

تعیین بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε در مدل FDH

سهند دانشور^۱، صابر ساعتی^{۲*}، بهنام امینی دهخوارقانی^۱

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز
گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شمال

چکیده

در این مقاله، با استفاده از فرم خطی متناظر با مدل FDH، دوآل آن تعیین شده و نقش عدد غیر ارشمیدسی ε در مدل FDH بررسی می‌گردد. سپس طی روندی، با حل n مساله برنامه‌ریزی خطی، یک بازه اطمینان برای ε به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، مدل FDH، عدد غیر ارشمیدسی ε .

۱ مقدمه

مدل FDH (Free Disposal Hull)، شکل دیگری از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) می‌باشد که توسط Deprins در سال ۱۹۸۴ معرفی گردید [۴] و مشخصه عمده آن، عدم برقراری اصل تحدب در مجموعه امکان تولید می‌باشد. همچنین این مدل به عنوان مدلی با بازده به مقیاس متغیر (VRS)، در میان مدل‌های DEA شناخته شده و توسط یک مساله برنامه‌ریزی صحیح مختلط (MILP) نمایش داده می‌شود. گام نخست در جهت شناخت ویژگی‌های مدل FDH توسط Karstens و Vanden [۶] ارایه گردید که در آن شکل خاصی از بازده به مقیاس در مدل FDH به کار برده شده بود. بعدها Briec [۲] توانست پیرامون این موضوع مطالعات دقیق‌تری را انجام دهد.

دو روش محاسباتی برای حل مدل‌های FDH به کار برده می‌شود. روش نخست بر پایه الگوریتم پیشنهادی Tulkens [۱۰] می‌باشد و روش دوم استفاده از یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی است که توسط Karstens و Vanden [۶] ارایه شده است. اخیراً Podinovski [۸] و Agrell [۱] با استفاده از یک مساله برنامه‌ریزی خطی که هم ارز با مدل MILP می‌باشد، روشی را برای حل مدل FDH ارایه کرده‌اند که با استفاده از این مساله برنامه‌ریزی خطی، به راحتی می‌توان دوآل مدل FDH را به دست آورد.

*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: ssaatim@yahoo.com

دانشور و همکاران، تعیین بازه اطمینان برای عدد غیرارشمیدی ε مدل FDH

در بسیاری از مدل های DEA از جمله مدل CCR و BCC برای رفع مشکل صفر بودن وزن ها از عدد غیر ارشمیدی ε استفاده می شود. به طوری که این عدد به عنوان یک کران پائین برای وزن های ورودی و خروجی مانع از صفر شدن آن ها می گردد. در این مقاله، برای فرم ε دار مدل FDH_{BCC} نشان می دهیم که عدد غیر ارشمیدی ε همین نقش را ایفا می کند. به علاوه با استفاده از مدل $Mehrabian$ و همکاران [۷] و با حل n مساله برنامه ریزی خطی، بازه اطمینانی را برای عدد غیرارشمیدی ε به دست می آوریم. در این مقاله ابتدا مدل FDH_{BCC} و فرم ε دار این مدل معرفی می شوند. سپس با توجه به اینکه مدل های مذکور مسایل برنامه ریزی صحیح مختلط می باشند، فرم خطی متناظر با این مدل ها تعیین می گردند و این فرم خطی جهت یافتن دوآل مدل FDH_{BCC} مورد استفاده قرار می گیرد. همچنین نقش عدد غیر ارشمیدی ε در مدل FDH مورد بررسی قرار می گیرد و در خاتمه نحوه تعیین بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدی ε در مدل FDH_{BCC} توضیح داده می شود.

