بهینه سازی تابع هدف خطی با توجه به محدودیت های معادلات فازی با عملگر Yager's union

محمد خوینی[۱*]، اسماعیل خرّم[۲]
[۱] دانشکده علوم، دانشگاه رازی کرمانشاه
[۲] دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله، یک مدل بهینه سازی با یک تابع هدف خطی با توجه به یک دستگاه معادلات رابطه فازی ارایه می شود. مجموعه جواب این قبیل از معادلات رابطه فازی، یک مجموعه غیر محدب است. در این مقاله، ابتدا روی مجموعه جواب شدنی بحث می کنیم و سپس به مساله بهینه سازی یک تابع هدف خطی می پردازیم که برای حل این مساله، ابتدا آن را به یک مساله برنامه ریزی صحیح ۱–۰ تبدیل کرده و سپس آن را با تکنیک شاخه و کران حل می نماییم. قضایا و لم های مورد نیاز در این مقاله بیان می شود و سرانجام به منظور روشن شدن روش ارایه شده، مثالی واقعی ارایه می شود.

کلمات کلیدی: بهینه سازی تابع هدف خطی، معادلات رابطه فازی، روش شاخه و کران، برنامه ریزی صحیح.

۱ مقدمه

Yager اجتماع مجموعه‌های فازی را به صورت $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x))|x\in X\}$ تعریف کرد [۱] که در آن $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعهٔ فازی و X یک مجموعه مرجع است و

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\min\left\{1,(\mu_{\tilde{A}}{}^{P}(x)+\mu_{\tilde{B}}{}^{P}(x))^{\frac{1}{P}}\right\},\ P\geq 1$$

عملگر اجتماع وی برای $P\to\infty$ به عملگر ماکزیمم همگراست و همچنین این عملگر برای همه مقادیر P، دارای خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری است. در این مقاله، عملگر Yager's union برای حالت خاص $P=1$ در نظر گرفته می شود.

فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ که $0\leq a_{ij}\leq 1$، یک ماتریس فازی و $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$ که $0\leq b_j\leq 1$ یک بردار فازی n- بعدی باشد، آن گاه دستگاه معادلات رابطه ی فازی زیر را به وسیله ی A و b تعریف می کنیم:

$$x^T \mathrm{O} A=b^T \qquad (1)$$

---
[*] عهده‌دار مکاتبات

که در آن $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^T$، $0\le x\le 1$ یک بردار فازی $m-$ بعدی و "O" عملگر Yager's union برای حالت $P=1$ است، یعنی:

$$\mathrm{O}:\max_{i=1,2,\ldots,m}\left\{\min\left\{1,\,x_i+a_{ij}\right\}\right\}=b_j \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

به عبارت دیگر، ما سعی می‌کنیم یک بردار جواب $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^T$ را با $0\le x_i\le 1$ پیدا کنیم به طوری که:

$$\max_{i=1,2,\ldots,m}\left\{\min\left\{1,\,x_i+a_{ij}\right\}\right\}=b_j \qquad (j=1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

حل معادلات رابطه ی فازی، تاکنون مورد توجه بسیاری از محققین بوده است [۲ − ۵ , ۷ − ۱۶].

یکی از خصوصیات قابل توجه این گونه مسایل، مجموعه ی شدنی آنهاست که در حالت کلی مجموعه‌ای غیر محدب است. بنابراین روش های معمولی از قبیل روش سیمپلکس یا روش نقطه ی داخلی برای حل این گونه مسایل به کار نمی روند. این مشخصه نشان می‌دهد که تفاوت‌های بسیاری بین این گونه مسایل و مسایل برنامه‌ریزی خطی اولیه وجود دارد [۶].

همچنین ثابت شده است که مجموعه ی شدنی معادلات رابطه فازی $x^T\mathrm{O}A=b^T$ برای بعضی از عملگرهای فازی، می‌تواند برحسب یک جواب ماکزیمم و تعداد متناهی جواب می‌نیمم تعیین شود [۳ , ۷ , ۸ , ۱۷ − ۲۰].

در این مقاله ابتدا مجموعه شدنی را مشخص می‌کنیم و سپس به بهینه‌سازی یک تابع هدف خطی روی این مجموعه شدنی می‌پردازیم.

۲ آشنایی با مشخصه مجموعه شدنی

قرار می‌دهیم:

$$I=\{1,2,\ldots,m\}$$
$$J=\{1,2,\ldots,n\}$$
$$X=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^T\in\mathbb{R}^m \,\middle|\, 0\le x_i\le 1,\ \forall i\in I\right\}$$

و $X\left[A,b^T\right]=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^T\in\mathbb{R}^m \,\middle|\, x^T\mathrm{O}A=b^T,\ 0\le x\le 1\right\}$ را مجموعه تمام جواب های شدنی مساله (۱) در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱

الف) بردار $\hat{x}\in X\left[A,b^T\right]$ یک جواب ماکزیمم است هرگاه:

$$x\le\hat{x} \qquad \left(\forall x\in X\left[A,b^T\right]\right)$$

ب) بردار $\breve{x}\in X\left[A,b^T\right]$ یک جواب مینیمم است هرگاه از $x\le\breve{x}$ نتیجه بگیریم که:

$$x = \breve{x} \qquad \left(\forall x \in X\left[A, b^T\right]\right)$$

حال مساله زیر را در نظر می‌گیریم: (برای یک j ثابت)

$$x^T \mathrm{O} a_j = b_j \tag{۳}$$

$$\Rightarrow \max_{i \in I} \left\{ \min \left\{ ۱, x_i + a_{ij} \right\} \right\} = b_j$$

که در آن a_j، ستون j ام ماتریس A است.

