حل معادله موج با استفاده از تقریب پاده

حمیرا امیر محمدی[۱*]، سیمین مسروری[۱]، مریم امیر محمدی[۲]
[۱]گروه ریاضی کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان
[۲]آموزش و پرورش رشت

چکیده

روش های عددی مختلفی برای حل معادله موج (معادله هذلولوی مرتبه دوم) با شرایط مرزی متفاوت ارایه داده می شود در این روش ها معادله با مشتقات جزیی مورد نظر با استفاده از تکنیک جداسازی معادله برحسب متغیر زمان، به یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود. تقریب پاده برای محاسبه تقریبی تابع نمایی ماتریسی موجود که در جواب معادله دیفرانسیل معمولی ایجاد شده، استفاده می شود و هم چنین خطا و پایداری آن نیز بررسی می گردد. با استفاده از روش جداسازی (تبدیل تقریب پاده به کسرهای جزیی) الگوریتم موازی برای حل معادله دیفرانسیل معمولی مطرح می شود و تعداد عملیات روش های سریال و موازی مقایسه می گردد.

کلمات کلیدی: معادله هذلولوی مرتبه دوم، تقریب پاده، الگوریتم موازی، الگوریتم سریال، پایداری.

۱ مقدمه

تقریب گویا برای تابع $f(x)$ روی فاصله $[a,b]$ از خارج قسمت دو چند جمله ای $Q_M(x),P_N(x)$ به ترتیب از درجه N ، M به صورت زیر به دست می آید.

$$R_K(x)=R_{M,N}(x)=\frac{P_N(\lambda)}{Q_M(x)}=\frac{a_\circ+a_1x+\cdots+a_Nx^N}{b_\circ+b_1x+\cdots+b_Mx^M}$$

درجه تقریب را با مجموع درجه چند جمله ای های $Q_M(x),P_N(x)$ یعنی $K=M+N$ تعریف می کنیم برای محاسبه $R_{M,N}(x)$ باید $K+۲$ پارامتر $a_0,\dots,a_N$ و $b_0,\dots,b_M$ را به دست آورد. روش های مختلفی برای محاسبه آن ها وجود دارد که یکی از این روش ها، روشی است که توسط پاده (Pade) ارایه شد. در این تقریب $K+2$ پارامتر به صورت زیر محاسبه می شود ابتدا b_0 را برابر یک فرض می کنیم و سپس $K+1$ پارامتر دیگر را به دست می آوریم به طوری که

$$f^{(s)}(0)=R_K^{(s)}(0)\qquad S=0,1,\dots,k \tag{۱}$$

*عهده‌دار مکاتبات

و برای محاسبه $a_i(i=0,1,\dots,N)$ ، $b_j(j=0,1,\dots,M)$ از بسط مک لورن تابع $f(x)$ استفاده می شود یعنی

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$$

و خطای محاسبه $f(x)-R_K(x)$ را محاسبه می کنیم.

$$Z(x)=f(x)-R_K(x)=f(x)Q_M(x)-P_N(x)$$

$$(\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j)(\sum_{j=0}^{M}b_jx^j)-\sum_{j=0}^{N}a_jx^j=\sum_{j=k-1}^{\infty}d_jx^j \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه (۱) کمترین درجه چند جمله ای $Z(x)$، $K+1$ است با متحد قرار دادن ضرایب جملات با درجه کمتر از $K+1$ در طرفین رابطه (۲)، K معادله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
&c_0-a_0=0\\
&b_1c_0-c_1-a_1=0\\
&b_2c_0+b_1c_1+c_2-a_2=0\\
&b_3c_0+b_2c_1+b_1c_2+c_3-a_3=0\\
&\vdots\\
&b_Nc_0+b_Nc_1+\cdots+c_N-a_N=0
\end{aligned} \qquad (۳)$$

و

$$\begin{aligned}
&b_Mc_{N-M+1}+b_{M-1}\,c_{N-M+2}+\cdots+b_1c_N+c_{N+1}=0\\
&b_Mc_{N-M+2}+b_{M-1}c_{N-M+3}+\cdots+b_1c_{N+1}+c_{N+2}=0\\
&\vdots\\
&b_Mc_N+b_{M-1}c_{N+1}+\cdots+b_1c_{N+M-1}+c_{N-M}=0
\end{aligned} \qquad (۴)$$

ابتدا از معادله (۳) پارامترهای b_1،.....، b_M را محاسبه کرده سپس با جای گذاری در رابطه a_0،....، a_N را به دست می آوریم.