۲ مدل FDH_{BCC} و فرم ε دار آن

فرض کنید که n واحد تصمیم گیری (DMU) داریم که در آن هر j ($j=1, \dots, n$) DMU ، با مصرف بردار ورودی $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ ($i=1, \dots, m, x_{ij} > 0$)، بردار خروجی $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ ($r=1, \dots, s, y_{rj} > 0$) را تولید می کند که در آن $0 < X_j \in R^m$ و $0 < Y_j \in R^s$. بنابراین، ماتریس داده های ورودی و ماتریس داده های خروجی را می توان به شکل $X = [X_1, \dots, X_j, \dots, X_n]$ و $Y = [Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n]$ تشکیل داد. که X یک ماتریس $m \times n$ و Y یک ماتریس $s \times n$ می باشد. فرض کنید که هدف ارزیابی عملکرد DMU_k ؛ $1 = k \dots n$ باشد. می دانیم که با افزودن محدودیت $\lambda_j \in \{0, 1\}$ ، $j = 1, \dots, n$ ، به مجموعه امکان تولید مدل BCC ، می توان PPS مربوط به مدل FDH_{BCC} را به شکل زیر به دست آورد:

$$PPS_{FDH_{BCC}} = \{(X, Y) \mid \lambda X \leq X_k, \lambda Y \geq Y_k, \mathbf{1}\lambda = 1, \lambda_j \in \{0, 1\}; j = 1, \dots, n\}$$

بنابراین، با مفروضات فوق مدل های FDH_{BCC} و فرم ε دار آن به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & X\lambda + S^- = \theta X_k, \\ & Y\lambda - S^+ = Y_k, \\ & \mathbf{1}\lambda = 1, \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \\ & S^- \geq \mathbf{0}, S^- \in R^m, \\ & S^+ \geq \mathbf{0}, S^+ \in R^s. \end{aligned} \tag{1}$$

و

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \theta - \varepsilon(1S^- + 1S^+) \\
 \text{s.t.} \quad & X\lambda + S^- = \theta X_k, \\
 & Y\lambda - S^+ = Y_k, \\
 & 1\lambda = 1, \\
 & \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & S^- \geq 0, \quad S^- \in R^m, \\
 & S^+ \geq 0, \quad S^+ \in R^s.
 \end{aligned} \tag{۲}$$

از آنجایی که مدل های فوق مسایل برنامه ریزی صحیح مختلط می باشند پس برای حل این مدل ها کافی است که فرم خطی متناظر با آن ها را به دست آوریم. براساس پیشنهاد Agrell [۱] فرم خطی این مدل ها به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n \theta_j \\
 \text{s.t.} \quad & X_j \lambda_j + S_j^- = \theta_j X_k, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j - Y_k) \lambda_j - S_j^+ = 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & 1\lambda = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & S_j^-, S_j^+ \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۳}$$

و

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n \theta_j - \varepsilon \sum_{j=1}^n (1S_j^- + 1S_j^+) \\
 \text{s.t.} \quad & X_j \lambda_j + S_j^- = \theta_j X_k, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j - Y_k) \lambda_j - S_j^+ = 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & 1\lambda = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & S_j^-, S_j^+ \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۴}$$

که در این مدل ها S_j^+ و S_j^- به صورت زیر معرفی می شوند:

$$S_j^- = (s_{1j}^-, \dots, s_{mj}^-), \quad S_j^+ = (s_{1j}^+, \dots, s_{sj}^+) \tag{۵}$$

برای تعیین دوآل مدل های FDH_{BCC} و فرم ε دار آن کافی است که دوآل فرم خطی متناظر با این مدل ها را به دست آوریم که به شکل زیر می باشند:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ik} = 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s (y_{rj} - y_{rk}) u_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} + z \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & v_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j, \\ & u_{rj} \geq 0, \quad \forall r, j. \end{aligned} \quad (6)$$

و

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s (y_{rj} - y_{rk}) u_{rj} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ij} + z \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & v_{ij} \geq \varepsilon, \quad \forall i, j, \\ & u_{rj} \geq \varepsilon, \quad \forall r, j. \end{aligned} \quad (7)$$

واضح است که مسایل برنامه ریزی خطی فوق شدنی بوده و همواره $z^* \leq 1$ در حقیقت:

$$z^* = \text{Min}_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ij} - \sum_{r=1}^s (y_{rj} - y_{rk}) u_{rj} \right\} \quad (8)$$

۳ نقش عدد غیر ارشمیدی ε

در این فصل برای توجیه نقش عدد غیر ارشمیدی ε و تفاوت میان مدل های FDH_{BCC} و فرم ε دار آن، مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۱ سه واحد تصمیم گیری با دو ورودی و یک خروجی که اطلاعات مربوط به آن ها در جدول زیر آمده است را در نظر بگیرید:

