتبات

بخش ۳ می باشد، بخش ۴ شامل مثال کاربردی و بررسی روش و در نهایت بخش ۵ شامل برخی از نتایج و پیشنهادات برای تحقیقات بعدی خواهد بود.

## ۲ مفاهیم مقدماتی

فرض می کنیم $n$ واحد تصمیم گیرنده ( $DMU$ ) داریم که هر کدام از $m$ ورودی برای تولید $s$ خروجی استفاده می کنند. فرض کنید $x_{ij}$ مقدار ورودی نوع $i$ ام از $j$ امین $DMU$ ( $x_{ij} > 0, i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n$ ) و نیز $y_{rj}$ مقدار خروجی نوع $r$ ام از $j$ امین $DMU$ باشد. $(y_{rj} > 0, r = 1,2,...,s; j = 1,2,...,n)$ و همچنین فرض می کنیم $X_j$ بردار ورودی و $Y_j$ بردار خروجی $DMU_j$ که در آن $j = 1,2,...,n$ و $e$ بردار ستونی واحد باشد.

برای آنکه بدانیم $DMU_0$ واحد تحت ارزیابی با بردار ورودی $X_0$ و بردار خروجی $Y_0$، به مفهوم پاراتو کارا می باشد، باید مدل جمعی زیر را حل کنیم.

$$\begin{aligned}
\min \quad & -\sum_{i=1}^{m} s_i^- - \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
s.t.: \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \quad, r = 1,2,...,s, \\
& -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - s_i^- = -x_{io} \quad, i = 1,2,...,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, j = 1,...,n; i = 1,...,m; r = 1,...,s
\end{aligned} \tag{۱}$$

اگر در جواب بهین، مقدار تابع هدف ( ۱ ) برابر صفر باشد، آنگاه $DMU_0$ به مفهوم پاراتو کارا است، در غیر این صورت کارای ضعیف است.

مدل ( ۱ ) را به صورت برداری و به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 0\lambda_1 + ... + 0\lambda_0 + ... + 0\lambda_n - e^T S^+ - e^T S^- \\
s.t.: \quad & Y_1\lambda_1 + ... + Y_0\lambda_0 + ... + Y_n\lambda_n - S^+ = Y_0 \\
- \; & X_1\lambda_1 - ... - X_0\lambda_0 - ... - X_n\lambda_n - S^- = -X_0 \\
& \lambda_1 + ... + \lambda_0 + ... + \lambda_n = 1 \\
& \lambda_1, ..., \lambda_n, S^+, S^- \geq 0
\end{aligned} \tag{۲}$$

حال با آشفتگی در تمام ورودی ها و خروجی های واحد کارا، سعی در حفظ کارایی آن داریم. بدیهی است که هر گونه افزایش در خروجی $DMU_0$ باعث نشدنی بودن آن می شود لذا تمام مولفه های خروجی آن را به مقدار $\alpha$ کاهش می دهیم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\hat{y}_{r0} = y_{r0} - \alpha > 0 \ , \ \alpha \geq 0 \ , r = 1,2,\ldots,s \qquad (۳)$$

همچنین بدیهی است که هر گونه کاهش در مؤلفه های ورودی $DMU_0$ نیز باعث نشدنی بودن آن می شود یعنی واحد مذکور از مجموعه امکان تولید خارج می گردد، بنابراین توجه خود را فقط به افزایش تمام مؤلفه های ورودی به مقدار $\beta$ معطوف می کنیم، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{x}_{i0} = x_{i0} + \beta \quad , \ \beta \geq 0 \ , i = 1,2,\ldots,m \qquad (۴)$$

## ۳ تحلیل حساسیت در مدل جمعی با استفاده از دو پارامتر $\beta,\alpha$

فرض کنید $a_j$، $j = 1,2,\ldots,n+s+m$ ستون های ماتریس ضرایب و $a_0$ بردار سمت راست از مسأله برنامه ریزی خطی ( ۲ ) باشد. برای $DMU_0$ کارا به مفهوم پاراتو جواب بهینه اساسی $(\lambda^*, S^{+*}, S^{-*})$ از مدل (۲) همراه با ماتریس پایه ای بهینه زیر وجود دارد.