۲ حل عددی معادله موج

معادله موج (معادله هذلولوی مرتبه دوم یک بعدی) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad 0\le x\le X \quad , t\ge 0 \tag{۵}$$

با شرایط اولیه $u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \qquad 0\le x\le X$

و شرایط مرزی $t\ge 0$ $\quad u(0,t)=u(X,t)=0$ فاصله $[0,X]$ را به $(K+1)$ قسمت مساوی با اندازه گام h تقسیم می کنیم:

$$(K+1)h=X \ ,x_i=ih, \qquad i=0,1,....,K$$

و طول گام متغیر زمان را l در نظر می گیریم پس $t_n=nl$ که n = 0،1،2،... .

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را با عملگر تفاضلات مرکزی تقریب می زنیم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u(x-h,t)-2u(x,t)+u(x+h,t)}{h^2}+O(h^2)$$

با جای گذاری در رابطه (۵) و قرار دادن نقاط داخلی شبکه در آن، معادله دیفرانسیل معمولی زیر با شرایط اولیه داده شده، ایجاد می شود:

$$u''_{t^2}(t)=c^2AU(t) \ ,U(0)=f, \quad U'_t(0)=g \tag{۶}$$

و در آن A ماتریس مرتبه K به صورت $A=h^{-2}trid(1,-2,1)$ است هم چنین $U(t)$ ، f و g بردارهایی از مرتبه K به صورت زیر می باشند.

$$U(t)=[u(x_1,t)\ ,u(x_2,t),...,u(x_K,t)]^t$$
$$g=[g(x_1),\ g(x_2)\ ,...,g(x_K)]^t$$
$$f=[f(x_1),f(x_2),...,\ f(x_K)]^t$$

از طرفی می دانیم جواب معادلات دیفرانسیل معمولی از نوع $y''-a^2y=0$ با شرایط $y(0)=c$ و $y'_x(0)=d$ به صورت زیر است:

$$y(x)=\frac{ca+d}{2a}e^{ax}+\frac{ca-d}{2a}e^{-ax}$$

فرم ماتریس آن با فرض $A=B^2$ به شکل زیر است.

$$U(t)=\frac{1}{2}(f+\frac{1}{c}B^{-1}g)\exp(ctB)+\frac{1}{2}(f-\frac{1}{c}B^{-1}g)\exp(-ctB)$$

می توان ثابت کرد رابطه فوق جواب مناسبی برای معادله دیفرانسیل (۶) است.

$$\exp(ctB) = I + ctB + \frac{c^2}{2!} t^2 B^2 + \cdots$$
$$\exp(-ctB) = I - ctB + \frac{c^2}{2!} t^2 B^2 + \cdots$$

از هر یک از توابع فوق دوبار مشتق می گیریم:

$$\frac{d^2}{dt^2}\exp(ctB) = c^2 B^2 + c^3 B^3 t + \cdots$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\exp(-ctB) = c^2 B^2 - c^3 B^3 t + \cdots$$

سمت راست معادله (۶) را با توجه به بسط های داده شده محاسبه می کنیم.

$$c^2 AU(t) = c^2 B^2 [\frac{1}{2}(f + \frac{1}{c} B^{-1} g)(I + ctB + \frac{c^2}{2!} t^2 B + \cdots) + \frac{1}{2}(f - \frac{1}{c} B^{-1} g)(I - ctB + \frac{c^2}{2!} t^2 B + \cdots)]$$
$$= \frac{1}{2}(f + \frac{1}{c} B^{-1} g)(c^2 B^2 + c^3 B^3 t + \cdots) + \frac{1}{2}(f - \frac{1}{c} B^{-1} g)(c^2 B^2 - c^3 B^3 t + \cdots)$$
$$= \frac{d^2}{dt^2} U(t) = \frac{1}{2}(f + \frac{1}{c} B^{-1} g) \frac{d^2}{dt^2}\exp(ctB) + \frac{1}{2}(f - \frac{1}{c} B^{-1} g) \frac{d^2}{dt^2}\exp(-ctB)$$