DMU	A	B	C
I ₁	2	2	3
I ₂	3	5	5
O	4	4	6

جدول ۱: داده واحدهای تصمیم گیرنده

برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیری A و B دو آل مدل FDH_{BCC} را به کار می بریم. در این صورت جواب بهینه به دست آمده عبارت است از:

DMU	v_1^*	v_2^*	u^*	z^*
A	0	0.3333	0	1
B	0.5	0	0	1

جدول ۲: جواب بهینه به دست آمده از جدول ۱

با توجه به جواب بهینه به دست آمده نتیجه می شود که واحدهای تصمیم گیری A و B هر دو کارا هستند ($z^* = 1$). ولی DMU_A غالب بر DMU_B می باشد. زیرا با ورودی های کمتر، همان خروجی $y=4$ را تولید کرده است. پس می توان نتیجه گرفت که DMU_A کارا و DMU_B ناکاراست. در حالی که در ارزیابی این دو واحد تصمیم گیری با دو آل مدل FDH_{BCC} نتیجه شد که هر دو واحد تصمیم گیری کارا هستند. پس مشکل چیست؟

این مشکل ناشی از $u^* = 0$ است. یعنی خروجی واحدهای تصمیم گیری A و B در ارزیابی آن ها دخیل نبوده اند. یا به عبارت بهتر خروجی این دو واحد در کارآیی تأثیر نداشته اند. بنابراین، دو آل مدل FDH_{BCC} ، هر دو DMU را کارا نشان می دهد. برای برطرف کردن این مشکل می توان عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon > 0$ را به کار برد. در این صورت در دو آل مدل FDH_{BCC} محدودیت های نامنفی وزن ها با محدودیت های $v_i \geq \varepsilon$ ($i = 1, \dots, m$) و $u_r \geq \varepsilon$ ($r = 1, \dots, s$) جایگزین می شوند.

در واقع عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon > 0$ به عنوان کران پائینی برای وزن های u_r و v_i به منظور تشخیص دادن واحدهای تصمیم گیری کارای قوی و ضعیف به کار برده می شود و آن ها را از صفر شدن دور نگه می دارد و وجود عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon > 0$ باعث آشوب ابرصفحه های مرز ضعیف PPS می شود. همچنین عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon > 0$ ، مقدار کارآیی DMU هایی را که با مرز ضعیف مقایسه شده اند را تغییر می دهد.

۴ نحوه تعیین بازه اطمینان ε

اکنون بر اساس روند پیشنهادی Mehrabian و همکاران [۷] می خواهیم بازه اطمینان عدد غیر ارشمیدسی ε را تعیین کنیم. بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε ، بازه ای است که برای هر مقدار ε از این بازه، مدل های اساسی DEA، در قسمت دو آل شدنی و در قسمت پرایمال کراندار می باشند. بدین منظور ابتدا مساله برنامه ریزی خطی زیر را برای ارزیابی عملکرد DMU_k که در آن $k \in \{1, \dots, n\}$ در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \varepsilon_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r (y_{rj} - y_{rk}) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq \varepsilon_j, \quad \forall r, j, \\ & v_i \geq \varepsilon_j, \quad \forall i, j. \end{aligned} \tag{9}$$

قضیه ۱ مدل (۹) شدنی بوده و دارای جواب بهینه متناهی مثبت می باشد.

اثبات $(\varepsilon, u, v, z) = (0, 0, \frac{1}{x_{pk}}, 1) e_p$ یک جواب شدنی برای مدل (۹) می باشد که در آن
 $x_{pk} = \text{Max}_{1 \leq i \leq m} x_{ik}$

اکنون نشان می دهیم که مدل فوق دارای جواب بهینه متناهی است.

(۱) می دانیم که $x_k > 0, v \geq 1\varepsilon$ پس داریم:

$$vX_k \geq 1\varepsilon X_k$$

اما از طرفی می دانیم که $v^t X_k = 1$ پس نتیجه می شود که:

$$1 = v^t X_k \geq 1\varepsilon X_k \Rightarrow 1\varepsilon X_k \leq 1 \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^m X_{ik}} \quad (10)$$

می توان کران بالایی برای ε بر حسب خروجی ها نیز به دست آورد.