یک بردار $x \in X$ در مساله (۳) صدق می‌کند (یا $x \in j_{X\left[A, b^T\right]}$) اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} \forall i \in I : \min\left\{۱, x_i + a_{ij}\right\} \le b_j & (a) \\ \exists i \in I : \min\left\{۱, x_i + a_{ij}\right\} = b_j & (b) \end{cases} \tag{٤}$$

تعریف ۲ فرض می‌کنیم:

$$I_j^{۱} = \left\{ i \in I \middle| a_{ij} > b_j \right\}$$
$$I_j^{۲} = \left\{ i \in I \middle| a_{ij} = b_j \right\}$$
$$I_j^{۳} = \left\{ i \in I \middle| a_{ij} < b_j \right\}$$

و همچنین تعریف می‌کنیم:

$$J_{۱} = \left\{ j \in J \middle| b_j < ۱, I_j^{۱} \ne \varnothing \right\}$$
$$J_{۲} = \left\{ j \in J \middle| b_j < ۱, I_j^{۱} = \varnothing, I_j^{۲} \ne \varnothing \right\}$$
$$J_{۳} = \left\{ j \in J \middle| b_j < ۱, I_j^{۱} = I_j^{۲} = \varnothing \right\}$$
$$J_{٤} = \left\{ j \in J \middle| b_j = ۱, I_j^{۲} \ne \varnothing \right\}$$
$$J_{٥} = \left\{ j \in J \middle| b_j = ۱, I_j^{۲} = \varnothing \right\}$$

لم ۱ اگر $j \in J_{۱}$ آن گاه مساله $x^T \mathrm{O} a_j = b_j$ نشدنی است.

اثبات: اثبات واضح است.

لم ۲ فرض می‌کنیم $x^T \mathrm{O} a_j = b_j$ و $j \in J_{۲} \cup J_{۳}$. بردار $x \in X$ جواب شدنی است اگروتنها اگر

$$If \;\; j \in J_{۲} \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in I_j^{۲} : x_i = ۰ \\ \forall i \in I_j^{۳} : x_i \le b_j - a_{ij} \end{cases}$$

و

$$If \quad j \in J_3 \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in I_j^{3} = I : x_i \le b_j - a_{ij} \\ \exists i \in I_j^{3} = I : x_i = b_j - a_{ij} \end{cases}$$

اثبات: اثبات با توجه به روابط (a) و (b) به دست می‌آید.

لم۳ فرض می‌کنیم که در مساله (۳)، $j \in J_2$ باشد. در این صورت بردارهای $j_{\hat{x}}$ و $j_{\check{x}}$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند، به ترتیب جواب های ماکزیمم و می‌نیمم مساله (۳) هستند:

$$\forall i \in I : j_{\hat{x}_i} = \begin{cases} b_j - a_{ij} & , i \in I_j^{3} \\ 0 & , i \in I_j^{2} \end{cases} \qquad \text{که در آن} \quad j_{\hat{x}} = (j_{\hat{x}_1}, j_{\hat{x}_2}, \ldots, j_{\hat{x}_m})^T$$

و

$$\forall i \in I : j_{\check{x}_i} = 0 \qquad \text{که در آن} \quad j_{\check{x}} = (j_{\check{x}_1}, j_{\check{x}_2}, \ldots, j_{\check{x}_m})^T$$

اثبات: اثبات با توجه به رابطه (۶) در لم (۲) و تعریف (۱) به دست می‌آید.

لم ٤ فرض می‌کنیم که در مساله (۳)، $j \in J_3$ باشد، در این صورت بردار $j_{\hat{x}}$ و بردارهای $j_{\check{x}(i)}$ $(\forall i \in I = I_j^{3})$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند، به ترتیب جواب ماکزیمم و جواب های می‌نیمم مساله (۳) هستند:

$$\forall i \in I = I_j^{3} : j_{\hat{x}_i} = b_j - a_{ij} \qquad \text{که در آن} \quad j_{\hat{x}} = (j_{\hat{x}_1}, j_{\hat{x}_2}, \ldots, j_{\hat{x}_m})^T$$

و به ازای هر $i \in I = I_j^{3}$:

$$\text{که در آن} \quad j_{\check{x}(i)} = (j_{\check{x}(i)_1}, j_{\check{x}(i)_2}, \ldots, j_{\check{x}(i)_m})^T$$

$$\forall k \in I = I_j^{3} : j_{\check{x}(i)_k} = \begin{cases} b_j - a_{ij} & , k = i \\ 0 & , k \ne i \end{cases}$$

اثبات: اثبات با توجه به رابطه (۷) در لم (۲) و تعریف (۱) به دست می‌آید.

لم ٥ مساله (۳) را در نظر می گیریم.

الف) اگر $j \in J_4$ آن گاه هر بردار $x \in X$ یک جواب شدنی مساله (۳) است.

ب) اگر $j \in J_5$ آن گاه هر بردار $x \in X$ یک جواب شدنی مساله (۳) است اگر و تنها اگر

$\exists i \in I_j^{3} : x_i \ge 1 - a_{ij}$

اثبات: اثبات با توجه به روابط (a) و (b) به دست می‌آید.