بنابراین $U(t)$ جواب معادله دیفرانسیل معمولی است و در رابطه بازگشتی زیر صدق می کند.

$$U(t+l) - [\exp(clB) + \exp(-clB)]U(t) + U(t-l) = 0 \qquad t = l, 2l, 3l, \ldots \qquad (۷)$$

با استفاده از تقریب پاده برای توابع نمایی ماتریسی، جواب را در هر مرحله زمانی میتوان محاسبه کرد.

باید توجه داشت که از رابطه (۷)، $U(2l)$، $U(3l)$ و... قابل محاسبه است اما ابتدا باید $U(l)$ را محاسبه کرد. که آن را نیز می توان از طریق بسط مک لورن با دقت های مختلف به دست آورد.

برای محاسبه $U(l)$ با دقت چهار، پنج جمله اول را اختیار می کنیم.

$$U(l) = U(0) + lU'(0) + \frac{l^2}{2!}U''(0) + \frac{l^3}{3!}U^{(3)}(0) + \frac{l^4}{4!}U^{(4)}(0) + O(l^5)$$

با توجه به شرایط اولیه

$$U(0) = f \;,\; U'(0) = g \;,\; U''(0) = c^2 AU(0) = c^2 B^2 f$$
$$U^{(3)}(0) = c^2 Ag \qquad (۸)$$
$$U^{(4)}(0) = c^4 A^2 f$$

با قرار دادن در رابطه (۸) نتیجه می شود.

$$U(l) = f + l g + \frac{l^2}{2!} c^2 Af + \frac{l^3}{3!} c^2 Ag + \frac{l^4}{4!} c^4 A^2 f + o(l^5)$$
$$= (I + \frac{l^2}{2!} c^2 A + \frac{1}{2!} c^4 l^4 A^2) f + l(I + \frac{1}{6} c^2 l^2 A) g + o(l^5) \qquad (۹)$$

رابطه فوق را به صورت زیر می نویسیم تا نیاز به محاسبه A^2 نباشد.

$$U(l)=[I+(P_1+iq_1)c^2l^2A][I+(P_1-iq_1)c^2l^2A]f+l(I+\frac{1}{6}c^2l^2A)g+o(l^5) \qquad (۱۰)$$

با متحد قرار دادن ضرایب جملات متشابه در (۹) و (۱۰) داریم $P_1=\frac{1}{4}\,,\,q_1=\frac{\sqrt{3}}{12}$

به همین ترتیب می توان $U(l)$ را با دقت بالاتر نیز محاسبه کرد.

بنابراین با داشتن $U(l)$ می توان $U(2l)$ و $U(3l)$ و... را با استفاده از رابطه (۷) به دست آورد.

حال در رابطه بازگشتی تقریب پاده را جایگزین تابع نمایی ماتریسی می کنیم. تقریب پاده (M,N) برای تابع e^{θ} به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$e^{\theta}\cong R_{M,N}(\theta)=\frac{P_N(\theta)}{Q_M(\theta)}=\frac{\prod_{k=1}^{N}(1-\gamma_K\theta)}{\prod_{m=1}^{M}(1-\delta_m\theta)}$$

بنابراین

$$e^{\theta}+e^{-\theta}=\frac{\prod_{k=1}^{N}(1-\gamma_K\theta)}{\prod_{m=1}^{M}(1-\delta_m\theta)}+\frac{\prod_{k=1}^{N}(1+\gamma_K\theta)}{\prod_{m=1}^{M}(1+\delta_m\theta)}$$

$$(۷-۲)=\frac{\prod_{K=1}^{N}(1-\gamma_K\theta)\prod_{m=1}^{M}(1+\delta_m\theta)+\prod_{k=1}^{N}(1+\gamma_K\theta)\prod_{m=1}^{M}(1-\delta_m\theta)}{\prod_{m=1}^{M}(1-\delta_m^2\theta^2)}$$

با فرض δ_m به صورت موهومی صورت و مخرج کسر رابطه فوق به صورت زیر در می آید.