$$B = \begin{pmatrix} Y_B & -I_B^+ & 0 \\ -X_B & 0 & -I_B^- \\ e_B^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

معکوس ماتریس $B$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$B^{-1} = (b_{ij}^{-1}) \ , \quad i,j = 1,2,\ldots,s+m+1$$

نمادگذاری زیر را در نظر بگیرید:

$$\Gamma_j = B^{-1} a_j \, , j = 0,1,\ldots,n+s+m$$
$$w^T = c_B^T B^{-1}$$
$$z_j = c_B^T B^{-1} a_j = w' a_j \quad , \ j = 0,1,2,\ldots,n+s+m$$

تغییرات همزمان در خروجی های ( ۳ ) و ورودی های ( ۴ ) باعث آشفتگی در ماتریس پایه ای بهینه $B$ می شود، به طوریکه:

$$\hat{B} = B + \Delta B \qquad (۵)$$

که در آن:

$$\Delta B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\beta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\beta & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -\beta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} k \\ \downarrow \end{matrix} \tag{۶}$$

اندیس $k$ متناظر با متغیر پایه ای بهینه $\lambda_0^* = \lambda_k$ می باشد. همچنین این تغییرات در بردار سمت راست نیز اعمال می گردد، پس خواهیم داشت:

$$\hat{a}_0 = a_0 + \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & \ldots & -\alpha & -\beta & -\beta & \ldots & -\beta & 0 \end{pmatrix}^T \tag{۷}$$

در نتیجه:

$$tr(B^{-1}(\Delta B))B^{-1}(\Delta B) = pB^{-1}(\Delta B) \tag{۸}$$

که در آن:

$$p = tr(B^{-1}\Delta B) = -(\alpha\sum_{t=1}^{s} b_{kt}^{-1} + \beta\sum_{t=1}^{m} b_{k,s+t}^{-1}) \tag{۹}$$

به دلیل (۸) می توانیم از قضیه چارنز و کوپر، که اثبات کلیتر آن را در [4] آمده است، استفاده کنیم. ( همچنین می توانید به قضیه **۱** از چارنز و نرالیچ [۵]، صفحه، **۳۳۵** رجوع نمایید ). به همین منظور برای حالتی که $p \neq -1$ معکوس ماتریس پایه ای بهینه آشفته شده $\hat{B}$ را از (۵) به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} (\hat{B})^{-1} &= (B + \Delta B)^{-1} \\ &= B^{-1}(I + \tau(\Delta B)B^{-1}) \\ &= (I + \tau B^{-1}(\Delta B))B^{-1} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن:

$$\tau = -\frac{1}{1 + p} \tag{۱۱}$$

اکنون مطالب زیر را ثابت می کنیم.

**قضیه ۱** شرایط مطمئن برای $DMU_0$ کارا که بعد از اعمال آشفتگی های [۳] و [۴] همچنان کارایی خود را حفظ نماید، آن است که:

$$-\tau w^T(\Delta B)\Gamma_j \geq z_j - c_j \qquad \text{(12)}$$
$j$ ، اندیس متغیرهای غیر اساسی

**اثبات:** بدون کم شدن از کلیت استدلال مشابه آنچه که در قضیه ۲ چارنز و نرالیچ [۷] آورده شده است، عمل می کنیم.

$$z'_j - c_j = c_{\hat{B}}\hat{B}^{-1}a_j - c_j = c_{\hat{B}}(B+\Delta B)^{-1}a_j - c_j = c_B(B^{-1}+\tau B^{-1}(\Delta B)B^{-1})a_j - c_j$$
$$= c_B B^{-1}a_j + \tau c_B B^{-1}(\Delta B)B^{-1}a_j - c_j = z_j + \tau w^T(\Delta B)\Gamma_j - c_j \leq 0$$
$$\Rightarrow -\tau w^T(\Delta B)\Gamma_j \geq z_j - c_j$$
$j$ ، اندیس متغیرهای غیر اساسی