لم ٦ مسألهٔ (۳) را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که $j \in J_4$ باشد. در این صورت بردارهای $j_{\hat{x}}$ و $j_{\check{x}}$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند، به ترتیب جواب ماکزیمم و جواب می‌نیمم مساله (۳)هستند:

$\forall i \in I = I_j^{۲} \bigcup I_j^{۳} : j_{\hat{x}_i} = ۱$ که در آن $j_{\hat{x}} = (j_{\hat{x}_1}, j_{\hat{x}_2}, \ldots, j_{\hat{x}_m})^T$

و

$j_{\breve{x}} = (j_{\breve{x}_1}, j_{\breve{x}_2}, \ldots, j_{\breve{x}_m})^T$ که در آن $\forall i \in I = I_j^{۲} \bigcup I_j^{۳} : j_{\breve{x}_i} = ۰$

اثبات: اثبات با توجه به قسمت (الف) در لم (۵) و تعریف (۱) به دست می‌آید.

لم ۷ مسأله (۳) را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که $j \in J_۵$ باشد. در این صورت بردار $j_{\hat{x}}$ و بردارهای $j_{\breve{x}(i)}$ $(\forall i \in I = I_j^{۳})$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند، به ترتیب جواب ماکزیمم و جواب های می‌نیمم مساله (۳) هستند:

$j_{\hat{x}} = (j_{\hat{x}_1}, j_{\hat{x}_2}, \ldots, j_{\hat{x}_m})^T$ که در آن $\forall i \in I = I_j^{۳} : j_{\hat{x}_i} = ۱$

و به ازای هر $i \in I = I_j^{۳}$:

$j_{\breve{x}(i)} = (j_{\breve{x}(i)_1}, j_{\breve{x}(i)_2}, \ldots, j_{\breve{x}(i)_m})^T$ که در آن

$$\forall k \in I = I_j^{۳} : j_{\breve{x}(i)_k} = \begin{cases} ۱ - a_{ij} & , k = i \\ ۰ & , k \neq i \end{cases}$$

اثبات: اثبات با توجه به قسمت (ب) در لم (۵) و تعریف (۱) به دست می‌آید.

قضیه ۱ مسأله (۳) را در نظر می گیریم که در آن $j \notin J_1$.

فرض می کنیم $j_{X[A,b^T]} = \{x \in X | x^T \mathrm{O} a_j = b_j\}$ آن گاه:

$$j_{X[A,b^T]} = \bigcup_{i \in I = I_j^{۲} \bigcup I_j^{۳}} [j_{\breve{x}(i)}, j_{\hat{x}}]$$

اثبات: به اثبات قضیه (۱) در [۱۷] مراجعه شود.

۳ مشخص سازی مجموعه شدنی

تعریف ۳ فرض می کنیم $I_J = I_{j_1}^{۳} \times I_{j_2}^{۳} \times \ldots \times I_{j_m}^{۳}$ که در آن $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$، $j_1, j_2, \ldots, j_m \in J_۴ \bigcup J_۵$ و $m \leq n$.

بردار $m-$بعدی $e = (e(j_1), e(j_2), \ldots, e(j_m))$ را تعریف می کنیم به طوری که:

(توجّه شود که وقتی $j \in J_۴ \bigcup J_۵$، آن گاه $I_j^{۳} = I$.)

$e(j_i) \in I_{j_i}^{۳}$

تعریف ٤ تعریف می کنیم:

$\hat{x} = \min_{j \in J} \{j_{\hat{x}}\}$

اکنون بردار $m-$بعدی $e_x = ((e_x)_1, (e_x)_2, \ldots, (e_x)_m)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall i \in I : (e_x)_i = \begin{cases} \max\limits_{j \in J_e(i)} \left\{ b_j - a_{ij} \right\} & , J_e(i) \neq \varnothing \\ ۰ & , J_e(i) = \varnothing \end{cases}$$

که در آن $J_e(i) = \left\{ j \in J_۳ \cup J_۵ \left| e(j) = i \right. \right\}$. همچنین فرض می کنیم:

$$\bar{X} = \left\{ e_x \left| e \in I_J \right. \right\}$$

نتیجه ۱ $X_\cdot \left[A, b^T \right] \subseteq \bar{X}$

اثبات: اثبات واضح است.

تعریف ۵ ماتریس $\tilde{A}$ یک ماتریس هم ارز با ماتریس A گفته می شود اگر و تنها اگر

$$X \left[\tilde{A}, \tilde{b^T} \right] = X \left[A, b^T \right]$$

به طور مشابه، مسأله $x^T \mathrm{O} \tilde{A} = \tilde{b^T}$ یک مساله هم ارز با مساله $x^T \mathrm{O} A = b^T$ گفته می شود اگر و تنها اگر ماتریس $\tilde{A}$ یک ماتریس هم ارز با ماتریس A باشد.

تعریف ٦ فرض می کنیم که معادلات رابطه فازی $x^T \mathrm{O} A = b^T$ داده شده اند.

ماتریس $A_۱$ که با حذف ستون های a_j به ازای هر $j \in J_٤$ از ماتریس A به دست می آید را تعریف می کنیم.
و همچنین بردار $b_{(۱)}$ را تعریف می کنیم که از حذف مولفه b_j به ازای هر $j \in J_٤$ از بردار b به دست می آید.

قضیه ۲ مساله $x^T \mathrm{O} A_۱ = b_{(۱)}{}^T$ با مساله $x^T \mathrm{O} A = b^T$ هم ارز است.

اثبات: اثبات واضح است.

تعریف ۷ مجموعه I' را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$I' = \left\{ i \in I \left| i \in I_j^{۲}, j \in J_۲ \ in \ A_۱ \right. \right\}$$

که در آن ماتریس $A_۱$ از تعریف (٦) به دست آمده است.