$$\prod_{k=1}^{N}(1-\gamma_K\theta)\prod_{m=1}^{M}(1+\delta_m\theta)+\prod_{k=1}^{N}(1+\gamma_k\theta)\prod_{m=1}^{M}(1-\delta_m\theta)=2\prod_{k=1}^{K}(1+P_k\theta^2+iq_k\theta^2) \qquad (۱۱)$$

$$\prod_{m=1}^{M}(1-\delta_m^2\theta^2)=\prod_{m=1}^{M}(1-\mu_m\theta^2-iv_m\theta^2) \qquad (۱۲)$$

که با جای گذاری رابطه (۱۱) و (۱۲) در رابطه (۱۰) خواهیم داشت.

$$e^{\theta}+e^{-\theta}=2\prod_{k=1}^{K}(1+p_k\theta^2+iq_k\theta^2)\Big/\prod_{m=1}^{M}(1-\mu_m\theta^2-iv_m\theta^2)$$

فرم ماتریسی رابطه فوق به صورت زیر است:

$$\exp(clB)+\exp(-clB)=2\,[\prod_{m=1}^{M}(I-\mu_m c^2l^2A-iv_m c^2l^2A)]^{-1}\prod_{k=1}^{K}(I+P_k c^2l^2A+iq_k c^2l^2A)$$

از رابطه فوق در رابطه بازگشتی (۷) داریم:

$$U(t+l)-2[\prod_{m=1}^{M}(I-\mu_m c^2 l^2 A - iv_m c^2 l^2 A)]^{-1}\prod_{k=1}^{K}(I+P_k c^2 l^2 A + iq_k c^2 l^2 A)U(t)+U(t-l)=0$$

$$t=l,2l,...$$

حال $U(t+l)$ با دو روش سریال و موازی به دست خواهیم آورد.

۳ روش سریال

در روش سریال داریم:

$$\prod_{m=1}^{M}(I-\mu_m c^2 l^2 A - iv_m c^2 l^2 A)\ U(t+l)=2\prod_{k=1}^{K}(I+P_k c^2 l^2 A + iq_k c^2 l^2 A)\ U(t)$$
$$-\prod_{m=1}^{M}(I-\mu_m c^2 l^2 A - iv_m c^2 l^2 A)\ U(t-l)$$

$U(t+l)$ در طی سه مرحله زیر محاسبه می شود.

مرحله اول:

$$V_0=U(t-l)$$

$$V_j=(I-\mu_{M-j+1}c^2 l^2 A - iV_{m-j+1}c^2 l^2 A)v_{j-1} \qquad j=1,2,...,M$$

مرحله دوم:

$$B_0=U(t)$$

$$B_j=(I+P_{K-j+1}c^2 l^2 A + iq_{K-j+1}c^2 l^2 A)B_{j-1} \qquad j=1,2,...,K$$

مرحله سوم:

$$\alpha_0=2B_K-V_M$$

$$(I-\mu_j c^2 l^2 A - iV_j c^2 l^2 A)\ \alpha_j=\alpha_{j-1} \qquad j=1,2,...,M$$

در نتیجه $U(t+l)=\alpha_M$ می باشد.

٤ روش موازی

در روش موازی برای تقریب پاده (M,N)، اگر $M>N$ باشد.

می دانیم.

$$e^{\theta}\cong R_{M,N}(\theta)=\sum_{i=1}^{q_1}\frac{w_i}{(1-\frac{1}{c_i}\theta)}+2\sum_{i=q_1+1}^{q_1+q_2}\mathrm{Re}\ (\frac{w_i}{1-\frac{1}{c_i}\theta}) \qquad (۱۳)$$

که در آن

$$w_i=\frac{-p_k(c_i)}{c_i Q_M(c_i)} \qquad , \quad i=1,2,...,q_1+q_2$$

هم چنین نشان دادیم

$$e^{\theta}+e^{-\theta}=2\prod_{k=1}^{K}(1+p_k\theta^2+iq_k\theta^2)\Big/\prod_{m=1}^{M}(1-\mu_m\theta^2-iv_m\theta^2)=S_{M,K}(\theta^2)=\frac{\hat{P}_K(\theta^2)}{\hat{Q}_M(\theta^2)}$$