**نتیجه ۱**. با توجه به ساختار ماتریس $\Delta B$ در (۶) و به کمک (۱۱) سیستم نامعادلات (۱۲) می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$j$ اندیس متغیرهای غیر اساسی

$$-\frac{1}{1+p}\left[(\sum_{t=1}^{s}w_t)\alpha + (\sum_{t=1}^{m}w_{s+t})\beta\right]\Gamma_{kj} \geq z_j - c_j, \qquad \text{(13)}$$

**نتیجه ۲**. در (۱۳) بسته به اینکه $1+p$، مثبت یا منفی باشد، دو حالت وجود دارد:

اگر $1+p>0$ باشد با استفاده از (۹) و $\bar{c}_j = z_j - c_j$ در (۱۳) به سیستم نامعادلات زیر می رسیم:

$$-\frac{1}{1-(\alpha\sum_{t=1}^{s}b_{kt}^{-1} + \beta\sum_{t=1}^{m}b_{k,s+t}^{-1})}\left[(\sum_{t=1}^{s}w_t)\alpha + (\sum_{t=1}^{m}w_{s+t})\beta\right]\Gamma_{kj} \geq \bar{c}_j$$
$$\Rightarrow \left[(\sum_{t=1}^{s}-w_t)\alpha + (\sum_{t=1}^{m}-w_{s+t})\beta\right]\Gamma_{kj} \geq \bar{c}_j - (\alpha\bar{c}_j\sum_{t=1}^{s}b_{kt}^{-1} + \beta\bar{c}_j\sum_{t=1}^{m}b_{k,s+t}^{-1}) \qquad \text{(14.a)}$$
$$\Rightarrow \left[\sum_{t=1}^{s}(b_{kt}^{-1}\bar{c}_j - w_t\Gamma_{kj})\right]\alpha + \left[\sum_{t=1}^{m}(b_{k,s+t}^{-1}\bar{c}_j - w_{s+t}\Gamma_{kj})\right]\beta \geq \bar{c}_j,$$

$j$ اندیس متغیرهای غیر اساسی

در صورتی که $1+p<0$ باشد، خواهیم داشت:

$$\left[\sum_{t=1}^{s}(b_{kt}^{-1}\overline{c}_j - w_t\Gamma_{kj})\right]\alpha + \left[\sum_{t=1}^{m}(b_{k,s+t}^{-1}\overline{c}_j - w_{s+t}\Gamma_{kj})\right]\beta \le \overline{c}_j\,, \qquad (۱۴.b)$$

j اندیس متغیرهای غیر اساسی

**نتیجه ۳.** در حالت خاص $\beta=\alpha$ می توان سیستم نامعادلات (۱۳) را بر حسب $\alpha$ تعیین نمود.

$$\left[-\frac{1}{1+p}(\sum_{t=1}^{s}w_t + \sum_{t=1}^{m}w_{s+t})\Gamma_{kj}\right]\alpha \ge z_j - c_j\,, \qquad (۱۵)$$

در حالتی که $1+p>0$ می توانیم از (۱۴.a) نیز به سیستم نامعادلات زیر بر حسب $\alpha$ برسیم.

$$\left[\sum_{t=1}^{s}(b_{kt}^{-1}\overline{c}_j - w_t\Gamma_{kj}) + \sum_{t=1}^{m}(b_{k,s+t}^{-1}\overline{c}_j - w_{s+t}\Gamma_{kj})\right]\alpha \ge \overline{c}_j\,,$$

j اندیس متغیرهای غیر اساسی

و اگر $1+p<0$ می توانیم از(۱۴.a) به سیستم نامعادلات زیر بر حسب $\alpha$ برسیم.