قضیه ۳ فرض می کنیم $X \left[A_۱, b_{(۱)}{}^T \right] \neq \varnothing$ و $J_۲ \neq \varnothing$، آن گاه داریم:

$$\forall x \in X \left[A, b^T \right], \forall i \in I' : x_i = ۰$$

اثبات: اثبات با توجه به لم (۲) به دست می‌آید.

تعریف ۸ معادلات رابطه فازی $x^T \mathrm{O} A_۱ = b_{(۱)}{}^T$ را در نظر می گیریم.

اکنون ماتریس $A_۲$ را از روی ماتریس $A_۱$ به صورت زیر می سازیم:

بنابر قضیه (۳) برای هر $x \in X\left[A_1, b_{(1)}^T\right]$ و هر $i \in I'$ قرار می دهیم:

$x_i = 0$

وسطر iام را از ماتریس A_1 حذف می کنیم و به این ترتیب ماتریس A_2 به دست می آید.

لم ۸ اگر در ماتریس A_1، $j \in J_3$ یا $j \in J_5$ باشد آن گاه در ماتریس A_2 نیز به ترتیب $j \in J_3$ یا $j \in J_5$ است.

اثبات: اثبات واضح است.

قضیه ٤ مساله $x^T \text{O} A_1 = b_{(1)}^T$ و ماتریس A_2 که از تعریف (۸) به دست می آید را در نظر می گیریم. اگر در ماتریس A_1، $j \in J_2$ و در ماتریس A_2، $j \in J_3$ باشد آن گاه ماتریس های A_1 و A_2 هم ارز نیستند.

اثبات: اثبات با توجه به لم های (۲) و (۸)، تعاریف (۵) و (۸) و قضیه (۳) به دست می‌آید.

قضیه ٥ مساله $x^T \text{O} A_1 = b_{(1)}^T$ و ماتریس A_2 که از تعریف (۸) به دست می آید را در نظر می گیریم. اگر در ماتریس A_1، $j \in J_2$ و در ماتریس A_2 نیز $j \in J_2$ باشدآن گاه ماتریس های A_1 و A_2 هم ارز هستند.

اثبات: اثبات با توجه به لم های (۲) و (۸)، تعاریف (۵) و (۸)، قضیه (۳) ونتیجه (۱) به دست می‌آید.

تعریف ۹ مساله $x^T \text{O} A_2 = b_{(1)}^T$ را در نظر می گیریم.

اکنون ماتریس A_3 را از روی ماتریس A_2، با حذف هر ستون a_j از آن که $j \in J_2$ است، به دست می آوریم.

از طرفی $j \in J_2$ در ماتریس A_2 همان $j \in J_2$ در ماتریس A_1 است که iامین مولفه آن به ازای هر $i \in I_j^2$ بنابر تعریف (۸) حذف شده است.

قضیه ٦ مسایل $x^T \text{O} A_2 = b_{(1)}^T$ و $x^T \text{O} A_3 = b_{(2)}^T$ را در نظر می گیریم به طوری که ماتریس A_3 از تعریف (۹) به دست می آید و بردار $b_{(2)}$ از بردار $b_{(1)}$ با حذف مولفه b_j برای هر $j \in J_2$ به دست می آید. فرض می کنیم که $\hat{x}$ جواب ماکزیمم مجموعه $X\left[A_2, b_{(1)}^T\right]$ باشد. اگر $\hat{x}$ را جواب ماکزیمم مجموعه $X\left[A_3, b_{(2)}^T\right]$ نیز در نظر بگیریم آن گاه ماتریس های A_2 و A_3 هم ارز هستند.

اثبات: اثبات با توجه به تعاریف (۴) و (۵) و نتیجه (۱) به دست می‌آید.

تعریف ۱۰ مساله $x^T \text{O} A_3 = b_{(2)}^T$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که $\hat{x}$ جواب ماکزیمم مجموعه $X\left[A_3, b_{(2)}^T\right]$ باشد. (همان جواب ماکزیمم مجموعه $X\left[A_3, b_{(2)}^T\right]$ که از تعریف (٤) به دست آمده است.) قرار می دهیم:

$$\forall j \in J_3 \cup J_5 : I_j^* = \left\{ i \in \overline{I} \,\middle|\, \hat{x}_i < b_j - a_{ij} \right\}$$

که در آن مجموعه $\overline{I}$، نشان دهنده تعداد سطرهای ماتریس A_3 است.

اکنون ماتریس A_4 را از روی ماتریس A_3 به صورت زیر می سازیم:

برای هر $i \in I_j^*$، در ماتریس A_3 به جای a_{ij} علامت * قرار می دهیم.

تعریف ۱۱ فرض می کنیم:

$$is\ the\ minimum\ solution\ of\ the\ set\ \ I_j^m(k) = \left\{ i \in \overline{I} \,\middle|\, j_{\bar{x}(i)}\ \ j_{X\left[A_k, b_{(2)}^T\right]} \right\}$$

برای هر $j \in J_3 \bigcup J_5$ و $k = 3,4$.

که در آن $j_{\bar{x}(i)}$، برای هر $j \in J_3$ و هر $j \in J_5$ به ترتیب از لم های (٤) و (٧) به دست می آید.

قضیه ۷ فرض می کنیم که $\widehat{x}$ جواب ماکزیمم مجموعه $X\left[A_3, b_{(2)}^T\right]$ باشد و همچنین فرض می کـنیم برای حداقل یک $j \in J_3 \bigcup J_5$، $i \in I_j^*$ باشد.

از طرفی بردار $e \in I_J$ را در نظر می گیریم به طوری که:

$$e(j) = i$$

آن گاه داریم:

$$(e_x)_i > \widehat{x}_i$$

که در آن $(e_x)_i$، iامین مولفه بردار e_x است که از تعریف (٤) به دست می آید.