رابطه (۱۳) را برای $S_{M,K}(\theta^2)$ به کار می بریم.

$$S_{M,K}(\theta^2)=\sum_{i=1}^{q_1}\frac{\hat{V}_i}{1-\frac{1}{c_i^2}\theta^2}+2\sum_{i=q_1+1}^{q_1+q_2}\mathrm{Re}\,(\frac{\hat{V}_i}{1-\frac{1}{c_i^2}\theta^2})$$

که

$$\hat{V}=\frac{-P_K(c_i^2)}{c_i^2 Q_M(c_i^2)} \qquad i=1,2,\dots,q_1+q_2$$

رابطه فوق در حالت ماتریسی به صورت زیر است:

$$\exp\ (clB)+\exp\ (-clB)=\sum_{m=1}^{q_1}\hat{V}_m(I-\mu_m c^2l^2A-iV_m c^2l^2A)^{-1}$$

$$+2\,\mathrm{Re}\sum_{m=q_1+1}^{q_1+q_2}\hat{v}_m(I-\mu_m c^2l^2A-iv_m c^2l^2A)^{-1}$$

با قرار دادن رابطه اخیر در رابطه (۷) داریم

$$U(t+l)-[\sum_{m=1}^{q_1}\hat{V}_m(I-\mu_m c^2l^2A-iV_m c^2l^2A)^{-1}+$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{i=q_1+1}^{q_1+q_2}\hat{v}_m(I-\mu_m c^2l^2A-iv_m c^2l^2A)^{-1}]U(t)+U(t-l)=0 \qquad t=l,2l,\dots$$

فرض می کنیم

$$\hat{V}_m(I-\mu_m c^2l^2A-iV_m c^2l^2A)^{-1}U(t)=\varphi_m \qquad m=1,2,\dots,q_1+q_2$$

یا

$$\hat{V}_m U(t)=(I-\mu_m c^2l^2A-iV_m c^2l^2A)\varphi_m \qquad m=1,2,\dots q_1+q_2 \qquad (۱۴)$$

در q_1+q_2 مرحله به طور موازی φ_m ها محاسبه می شود و $U(t+l)$ را از رابطه زیر به دست می آوریم.

$$U(t+l)=\sum_{m=1}^{q_1}\varphi_m+2\,\mathrm{Re}\sum_{m=q_1+1}^{q_1+q_2}\varphi_m-U(t-l) \qquad t=l,2l,\dots$$

در تقریب پاده اگر $M=N$ باشد

$$e^{\theta}\simeq R_{M,M}(\theta)=\frac{P_M(\theta)}{Q_M(\theta)}=(-1)^M+\frac{r_{M-1}(\theta)}{Q_{M-1}(\theta)} \qquad (۱۵)$$

یادآوری می شود اگر در تقریب پاده $M=N$ باشد آن گاه $Q_M(\theta)=P_M(-\theta)$ است.

پس رابطه (۱۵) به صورت زیر در می آید.

$$e^{\theta}\cong R_{M,M}(\theta)=(-1)^M+\frac{r_{M-1}(\theta)}{p_M(\theta)}$$

$$e^{\theta}+e^{-\theta}=2(-1)^M+\frac{r_{M-1}(\theta)P_M(\theta)+r_{M-1}(-\theta)P_M(-\theta)}{P_M(\theta)P_M-\theta)}=2(-1)^M+\frac{\hat{P}_M(\theta^2)}{\hat{Q}_M(\theta^2)}$$

می دانیم

$$e^{\theta} \cong (-1)^M + \sum_{i=1}^{q_1} \frac{\hat{w}_i}{(1-\frac{1}{c_i}\theta)} + \sum_{i=q_1-1}^{q_1-q_2} \frac{\hat{w}_i}{(1-\frac{1}{c_i}\theta)}$$

که در آن

$$\hat{w}_i = \frac{r_{M-1}(c_i)}{c_i P'_M(-c_i)} \qquad i = 1,2,\ldots,q_1+q_2$$

بنابراین

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = 2(-1)^M + \sum_{i=1}^{q_1} \frac{\hat{v}_i}{(1-\frac{1}{c_i^2}\theta^2)} + 2\,\mathrm{Re}\sum_{i=q_1+1}^{q_1+q_2} \frac{\hat{v}_i}{(1-\frac{1}{c_i^2}\theta^2)}$$