$$\left[\sum_{t=1}^{s}(b_{kt}^{-1}\overline{c}_j - w_t\Gamma_{kj}) + \sum_{t=1}^{m}(b_{k,s+t}^{-1}\overline{c}_j - w_{s+t}\Gamma_{kj})\right]\alpha \le \overline{c}_j\,, \qquad (۱۶.a)$$

j اندیس متغیرهای غیر اساسی

**نتیجه ٤.** می توان مسأله را طوری در نظر گرفت که فقط تغییرات در خروجی ها اتفاق بی افتد یعنی در (۴)،(۶) و (۹)، $\beta=0$ باشد، در این حالت سیستم نامعادلات متناظر در (۱۳) و یا در(۱۴.a) یا( ۱۴.b) بر حسب $\alpha$ به دست می آید. به طور مشابه می توان مسأله را طوری در نظر گرفت که فقط تغییرات در ورودی ها اتفاق بی افتد، بدین معنی که $\alpha=0$ باشد و سیستم نامعادلات (۱۳) و(۱۴.a)یا( ۱۴.b) فقط بر حسب $\beta$ تعیین شوند.

**تبصره ٥.** فرض کنید $S_0 \subset R^2$ مجموعه جواب های $(\alpha,\beta)$ حاصل از نامعادلات (۱۴.a) همراه با شرایط (۳)و(۴) و با فرض $1+p>0$ باشد. فرض کنید $R_0 \subset R^{s+m}$ مجموعه نقاط $(\hat{X}_0,\hat{Y}_0)$ در نزدیکی $(X_0,Y_0)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\hat{y}_{r0} = y_{r0} - \alpha, r=1,2,...,s,\ \hat{x}_{io} = x_{i0} + \beta, i=1,2,...,m, (\alpha,\beta)\in S_0 \qquad (۱۷)$$

مجموعه $R_0$ ناحیه کارایی اطراف $DMU_0$ را مشخص می کند. ( تعریف ۱ نرالیچ [۹]، صفحه ۳۲۷ )

بنابراین تغییرات در مقادیر خروجی و ورودی واحد کارای $DMU_0$ ناحیه ای را مشخص می کند که در آن ناحیه $DMU_0$ همچنان کارا با قی می ماند. هرچه ناحیه کارایی $R_0$ بزرگتر باشد نشان دهنده آن است که

$DMU_0$ نسبت به تغییرات در خروجی ها و ورودی ها حساسیت کمتری دارد و هر چه ناحیه کارایی $R_0$ کوچکتر باشد، $DMU_0$ نسبت به تغییرات حساسیت بیشتری خواهد داشت.

## ٤ یک مطالعه کاربردی

در این بخش روش پیشنهاد شده را روی مجموعه ای از داده ها شامل ۱۰ شعبه بانکی یکی از بانک های ایران پیاده می کنیم. هر داده شامل سه ورودی و دو خروجی می باشد. ورودی های هر شعبه شامل تعداد کارمندان، هزینه فضای کاری و تعداد مشتری ها و خروجی ها هر شعبه شامل سپرده ها و مبالغ وام می باشد. داده ها در جدول (۱) داده شده اند.

در بررسی کارایی $DMU$ ها، با استفاده از روش دوفازی به این نتیجه رسیدیم که $DMU_2$ به مفهوم پاراتو کارا می باشد.

برای این منظور و برای بررسی تحلیل حساسیت واحد کارای $DMU_2$ با استفاده از نرم افزار *LINDO* [6] ماتریس اساسی بهینه و جدول بهینه را برای $DMU_2$ به دست آوردیم. سپس از نرم افزار *Maple* به جهت به دست آوردن معکوس ماتریس اساسی بهینه و حل سیستم نامعادلات (۱۴.a) یا (۱۴.b) استفاده کردیم.

در این مطالعه توجه خود را به تعیین حساسیت واحد $DMU_2$ با بردار ورودی $X_0^T = [20,3,6]$ و بردار خروجی $Y_0^T = [3.5,4]$ و با استفاده از مدل (۲) معطوف می کنیم.