اثبات: اثبات با توجه به تعریف (۴) به دست می‌آید.

تعریف ۱۲ مجموعه های $\overline{X}_L$ و $\overline{X}_F$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{X}_F = \overline{X} - \overline{X}_L \qquad \& \qquad \overline{X}_L = \left\{ e_x \in \overline{X} \,\middle|\, e_x \not\leq \widehat{x} \right\}$$

قضیه ۸ $X\left[A_3, b_{(2)}^T\right] = \bigcup_{e_x \in \overline{X}_F} [e_x, \widehat{x}]$

اثبات: اثبات با توجه به تعاریف (۱) و (۴) و (۱۲) به دست می‌آید.

قضیه ۹ اگر برای هر $j \in J_3 \bigcup J_5$ تعریف کنیم:

$$I_j^m(4) = I_j^m(3) - I_j^* = \overline{I} - I_j^*$$

آن گاه داریم:

$$X\left[A_3, b_{(2)}^T\right] = X\left[A_4, b_{(2)}^T\right]$$

اثبات: اثبات با توجه به قضایای (۸) و (۹) به دست می‌آید.

مساله زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\ s.t. \quad & x^T \mathrm{O} A = b^T \\ & 0 \le x \le 1 \end{aligned} \qquad (5)$$

که در آن $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T \in \mathbb{R}^m$ یک بردار m–بعدی است به طوری که c_i وزن (یا هزینه) نسبت داده شده به متغیر x_i برای $i = 1,2,\ldots,m$ را نشان می دهد.

٤ اثر بردار هزینه

فرض می کنیم که $X\left[A, b^T\right] \neq \varnothing$ و $J_3 \cup J_5 = \left\{j_1, j_2, \ldots, j_m\right\}$ آن گاه مجموعه Λ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Lambda = (\overline{I} - I_{j_1}{}^*) \times (\overline{I} - I_{j_2}{}^*) \times \ldots \times (\overline{I} - I_{j_m}{}^*) = I_{j_1} \times I_{j_2} \times \ldots \times I_{j_m}$$

که در آن مجموعه $\overline{I}$ تعداد سطرهای ماتریس A_3 تعریف می شود و همچنین $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$ ، $m \le n$ و $m = card(J_3 \cup J_5)$.

فرض می کنیم $(\forall j_i \in J_3 \cup J_5 \,,\, i = 1,2,\ldots,m)$ $\quad I_i = I_{j_i} = \overline{I} - I_{j_i}{}^*$ آن گاه $\Lambda = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_m$.

حال فرض می کنیم ماتریس A به ماتریس A_3 و بردار b به بردار $b_{(2)}$ تبدیل شده باشند، می خواهیم مساله زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^{card(\overline{I})} c_{(1)_i} x_i \\ s.t. \quad & x^T \mathrm{O} A_3 = b_{(2)}{}^T \\ & x_i \in [0,1] \quad (\forall i \in \overline{I}) \end{aligned} \qquad (6)$$

پس داریم:

$$X\left[A, b^T\right] = X\left[A, b_{(1)}{}^T\right] = X\left[A_1, b_{(1)}{}^T\right] = X\left[A_3, b_{(2)}{}^T\right] \qquad (7)$$

حال اگر $X\left[A, b^T\right] \neq \varnothing$، دو لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۹ اگر $\forall i \in \overline{I} : c_{(1)_i} \le 0$ آن گاه بردار $(\forall i \in \overline{I}) \quad \widehat{x} = (\widehat{x}_i)$ یک جواب بهینه برای مساله (۶) است. در این صورت بردار $(\forall i \in I) \quad \widehat{x} = (\widehat{x}_i)$ یک جواب بهینه برای مساله (۵) خواهد بود.

اثبات: اثبات واضح است.

لم ۱۰ اگر $\forall i \in \overline{I} : c_{(1)_i} \ge 0$ آن گاه یکی از جواب های می نیمم، مانند بردار $(\forall i \in \overline{I}) \quad \breve{x}^* = (\breve{x}_i^*)$، یک جواب بهینه برای مساله (۶) است. در این صورت بردار $(\forall i \in I) \quad \breve{x}^* = (\breve{x}_i^*)$ یک جواب بهینه برای مساله (۵) خواهد بود.

اثبات: اثبات با توجه به قضیه (۸) به دست می‌آید.

اکنون حالت کلی زیر را در نظر می گیریم:

برای هر بردار هزینه $(\forall i \in \bar{I})$ $c_{(1)} = (c_{(1)_i})$، بردارهای $(\forall i \in \bar{I})$ $c'_{(1)} = (c'_{(1)_i})$ و $(\forall i \in \bar{I})$ $c''_{(1)} = (c''_{(1)_i})$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall i \in \bar{I} : c'_{(1)_i} = \begin{cases} c_{(1)_i} & , if\ c_{(1)_i} \geq 0 \\ 0 & , if\ c_{(1)_i} < 0 \end{cases}$$

$$\forall i \in \bar{I} : c''_{(1)_i} = \begin{cases} 0 & , if\ c_{(1)_i} \geq 0 \\ c_{(1)_i} & , if\ c_{(1)_i} < 0 \end{cases}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$c_{(1)} = c'_{(1)} + c''_{(1)} \ , \ c'_{(1)} \geq 0 \ , \ c''_{(1)} \leq 0$$

اکنون دو مساله زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c'_{(1)_i} x_i \\ s.t. \quad & x^T \mathrm{O} A_3 = b_{(2)}^T \\ & x_i \in [0,1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c''_{(1)_i} x_i \\ s.t. \quad & x^T \mathrm{O} A_3 = b_{(2)}^T \\ & x_i \in [0,1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \tag{9}$$

با توجه به لم های (۹) و (۱۰) در می یابیم که بردارهای $(\forall i \in I)$ $\hat{x} = (\hat{x}_i)$ و $(\forall i \in I)$ $\breve{x}^* = (\breve{x}_i^*)$ به ترتیب جواب های ماکزیمم و می نیمم هستند.