که در آن

$$\hat{v}_i = \frac{\hat{P}_M(c_i^2)}{c_i^2 \hat{Q}_M(c_i^2)} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,q_1+q_2$$

حالت ماتریس رابطه فوق به صورت زیر در می آید:

$$\exp(-clB) + \exp(clB) = 2(-1)^M I + \sum_{m=1}^{q_1} \hat{v}_m (I - \mu_m c^2 l^2 A^2 - i v_m c^2 l^2 A)^{-1}$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\sum_{m=q_1+1}^{q_1+q_2} (I - \mu_m c^2 l^2 A^2 - i v_m c^2 l^2 A)^{-1}$$

با جای گذاری در رابطه بازگشتی خواهیم داشت:

$$U(t+l) - [2(-1)^M I + \sum_{m=1}^{q_1} \hat{v}_m (I - \mu_m c^2 l^2 A - i v_m c^2 l^2 A)^{-1}$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\sum_{m=q_1+1}^{q_1+q_2} \hat{v}_m (I - \mu_m c^2 l^2 A - i v_m c^2 l^2 A)^{-1}]U(t) + U(t-l) = 0 \quad t = l, 2l, \ldots$$

φ_m $(m=1,2,\ldots, q_1+q_2)$ از رابطه زیر به دست می آید

$$U(t+l) = \sum_{m=1}^{q_1} \varphi_m + 2\,\mathrm{Re}\sum_{m=q_1+1}^{q_1+q_2} \varphi_m - U(t-l) \qquad t = l, 2l, \ldots$$

و لذا داریم:

$$U(t+l) = 2(-1)^M U(t) + \sum_{m=1}^{q_1} \varphi_m + 2\,\mathrm{Re}\sum_{m=q_1+1}^{q_1+q_2} \varphi_m - U(t-l) \qquad t = l, 2l, \ldots$$

۵ پایداری به روش ماتریسی

از رابطه بازگشتی

$$U(t+l)-[\exp(\psi lB)+\exp(-\psi lB)]\,U(t)+U(t-l)=0 \qquad t=l,2l,...$$

و $e^n=U(t_n)-U^*(t_n)$ که در آن $U^*(t_n)$ جواب واقعی در زمان t_n می باشد داریم

$$e^{n+1}-[\exp(\psi lB)+\exp(-\psi lB)]\,e^n+e^{n-1}=0 \qquad n=1,2,...$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} e^{n+1} \\ e^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \exp(\psi lB)+\exp(-\psi lB) & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^n \\ e^{n-1} \end{bmatrix}$$

که می توان آن را به صورت $V^{n+1}=EV^n$ در نظر گرفت و برای پایداری به روش ماتریسی باید شرط $|\lambda_E|<1$ برقرار باشد.

$$\det(E-\lambda_E I)=\begin{vmatrix} \exp(\psi l\lambda_A^{1/2})+\exp(-\psi l\lambda_A^{1/2}-\lambda_E) & -1 \\ 1 & -\lambda_E \end{vmatrix}=0$$

در این رابطه $\lambda_A=-\dfrac{4}{h^2}Sin^2(\dfrac{s\pi}{2(K+1)})$ که $S=1$ ،...، N است. بنابراین چند جمله ای مشخصه به صورت زیر است.

$$\lambda_E^2-[\exp(\psi\, l\lambda_A^{1/2})+\exp(-\psi l\lambda_A^{1/2})]\,\lambda_E+1=0$$

با فرض $e^\theta=\dfrac{p_N(\theta)}{Q_M(\theta)}$ داریم.

$$Q_M(\psi\; l\;\lambda_A^{1/2})\,Q_M(-\psi\; l\;\lambda_A^{1/2})\,\lambda_E^2-[P_K(\psi\; l\lambda_A^{1/2})\,Q_M(-\psi l\lambda_\lambda^{1/2})+P_K(-\psi l\lambda_A^{1/2})Q_M(\psi l\lambda_A^{1/2})\,\lambda_E$$

$$+Q_M(\psi l\lambda_A^{1/2})Q_M(-\psi l\lambda_A^{1/2})=0$$

در جدول زیر حوزه پایداری برای N و M های مختلف نشان داده شده است.