(۲) می دانیم که $Y_k > 0, u \geq 1\varepsilon$ پس داریم:

$$uY_k \geq 1\varepsilon Y_k \quad (11)$$

از طرفی با توجه به قید $u^t(Y_j - Y_k) - v^t X_j + z \leq 0$ داریم:

$$u^t Y_j - v^t X_j + (z - u^t Y_k) \leq 0$$

با فرض $u_0 = z - u^t Y_k$ خواهیم داشت:

$$u^t Y_j - v^t X_j + u_0 \leq 0$$

اکنون با قرار دادن اندیس $j=k$ در رابطه اخیر داریم:

$$u^t Y_k - v^t X_k + u_0 \leq 0$$

$$v^t X_k = 1 \Rightarrow u^t Y_k + u_0 - 1 \leq 0 \Rightarrow u^t Y_k \leq 1 - u_0$$

اکنون با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$1 - u_0 \geq u^t Y_k \geq 1\varepsilon Y_k \Rightarrow 1 - u_0 \geq 1\varepsilon Y_k \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{1 - u_0}{\sum_{r=1}^s Y_{rk}} \quad (13)$$

با توجه به روابط (۱۰) و (۱۳) بدیهی است که مقدار بهینه مساله داده شده متناهی است.

حال نشان می دهیم که مقدار جواب بهینه مدل داده شده همواره مثبت است.

دوآل مدل (۹) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & 0\lambda_j + 1\beta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j (Y_j - Y_k) - W = \mathbf{0}, \\
 & -\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \beta X_k - Z' = \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{1}W + \mathbf{1}Z' = 1, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0, \\
 & W, Z' \geq \mathbf{0}, \\
 & \lambda_j \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

با توجه به محدودیت های $\lambda = 0$ و $\lambda \geq 0$ مدل اخیر را می توان به شکل زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \beta \\
 \text{s.t.} \quad & \beta X_k - Z' = \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{1}Z' = 1, \\
 & Z' \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

فرض می کنیم که مقدار جواب بهینه مدل (۹) برابر صفر باشد. پس طبق قضیه قوی دوآلیتی $\text{Min}\beta = \beta^* = 0$. که این با توجه به محدودیت های $\beta X_k - Z' = \mathbf{0}$ و $\mathbf{1}Z' = 1$ امکان پذیر نیست. از این رو (۱۴) دارای جواب بهینه مثبت است پس (۹) نیز دارای جواب مثبت است. یعنی (۹) دارای یک جواب بهینه متناهی همانند ε_k^* است که در آن $0 < \varepsilon_k^* < +\infty$.

تعریف ۱ بازه اطمینان به منظور شدنی بودن مساله دوآل و کراندار بودن مساله پرایمال در مدل FDH برای ارزیابی DMU_k به صورت $[0, \varepsilon_k^*]$ است که ε_k^* جواب بهینه (۹) می باشد.

تعریف ۲ اشتراک تمام بازه های اطمینان در مدل FDH برای ارزیابی تمام واحدهای تصمیم گیری به صورت $[0, \varepsilon^*]$ است که در آن $\varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*\}$ که ε_j^* ها از حل مساله برنامه ریزی خطی (۹) به دست می آیند.

تعریف ۳ هر مقدار از بازه اطمینان $[0, \varepsilon^*]$ به عنوان یک مقدار قابل قبول برای عدد غیر ارشمیدسی ε می باشد.

تعریف ۴ $\varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*\}$ به دست آمده از حل (۹) به عنوان کران پائینی برای وزن های u_r و v_i در دوآل فرم ε دار مدل FDH_{BCC} به کار برده می شود.