اکنون با ترکیب جواب های $\hat{x}$ و $\breve{x}^*$، یک جواب جدید برای مساله (۶) می سازیم:

$$\forall i \in \bar{I} : x_i^* = \begin{cases} \breve{x}_i^* & , if\ c_{(1)_i} \geq 0 \\ \hat{x}_i & , if\ c_{(1)_i} < 0 \end{cases} \tag{10}$$

واضح است که اگر $X\left[A_3, b_{(2)}^T\right] \neq \emptyset$ آن گاه بردار x^* یک جواب بهینه برای مساله (۶) و بنابراین بردار $(\forall i \in I)$ $x^* = (x_i^*)$ یک جواب بهینه برای مساله (۵) خواهد بود.

اکنون در بخش بعدی، یک مدل برنامه ریزی صحیح ۱−۰ برای حل مساله (۸) ارایه می دهیم.

۵ مسأله برنامه ریزی صحیح ۱−۰ و روش شاخه و کران

تعریف۱۳ مجموعه Γ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Gamma = \{1,2,\ldots, card(J_3 \cup J_5)\}$$

با توجه به اینکه $\forall i \in \bar{I} : c'_{(1)_i} \geq 0$، لذا حل مساله (۸) هم ارز است با پیدا کردن یک $e^* \in \Lambda$ به طوری که:

$$\sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c'_{(1)_i} (e^*_x)_i = \min_{e\in\Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c'_{(1)_i} (e_x)_i \right\} \qquad (11)$$

با توجه به تعریف مجموعه I_t $(\forall t \in \Gamma)$، متغیرهای x_{it} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & , if\ i\ is\ chosen\ from\ I_t \\ 0 & , otherwise \end{cases} \qquad (\forall i \in \bar{I}, \forall t \in \Gamma) \qquad (12)$$

حال مساله برنامه ریزی صحیح ۱−۰ زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min\quad & Z = \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} \left(c'_{(1)_i} \max_{t\in\Gamma} \{(b_t - a_{it}) x_{it}\} \right) \\ s.t.\quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} x_{it} = 1 \quad (\forall t \in \Gamma) \\ & x_{it} = 0\ or\ 1 \quad (\forall i \in \bar{I}, \forall t \in \Gamma) \\ & x_{it} = 0 \quad (\forall i, t\ with\ i \notin I_t) \end{aligned} \qquad (13)$$

توجه شود که قیود (۱۳) برقرارند اگر برای هر $t \in \Gamma$ فقط یک $i \in I_t$ وجود داشته باشد به طوری که $x_{it} = 1$.
بنابراین اگر $e(t) = i$ آن گاه $x_{it} = 1$ در نتیجه

$$e = (e(1), e(2), \ldots, e(card(J_3 \cup J_5))) \in \Lambda$$

بنابراین حل مساله (۸) معادل با حل مساله برنامه ریزی صحیح ۱−۰ است.

یک روش شاخه و کران به طور ضمنی، تمام جواب های ممکن یک مساله برنامه ریزی صحیح را مشخص می کند. برای استفاده از این روش، ابتدا یک محدودیت را به منظور شاخه کردن مساله اولیه به چندین زیر مساله، انتخاب می کنیم. هر زیر مساله به وسیله یک گره نشان داده می شود.

سپس شاخه کردن در هر گره با اضافه کردن یک محدودیت جدید انجام می شود. در نتیجه زیر مساله های جدید، تولید شده و با گره های جدیدی نشان داده می شوند. توجه شود که هرچه محدودیت های بیشتری به یک زیر مساله اضافه شوند، آن زیر مساله دامنه شدنی کوچکتری پیدا خواهد کرد و مقدار هدف بهینه بزرگتری را به دست می آورد.

اگر بهترین جواب ممکن یک گره خاص، بهتر از جواب کاندید جاری نباشد آن گاه احتیاجی به شاخه کردن این گره نیست. در غیر این صورت، برای به دست آوردن یک کران جدید، شاخه کردن مورد نیاز می باشد.

۶ مثال عددی مساله (۱) را با $b=(۱,۱,۰/۹,۰/۷)^T$، $c=(۳,٤,-۱,۵)^T$ و
$$A=\begin{bmatrix} ۰/٦ & ۰/۹ & ۰/٤ & ۰/۹ \\ ۰/۵ & ۰/٦ & ۰/۳ & ۰/۵ \\ ۰/٦ & ۰/٤ & ۰/۷ & ۱ \\ ۰/۳ & ۰/۷ & ۰/۹ & ۰/۸ \end{bmatrix}$$

حل نمایید.