تقریب پاده (M,N)	حوزه پایداری
(2,0)	پایدار نامشروط
(2,1)	پایدار نامشروط
(3,0)	پایدار نامشروط
(2,2)	پایدار نامشروط
(2,3)	$r<3.27$
(2,4)	$r<2.74$

جدول (۱)

۶ خطا

فرم کلی خطای برشی موضعی معادله هذلولوی مرتبه دوم (موج) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ با شرط اولیه و مرزی مشخص شده که از فرمول تفاضلات مرکزی برای تغییر مکان استفاده کرده این گونه است

$$\frac{1}{12} c^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c_s l^{s-2} \frac{\partial^S u}{\partial t^S}$$

که در آن $s=M+N+1$ اگر $M+N$ فرد باشد و $s=M+N+2$ اگر $M+N$ زوج باشد.

جمله $\frac{1}{12} c^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ به صورت زیر به دست آمده است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2}$$

بسط تیلور $u(x-h,t)$ و $u(x+h,t)$ را حول نقطه $u(x,t)$ در نظر می گیریم

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}U(x,t) + \cdots$$

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t) + \cdots$$

پس

$$\frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t) + \cdots.$$

بنابراین جمله خطای متغیر مکان $\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t)$ می باشد و چون در معادله هذلولوی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ دارای ضرایب c^2 است لذا جمله خطای متغیر مکان به فرم $\frac{1}{12}h^2 c^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t)$ خواهد بود و مرتبه دقت آن از نظر تغییر مکانی $O(h^2)$ است. جمله خطای متغیر زمان بدین گونه حاصل شده است که هنگامی تقریب پاده (M,N) را جایگزین $\exp(clB) + \exp(-clB)$ می کنیم. سطر i ام معادله

$$\frac{1}{l^2}[U(t_{n-1}) - (R_{M,N}(-clB) + R_{M,N}(clB)]\ U(t_n) + U(t_{n-1})] = 0$$

تقریب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ در نقطه (x_i, t_n) می باشد از طرفی تقریب پاده (M,N) دارای مرتبه دقت $O(l^{M+N+1})$ می باشند بنابراین خواهیم داشت:

$$e^{\theta} - \frac{P_N(\theta)}{Q_M(\theta)} \cong c_q \theta^q + c_{q+1}\theta^{q+1}$$

و

$$e^{-\theta} - \frac{P_N(-\theta)}{Q_M(-\theta)} \cong c_q (-\theta)^q + c_{q+1}(-\theta)^{q+1}$$

و در نتیجه

$$(e^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{P_N(\theta)}{Q_M(\theta)} + \frac{P_N(-\theta)}{Q_M(-\theta)}\right) = c_q(\theta^q + (-\theta)^q) + c_{q+1}(\theta^{q+1} + (-\theta)^{q+1}) \qquad (۱۶)$$

که در آن $q=M+N+1$ رابطه (۱۶) را با توجه به زوج یا فرد بودن مقدار $(M+N)$ می توان به صورت زیر نمایش داد.

الف) اگر $(M+N)$ زوج باشد در نتیجه $q=M+N+1$ فرد خواهد بود و جمله اول صفر می گردد و بنابراین

$$(e^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{P_N(\theta)}{Q_M(\theta)} + \frac{P_N(-\theta)}{Q_M(-\theta)}\right) = 2c_{q-1}\theta^{q-1} \qquad (۱۷)$$

ب) اگر $M+N$ فرد باشد در نتیجه $q=M+N+1$ زوج خواهد بود و بنابراین رابطه (۱۶) به صورت زیر است.

$$(e^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{P_N(\theta)}{Q_M(\theta)} + \frac{P_N(-\theta)}{Q_M(-\theta)}\right) = 2c_q\theta^q \qquad (۱۸)$$

به طورکلی روابط (۱۷) و (۱۸) را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$(e^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{P_N(\theta)}{Q_M(\theta)} + \frac{P_N(-\theta)}{Q_M(-\theta)}\right) = c_S\theta^S$$