قضیه ۲ اگر $[0, \varepsilon']$ بزرگترین بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε باشد، در این صورت $\varepsilon' = \varepsilon^*$.
اثبات فرض کنید $[0, \varepsilon^*]$ یک بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε باشد. از آنجایی که $[0, \varepsilon']$ بزرگترین بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε است پس می توان نوشت:

$$[0, \varepsilon^*] \subseteq [0, \varepsilon'] \text{ یا } \varepsilon^* \leq \varepsilon' \quad (16)$$

اکنون نشان می‌دهیم که $\varepsilon' \leq \varepsilon^*$. فرض کنید که $\varepsilon' > \varepsilon^*$ ، بنابراین عدد مثبتی همانند δ می‌توان یافت که $\varepsilon' = \varepsilon^* + \delta$. بر اساس تعریف، برای مقدار $\varepsilon' = \varepsilon^* + \delta$ دو آل مدل FDH برای تمام واحدهای تصمیم‌گیری شدنی است و در حالت خاص $(\varepsilon', u^0, v^0, z^0) = (\varepsilon^* + \delta, u^0, v^0, z^0)$ یک جواب شدنی برای (۹) است که در آن $\varepsilon^* = \varepsilon_k^*$.

با توجه به اینکه ε_k^* یک جواب بهینه برای (۹) می‌باشد پس $\varepsilon_k^* \geq \varepsilon_k^* + \delta \Rightarrow \varepsilon_k^* \geq \varepsilon^* + \delta$. پس نتیجه می‌شود که $\delta \leq 0$ که این یک تناقض است پس

$$\varepsilon' \leq \varepsilon^* \quad (17)$$

با توجه به روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود که $\varepsilon' = \varepsilon^*$.

۵ تعیین بازه اطمینان ε با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی

در بخش قبل، روندی برای تعیین بازه اطمینان عدد غیر ارضمدسی ε ارائه گردید. در این روند برای یافتن بازه اطمینان ε ، ناچار به حل n مساله برنامه‌ریزی خطی هستیم که در آن n تعداد واحدهای تصمیم‌گیری می‌باشد. در این بخش برای تعیین بازه اطمینان ε یک مساله برنامه‌ریزی خطی را ارائه می‌دهیم. با توجه به قضیه ۲ می‌توان نتیجه گرفت که جواب بهینه (۹) با جواب بهینه مدل زیر یکسان است:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \varepsilon \\ \text{s.t. } & v^t X_k \leq 1, \\ & u^t (Y_j - Y_k) - v^t X_j + z \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & v \geq \mathbf{1}\varepsilon, \\ & u \geq \mathbf{1}\varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

اکنون مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \varepsilon \\ \text{s.t. } & v^t X_j \leq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u^t (Y_j - Y_k) - v^t X_j + z \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & v \geq \mathbf{1}\varepsilon, \\ & u \geq \mathbf{1}\varepsilon. \end{aligned} \quad (19)$$

فرض کنید که $(\varepsilon^0, u^0, v^0, z^0)$ یک جواب بهینه برای (۱۹) باشد. در این صورت $\varepsilon^0 \leq \varepsilon_j^*$ برای $j=1, \dots, n$ که در آن ε_j^* ها جواب بهینه برای (۹) هستند. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\varepsilon^0 \leq \varepsilon^* = \text{Min} \{ \varepsilon_j^*; j=1, \dots, n \}$$

به عبارت دیگر $\varepsilon^0 > 0$. زیرا در غیر این صورت با توجه به محدودیت‌های دو آل (۱۹) با تناقض مواجه می‌شویم.

قضیه ۳ مقدار جواب بهینه (۱۹) مثبت است.

اثبات دوآل (۱۹) را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n \theta_j + 0\lambda_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \theta_j X_j - \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j - Z' = \mathbf{0}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j (Y_j - Y_k) - W = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{1}W + \mathbf{1}Z' = 1, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0, \\ & \theta_j, \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & W, Z' \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۲۰}$$

با توجه به محدودیت های $\mathbf{1}\lambda = 0$ و $\lambda \geq \mathbf{0}$ مدل اخیر را می توان به شکل زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n \theta_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \theta_j X_j - Z' = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{1}Z' = 1, \\ & \theta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & Z' \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

فرض می کنیم که مقدار جواب بهینه مدل (۱۹) برابر صفر باشد. پس بنابراین نتیجه می شود که $\text{Min} \sum_{j=1}^n \theta_j = 0$.

که این با توجه به محدودیت های $\sum_{j=1}^n \theta_j X_j - Z' = \mathbf{0}$ و $\mathbf{1}Z' = 1$ امکان پذیر نیست. از این رو (۲۰) دارای جواب بهینه مثبت است. پس (۱۹) نیز دارای جواب مثبت است.