حل:

گام ۱: در ماتریس A، $۱\in J_٤$، $۲\in J_۵$، $۳\in J_۲$ و $٤\in J_۳$ است بنابراین در می یابیم که:

$$J_۱=\varnothing$$

اکنون به محاسبه بردار $\hat{x}$ می پردازیم:

$$\left.\begin{aligned} {}^{۱}\hat{x} &= (۱,۱,۱,۱)^T \\ {}^{۲}\hat{x} &= (۱,۱,۱,۱)^T \\ {}^{۳}\hat{x} &= (۰,۰/۳,۰/۵,۰/۲)^T \\ {}^{٤}\hat{x} &= (۰/۱,۰/۲,۰/۱,۰/٤)^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{x}=(۰,۰/۲,۰/۱,۰/۲)^T$$

در نتیجه داریم:

$$X\left[A,b^T\right]\neq\varnothing$$

گام ۲: ابتدا باید ماتریس $A_۱$ را به دست آوریم.

$$A_۱=\begin{bmatrix} ۰/٤ & ۰/۹ & ۰/٦ \\ ۰/۳ & ۰/٦ & ۰/۵ \\ ۰/۷ & ۰/٤ & ۰/٦ \\ ۰/۹ & ۰/۷ & ۰/۳ \end{bmatrix} \quad , \quad b_{(۱)}=(۱,۰/۹,۰/۷)^T$$

در ماتریس $A_۱$ به دست آمده، داریم:

$$۱\in J_۵ \,,\, ۲\in J_۲ \,,\, ۳\in J_۳$$

چون $I'=\{۱\}$، لذا به ازای هر $x\in X\left[A_۱,b_{(۱)}{}^T\right]$ قرار می دهیم:

$$x_۱=۰$$

و با حذف سطر اول ماتریس $A_۱$، به ماتریس $A_۲$ دست می یابیم:

$$A_۲=\begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰/٦ & ۰/۵ \\ ۰/۷ & ۰/٤ & ۰/٦ \\ ۰/۹ & ۰/۷ & ۰/۳ \end{bmatrix}$$

در ماتریس $A_۲$ به دست آمده نیز، داریم:

$$۱\in J_۵ \,,\, ۲\in J_۲ \,,\, ۳\in J_۳$$

اکنون با توجه به گام (۱)، جواب ماکزیمم مجموعه $X\left[A_۱,b_{(۱)}{}^T\right]$ عبارت است از:

$$\hat{x}=(۰/۲\,,۰/۱\,,۰/۲)^T$$

حال با حذف کردن ستون $۲\in J_۲$ از ماتریس $A_۲$ و مولفه $b_۲=۰/۹$ از بردار $b_{(۱)}$، به ترتیب به ماتریس $A_۳$ و بردار $b_{(۲)}$، دست می یابیم:

$$A_۳=\begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰/۵ \\ ۰/۷ & ۰/۶ \\ ۰/۹ & ۰/۳ \end{bmatrix} \quad , \quad b_{(۲)}=(۱\,,۰/۷)^T$$

در ماتریس $A_۳$ به دست آمده، $۱\in J_۵$ و $۲\in J_۳$ است. در نتیجه مجموعه Γ عبارت است از:

$$\Gamma=\{۱,۲\}$$

اکنون با استفاده از ماتریس $A_۳$، مجموعه های $I_۱^*$ و $I_۲^*$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} I_۱^*=\{۱,۲\} \\ I_۲^*=\{۳\} \end{cases}$$

بنابراین مجموعه های اندیس عبارتند از:

$$\bar{I}=\{۱,۲,۳\}\Rightarrow\begin{cases} I_۱=\bar{I}-I_۱^*=\{۳\} \\ I_۲=\bar{I}-I_۲^*=\{۱,۲\} \end{cases}$$

گام ۳:

$$c_{(۱)}=(٤\,,-۱\,,٥)^T\Rightarrow\begin{cases} c'_{(۱)}=(٤\,,۰\,,٥)^T \\ c''_{(۱)}=(۰\,,-۱\,,۰)^T \end{cases}$$

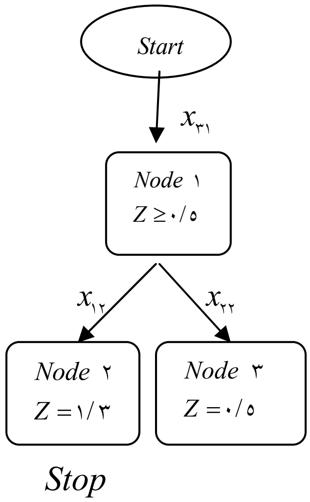
بنابراین مساله (۵) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min\quad & ٤x_۱+٥x_۳ \\ s.t.\quad & x^T \mathrm{O} A_۳=b_{(۲)}{}^T \\ & x_i\in[۰,۱]\quad (i=۱,۲,۳) \end{aligned}$$

گام ٤:

$$\begin{aligned} \min\quad & Z=\sum_{i=۱}^{۳}\left(c'_{(۱)_i}\max_{t\in\Gamma}\{(b_t-a_{it})x_{it}\}\right) \\ s.t.\quad & x_{۳۱}=۱ \\ & x_{۱۲}+x_{۲۲}=۱ \\ & x_{i۲}=۰\ or\ ۱\quad (\forall i\in I_۲) \end{aligned} \tag{۱۴}$$

گام ۵:



پس نتیجه می گیریم که:

$$\begin{cases} x_{۳۱} = x_{۲۲} = ۱ \\ Z = ۰/۵ \end{cases}$$

گام ٦:

$$e = (e(۱) = ۳ \,,\, e(۲) = ۲)$$

$$\begin{cases} J_e(۱) = \left\{ t \in \Gamma \middle| e(t) = ۱ \right\} = \varnothing \rightarrow (e_x)_۱ = ۰ \\ J_e(۲) = \left\{ t \in \Gamma \middle| e(t) = ۲ \right\} = \{۲\} \rightarrow (e_x)_۲ = \max\limits_{j \in J_e(۲)} \left\{ b_j - a_{۲j} \right\} = b_۲ - a_{۲۲} = ۰/۷ - ۰/٦ = ۰/۱ \\ J_e(۳) = \left\{ t \in \Gamma \middle| e(t) = ۳ \right\} = \{۱\} \rightarrow (e_x)_۳ = \max\limits_{j \in J_e(۳)} \left\{ b_j - a_{۳j} \right\} = b_۱ - a_{۳۱} = ۱ - ۰/۹ = ۰/۱ \end{cases}$$

پس داریم:

$$e_x = (۰ \,,\, ۰/۱ \,,\, ۰/۱)^T = \breve{x}^*$$

در نتیجه $\breve{x}^*$ جواب بهینه مساله (۸) می باشد.