بنابراین از حل مدل (۲) ماتریس اساسی بهینه زیر را خواهیم داشت:

$$B = (\lambda_5^*, \lambda_2^*, s_2^{-*}, s_1^{-*}, s_2^{+*}, s_1^{+*}) = \begin{pmatrix} 6.75 & 3.5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -30 & -20 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که معکوس آن به صورت زیر است.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.22204\ 10^{-16} & 0 & 0 & 0 & 0.33333 & 2 \\ -0.11102\ 10^{-16} & 0 & 0 & 0 & -0.33333 & -1 \\ -0.55511\ 10^{-16} & 0 & 0 & -1 & -0.33333 & -5 \\ -0.44409\ 10^{-15} & 0 & -1 & 0 & -3.3333 & -40 \\ 0.11102\ 10^{-15} & -1 & 0 & 0 & 0.33333 & 6 \\ -1.0000 & 0 & 0 & 0 & 1.0833 & 10 \end{pmatrix}$$

حال خروجی های واحد $DMU_2$ را به اندازه $\alpha$ کاهش و ورودی های آن را بـه انـدازه $\beta$ افـزایش مـی دهـیم بـه طوریکه شرایط زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} &\hat{y}_{12} = 3.5 - \alpha > 0 \;,\; \hat{y}_{22} = 4 - \alpha > 0 \;,\; \alpha \geq 0 \\ &\hat{x}_{12} = 20 + \beta \;,\; \hat{x}_{22} = 3 + \beta \;,\; \hat{x}_{32} = 6 + \beta \;,\; \beta \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

ماتریس اساسی پایه ای آشفته شده به صورت زیر می باشد.

$$\Delta B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

از طرفی

$$c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

و از آنجا

$$w^T = c_B^T B^{-1} = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2.25 \;\; 29)$$

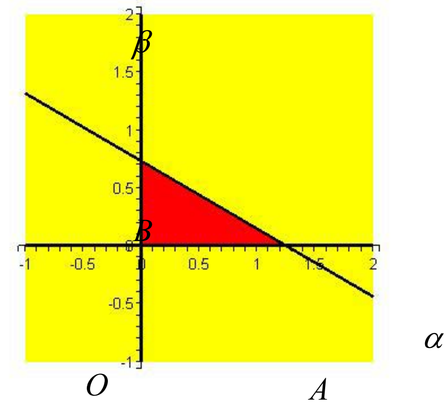
و با توجه به ( ۹ ) خواهیم داشت:

$$p = tr(B^{-1}\Delta B) = -(\alpha \sum_{t=1}^{2} b_{2t}^{-1} + \beta \sum_{t=1}^{3} b_{2,2+t}^{-1}) = 0.11102 \times 10^{-16}\alpha + 0.3333\beta \qquad (۱۹)$$

از آنجاییکه $1 + p > 0$ می باشد می توان از سیستم نامعادلات (۱۴.a) به نامعادلات زیر رسید.

$$2\alpha + 3.21668\beta \leq 2.50 \;,\; \alpha \geq 0 \;,\; \beta \geq 0 \qquad (۲۰)$$

مجموعه جواب سیستم نامعادلات (۲۰) مثلـث $OAB$ بـه رئـوس $O(0,0)$، $A(1.25,0)$ و $B(0,0.77720)$ می باشد که در شکل ( ۱ ) نشان داده شده است.

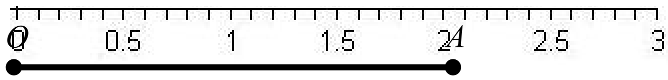



**شکل ۱:** ناحیه موجه تغییر $\beta,\alpha$

در صورتیکه $\alpha=\beta$ باشد با استفاده از ( $a$.۱۶ ) خواهیم داشت:

$$0 \le \alpha \le 2.166672 \tag{۲۱}$$

مجموعه جواب سیستم نامعادلات (۲۱) بازه $OA$ می باشد که در آن $O=0$ و $A=2.166672$ است و در شکل (۲) نشان داده شده است.