الف) اگر $M+N$ زوج باشد در آن صورت $s=M+N+2$

ب) اگر $M+N$ فرد باشد درآن صورت $s=M+N+1$ و در نتیجه جمله خطای

$$\frac{1}{l^2}[U(t_{n-1}) - (R_{M,N}(clB) + R_{M,N}(-clB))U(t_n) + U(t_{n-1})] = 0$$

نسبت به متغیر زمان (با همان حالات در مورد s) به صورت زیر است.

$$\frac{1}{l^2}[c_s l^s \frac{\partial^s u}{\partial t^s}] = c_s l^{s-2} \frac{\partial^s u}{\partial t^s}$$

بنابراین مرتبه دقت زمانی آن $O(l^{S-2})$ است و به طورکلی مرتبه دقت این روش $O(h^2 + l^{S-2})$ می باشد.

۷ نتیجه گیری

برای محاسبه $U(t+l)$ ابتدا تعداد عملیات محاسبه φ_m را به دست می‌آوریم و سپس در (q_1+q_2) ضرب می کنیم.

حجم عملیات محاسبه φ_m

۱- محاسبه $\hat{v}_m U(t)$: K عمل ضرب

۲- محاسبه ماتریس سه قطری $(I-\mu_m c^2 l^2 A - i v_m c^2 l^2 A)$: (۶ K + ۲) عمل ضرب و (۴ K + ۲) عمل جمع

۳ـ نهایتاً محاسبه φ_m از حل دستگاه $(I-\mu_m c^2 l^2 A - i v_m c^2 l^2 A)\varphi_m = \hat{v}_m U(t)$: (۵k-۴) عمل ضرب (۵k − ۴) عمل جمع و (۴k − ۱) عمل تقسیم.

حجم عملیات بر روی یک کامپیوتر موازی با (K پردازنده)

حجم عملیات محاسبه φ_m:

۱ ـ محاسبه $\hat{v}_m U(t)$: ۱ عمل ضرب

۲ ـ محاسبه ماتریس $(I-\mu_m c^2 l^2 A - i v_m c^2 l^2 A)$: ۶ عمل ضرب و ۴ عمل جمع

۳ ـ محاسبه φ_m: $12\log_2^k + 2$ عمل ضرب و $5\log_2^k$ عمل جمع و ۴ عمل تقسیم

پس زمان اجرای روش سریال $t_1 = O(k)$ و زمان اجرای روش موازی $t_k = O(\log_2^k)$ است.

بنابراین تسریع و بازدهی به صورت زیر است.

$$S(1,k) = \frac{t_1}{t_k} = \frac{O(k)}{O(\log_2^k)}$$

$$e = \frac{t_1}{k t_k} = \frac{O(k)}{kO(\log_2^k)} = \frac{1}{O(\log_2^k)}$$

منابع

[1] W. A. Ames(1992),"Numerical methods for partial differential equations" , Academic prees, INC.

[2] N. A. Arigu, Twizell. E.H. and Gumel. B.A.(1995), "Parallel algorithms for second – order hyperbolie equation" , parallel algorithms and application, Vol 5, PP119-128.

[3] M. A. Arigu, E. H. Twizell and B. A. Gumel. (1996), "Sequential and parallel methods for solving first – order hyperbolic equation" Communications in numerical methods in engineering, Vol 12, PP557-568.

[4] R. L. Burden and D. J. Faries(1997), "Numerical analysis", pacific Grove, calif.

[5] R. Miller (2000), Lecture Notes, "Introduction a parallel algorithms and archi tectures", Overview of parallel algorithms & Architectures, http:// www. cs. buffalo. edu/pub/www/faculty/ miller/ PH-Supplements /PAALGARC.pdf.

[6]G. D. Smith (1993),"Numerical Solution of partical differential equation", Oxford University press.

[7]M. A. Strauss (1992), "partial differential equation an introduction", John Wiley & sons.

[8] E. Sturler (2001), "Numerical methods for partial differential equations", http: //www.cse.uiuc. edu/cs355/Lectures/NPDE 14h.pdf.

[9] R. S. Varga (2000), "Matrix interative analysis", Berlin Springer Verlag.

[10] J.Zhu (1994), "Solving partial differential equations on parallel computer", world scientific.