گام ۷:

$\breve{x}^* = (۰ \,,\, ۰/۱ \,,\, ۰/۱)^T$ و $\widehat{x} = (۰/۲ \,,\, ۰/۱ \,,\, ۰/۲)^T$ بنابراین نتیجه می گیریم که:

$$x^* = (۰ \,,\, ۰/۱ \,,\, ۰/۱)^T$$

گام ۸:

$$Z^* = ۰/۵ + c''_{(۱)_۲} \widehat{x}_۲ = ۰/۵ + (-۱ \times ۰/۱) = ۰/۵ - ۰/۱ = ۰/٤ \;\Rightarrow\; Z^* = ۰/٤$$

گام ۹: توقّف.

۷ نتیجه گیری

۱. به دلیل غیر محدب بودن ماهیت مجموعه شدنی مساله مورد نظر، در می یابیم که هیچ یک از روش های برنامه ریزی خطی برای حل این مساله مفید نمی باشند.

بعد از اینکه خصوصیات مجموعه شدنی مساله (۱) را بررسی کردیم، بهترین کاری که می توانیم برای حل این مساله انجام دهیم این است که آن را به یک مساله برنامه ریزی صحیح ۱-۰ تبدیل کنیم و سپس روش شاخه و کران شناخته شده را برای پیدا کردن یکی از جواب های آن به کار ببریم.

سوالی که هنوز تحت تحقیق و بررسی است این است که چگونه همه مجموعه جواب را تولید کنیم.

۲. دستگاه های معادلات رابطه فازی می توانند برای کاربردهای خاصی از قبیل تشخیص پزشکی [۲] مورد استفاده قرار گیرند.

منابع

[1] H. J. Zimmermann, Fuzzy set theory and its application, kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London, (1999).

[2] G. I. Adamopoulos, C. P. Pappis, some results on the resolution of Fuzzy Relation equations, Fuzzy sets and systems 60, 83-88(1993).

[3] E. Czogala, J. Drewniak, W. Pedrycz, Fuzzy relation equation on a finite Set, Fuzzy sets and systems 7, 89-101(1982).

[4] K. P. Aliasing, Fuzzy set theory in medical diagnosis, IEEE Trans, Systems Man cybernet. 16, 260-265(1986).

[5] A. Di nola, Relational equations in totally ordered lattices and their Complete resolution, Math. Appl.107, 148-155(1985).

[6] S. C. Fang, S.Puthenpura, Linear optimization and Extensions: Theory And Algorithm, Prentice, Hall, Englewood Cliffs.NJ, (1993).

[7] S. C. Fang, G.Li, Solving fuzzy relations equations with a linear Objective function, Fuzzy sets and systems 103, 107-113(1999).

[8] M. Higashi, G. J. Klir, Resolution of finite fuzzy relation equations, Fuzzy Sets and systems 13, 65-82(1984).

[9] G. Li, S. C. Fang, on the resolution of finite fuzzy relations, or report 0.322, North Carolina state university, Raleigh.North Carolina, May (1996).

[10] M. Prevot, Algorithm for the solution of fuzzy relation, Fuzzy sets and Systems???, 319-322(1985).

[11] H. F. Wang, An algorithm for solving iterated composite relation Equations, in: NAFIPS. pp. 242-249(1988).

[12] P. Z. Wang, S. Sessa, A. Di Nola, and How many lower solutions does a Fuzzy relation equation have? Bull. Pour. Sons. Ens. Flous. Appl. (BUSEFAL) 18, 67-74(1984).

[13] W. L. Winston, Introduction to Mathematical Programming: Application and Algorithms, Duxbury Press, Belmont, CA (1995).

[14] E. Sanchez, Resolution of composite fuzzy relations equation, Inform And control 30, 38-48(1976).

[15] S. z. Guo, P. Z. Wang, A. Di Nola, S. Sessa, Futher contributions to the Study of finite fuzzy relation equations, Fuzzy sets and systems 26, 93- 104(1988).

[16] J. Lu, S. C. Fang, Solving nonlinear optimization problems with fuzzy Relation constraints, Fuzzy sets and systems 119, 1-20(2001).

[17] E. Khorram, A. Ghodousian, Linear objective function optimization with fuzzy relation constraints regarding max-av composition, Applied Mathematics and Computation, doi: 10.1016/ j. amc. 2005. 4.021.

[18] A. Ghodousian, E.Khorram, An algorithm for optimizing the linear Function with fuzzy relation equation constraints regarding max-prod Composition, Applied Mathematics and Computation, doi.10. 1016/j. amc. 2005. 11. 069.

[19] E. Khorram, A. Ghodousian, A. A. molai, Solving linear optimization Problems with max-star composition equation constraints, Applied Mathematics and Computation, doi: 10.1016/ j.amc. 2005.12.006.

[20] A. Ghodousian, E. Khorram, The convex combination of max-min And max-average composition application in the linear programming Problems, Applied Mathematics and Computation, doi: 10. 1016/j.amc. 2005.12.027