**شکل ۲:** مجموعه جواب

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله حفظ کارایی $DMU$ کارای تحت ارزیابی پس از اعمال آشفتگی ها در بردار خروجی به اندازه $\alpha \ge 0$ و بردار ورودی به اندازه $\beta \ge 0$ مورد توجه ما بود. شرایط مناسب برای آنکه $DMU$ کارا مورد نظر پس از اعمال تغییرات همچنان کارایی خود را حفظ نماید به دست آوردیم. برای هر $DMU$ ناحیه ای به دست آمد که می توان در آن ناحیه بردارهای ورودی و خروجی را آشفته نمود به طوری که شرایط لازم کارایی حفظ شود. هرچه ناحیه به دست آمده بزرگتر باشد حساسیت $DMU$ متناظر در برابر تغییرات بردارهای ورودی و خروجی کمتر است و پایداری آن در مقابل تغییرات بیشتر است. با استفاده از این ایده می توان $DMU$ های کارا را از نظر تحلیل حساسیت رتبه بندی نمود و برای پایداری آنها در برابر خطاهای ناشی از محاسبات کامپیوتری ارزش قایل شد.

| ورودی ها | | | خروجی ها | | |
|---|---|---|---|---|---|
| تعداد مشتری ها $\times$ ۱۰$^{۳}$ | هزینه فضای کاری $\times$ ۱۰$^{۶}$ | تعداد کارمندان | مبالغ وام $\times$ ۱۰$^{۶}$ | سپرده ها $\times$ ۱۰$^{۶}$ | شعبه |
| ۳ | ۴/۲ | ۵۰ | ۳ | ۶ | ۱ |
| ۶ | ۳ | ۲۰ | ۴ | ۳/۵ | ۲ |
| ۳ | ۵/۷۶ | ۷۰ | ۳ | ۳ | ۳ |
| ۶ | ۷ | ۲۰ | ۴ | ۵ | ۴ |
| ۳ | ۴ | ۳۰ | ۵ | ۶/ ۷۵ | ۵ |
| ۸ | ۶ | ۲۰ | ۷ | ۲ | ۶ |
| ۸ | ۷ | ۵۰ | ۶ | ۶ | ۷ |
| ۵ | ۴ | ۸۰ | ۵ | ۵ | ۸ |
| ۸ | ۶ | ۷۰ | ۳ | ۴ | ۹ |
| ۸ | ۷ | ۵۰ | ۸ | ۲ | ۱۰ |

**جدول ۱:** داده های مطالعه کاربردی

## منابع


[1] A. CHARNES, W.W.COOPER, *Preface to topics in data envelopment analysis*, Annals of Operations Research **2** (1985) 59 – 94

[2] A. CHARNES, W. W.COOPER, A.Y.LEWIN, L.M.SEIFORD (Eds.), *Data Envelopment Analysis: Theory , Methodology and Applications*, Kluwer Acad. Pub.,Boston , 1995.

[3]A.CHARNES,W.W.COOPER,B.GOLANY,L.M.SEIFORD,J.STUTZ,*Foundations of data envelopment analysisfor pareto – Koopmans efficient empirical production functions*, Journal of Econometrics,**30** ( 1985 ) 91-107

[4] L. M.SEIFORD, *Data envelopment analysis: the evolution of the state of the art* (1978- 1995), Journal of Productivity Analysis **7** (1996) 99 – 137.

[5] A. CHARNES, L.NERALIC, *Sensitivity analysis of the additive model in data envelopment analysis,* European Journal of Operational Research **48** (1990) 332-341

[6] L.NERALIC, *Sensitivity in data envelopment analysis for arbitrary perturbations of data,* Glansnik Matematički Ser. III **32 (52)** (1997) 315-335.

[7] G.H.Golub and C.F.van Loan, *Matrix Computation,* John Hopkins Univercity Press.Baltimore, Maryland, 1983.

[8] A.Charnes and L.Neralić,Sensitivity Analysis in Data Envelopment Analysis for the Case of Non-Discretionary Inputs and Outputs ,*Glansik Matematički Ser. III* **30** (50) (1995), 359-371.

[9] A.Charnes and L.Neralić, Sensitivity Analysis in Data Envelopment Analysis 1, *Glansik Matematički Ser. III* **24** (44) (1989), 211-226.

[10] A.Charnes and L.Neralić, Sensitivity Analysis in Data Envelopment Analysis 2, *Glansik Matematički Ser. III* **24** (44) (1989), 449-463.