قضیه زیر رابطه میان \mathcal{E}^0 و \mathcal{E}^* را بیان می کند.

قضیه ۴ اگر $(\mathcal{E}^0, u^0, v^0, Z^0)$ یک جواب بهینه برای (۱۹) باشد و مجموعه $J = \{j \mid v^{0t} X_j = 1\}$ منحصر به فرد باشد در این صورت $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^*$.

اثبات با در نظر گرفتن دوآل (۱۹) و بر اساس فرض می دانیم که: $v^{0t} X_j < 1$; $j = 1, \dots, n, j \neq k$. در این صورت، شرط مکمل زاید نتیجه می دهد که مقدار جواب بهینه (۲۰) بایستی $\theta_j^0 = 0$; $j = 1, \dots, n, j \neq k$. از این رو θ_k^0 را می توان یک جواب بهینه برای مساله برنامه ریزی خطی زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \theta_k \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}W + \mathbf{1}Z' = 1, \\
 & \theta_k X_k - \lambda X - Z' = \mathbf{0}, \\
 & \lambda(Y - Y_k) - W = \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{1}\lambda = 0, \\
 & W, Z', \lambda \geq \mathbf{0}, \\
 & \theta_k \geq 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

که مدل فوق، دوآل (۱۸) می باشد که دارای جواب بهینه ε_k^* است به طوری که $\varepsilon_k^* = \varepsilon^0$. پس داریم:

$$\varepsilon_k^* = \varepsilon^0 \leq \varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_j^*; j=1, \dots, n\} \Rightarrow \varepsilon^0 = \varepsilon^*$$

۶ مثال های عددی

مثال ۱ شش واحد تصمیم گیری با یک ورودی و یک خروجی که اطلاعات مربوط به آن ها در جدول زیر آمده است را در نظر بگیرید:

DMU	A	B	C	D	E	F
I	3	5	8	10	6	9
O	2	4	7	8	1	5

جدول ۳: داده های مربوط به شش واحد تصمیم گیری

برای تعیین مقدار ε (ε^*) ابتدا مدل (۹) را برای تمام واحدهای تصمیم گیری حل می کنیم. در این صورت جواب بهینه به دست آمده عبارت است از:

DMU	ε_j^*	v^*	u^*	z^*
A	0.333	0.333	0.333	1
B	0.2	0.2	0.2	1
C	0.125	0.125	0.125	0
D	0.1	0.1	0.1	0.9
E	0.166667	0.166667	0.166667	0.333333
F	0.1111	0.1111	0.1111	0.666667

جدول ۴: جواب بهینه مربوط به شش واحد تصمیم گیری با حل مدل (۹)

پس مقدار بهینه به دست آمده برای عدد غیرارشمیدی ε (ε^*) عبارت است از:

$$\varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \varepsilon_4^*, \varepsilon_5^*, \varepsilon_6^*\} = \text{Min}\{0.333, 0.2, 0.125, 0.1, 0.166667, 0.1111\} = 0.1$$

در نتیجه بازه اطمینان به صورت $[0, 0.1]$ است.

مثال ۲ شش واحد تصمیم گیری با یک ورودی و یک خروجی که اطلاعات مربوط به آن ها در جدول ۱ آمده است را در نظر بگیرید.

این بار با به کار بردن (۱۹) می خواهیم بازه اطمینان عدد غیرارشمیدی ε را تعیین کنیم. چنانچه ارزیابی ما بر روی واحد تصمیم گیری A باشد، جواب بهینه ای به شکل زیر به دست خواهیم آورد:

$$\varepsilon^0 = 0.1, u^0 = 0.1, v^0 = 0.1, z^0 = 0$$

پس بازه اطمینان به صورت $[0,0.1]$ خواهد بود. چنانچه هر کدام از واحدهای تصمیم‌گیری دیگر را با (ϵ^0) مورد ارزیابی قرار بدهیم همان جواب بهینه $\epsilon^0 = 0.1$ را به دست خواهیم آورد که نتایج این ارزیابی در جدول زیر خلاصه شده است:

DMU	ϵ^0	v^0	u^0	z^0
A	0.1	0.1	0.1	0
B	0.1	0.1	0.1	0.5
C	0.1	0.1	0.1	0.8
D	0.1	0.1	0.1	0.9
E	0.1	0.1	0.1	0.2
F	0.1	0.1	0.1	0.6

جدول ۵: جواب بهینه مربوط به شش واحد تصمیم‌گیری با حل مدل (۱۹)

پس بازه اطمینان به صورت $[0,0.1]$ خواهد بود که با جواب مثال ۱ مطابقت دارد. توجه داریم که مجموعه $J = \{j \mid v^{0t} X_j = 1\}$ منحصر به فرد می‌باشد. زیرا $v^{0t} X_D = v^{0t} X_D = 0.1 \times 10 = 1$.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا مدل‌های FDH را معرفی کردیم. سپس با توجه به اینکه مدل‌های FDH_{BCC} و فرم ϵ دار مدل FDH_{BCC} یک مساله برنامه‌ریزی صحیح مختلط می‌باشند، فرم خطی متناظر با این مدل‌ها را به دست آوردیم و این فرم خطی را جهت یافتن دوآل مدل‌های مذکور مورد استفاده قرار دادیم. همچنین برای رفع مشکل صفر شدن وزن DMUها در ارزیابی آن‌ها با مدل FDH_{BCC} ، عدد غیر ارشمیدسی ϵ و فرم ϵ دار مدل FDH_{BCC} را به کار بردیم و نقش عدد غیر ارشمیدسی ϵ را در فرم ϵ دار مدل FDH_{BCC} مورد مطالعه قرار دادیم.

در نهایت روندی را برای محاسبه بازه اطمینان ϵ در مدل FDH_{BCC} ارائه کردیم که در این روند با حل n مساله برنامه‌ریزی خطی، می‌توان بازه اطمینان ϵ را در مدل FDH_{BCC} تعیین کرد. در پایان به جای حل n مساله برنامه‌ریزی خطی، روندی را طراحی کردیم که با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی واحد، بازه اطمینان ϵ را تعیین کند.

منابع

- [1] Agrell, P. J., Tind, J. A Dual Approaches to Nonconvex Frontier Models, Journal of Productivity Analysis 16, 2001, 129- 147.
- [2] Briec, W., Kerstens, K., Vanden Eeckaut, P. Nonconvex Technologies and Cost Functions: Definitions, Duality and Non Parametric Tests of Convexity. Journal of Economics 81, 2004, 155-192.
- [3] Daneshvar, S., Facet Analysis on Data Envelopment Analysis, Thesis of P.H.D, 2002.
- [4] Deprins, D., Simar, L., Tulkens, H. Measuring Labor Efficiency in Post Offices. In: Marchand, M., Pertieau, P., Tulkens, H., the Performance of Public Enterprises Concepts and Measurements. Elsevier, Amsterdam, 1984, PP. 247- 263
- [5] JahanShahloo, G.R. Kazemi Matin, R. Hadi Vencheh, A., On FDH Efficiency Analysis with Interval Aata, Applied Mathematics and Computation, 2004, 47- 55.

- [6] Karstens, K., Vanden Eechaut, P., Estimating Return to Scale Using Nonparametric Deterministic Technologies: A New Method Based on Goodness-of-Fit, *European Journal of Operational Research* 1999, 134, 43-58.
- [7] Mehrabian, S., Jahanshahloo, G.R., Alirezaee, M.R., Amin, G.R., an Assurance Interval for the Non-Archimedean Epsilon in DEA Models, *European Journal of Operation Research*, 2000, 344-347.
- [8] Podinovski, V .V, On the Linearization of Reference Technologies for Testing Return to Scale in FDH Models, *European Journal of Operational Research* 152, 2004, 800-802.
- [9] Thrall, R. M. What is the Economic Meaning of FDH , *Journal of Productivity Analysis* 11, 1999, 243-250.
- [10] Tulkens, H., On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Application to Retail Banking, Courts and Urban Transit, *Journal of Productivity Analysis*, 1993, 183-210.
- [11] Yun, Y. B., Nakayala, H., Tanino, T., A Generalized Model for Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operation Research*, 2004, 87-105