

بهبودی بر مدل FDH در ماهیت ورودی - خروجی

سهراب کردرستمی^{۱*}، علیرضا امیر تیموری^۲، سیده فاطمه باقری^۱

^۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان

^۲ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت

چکیده

در تحلیل پوششی داده ها برای هر واحد ناکارا یک نقطه مرجع روی مرز کارایی پیدا می شود به گونه ای که واحد تحت ارزیابی با کم کردن ورودی ها و افزودن خروجی هایش به نقطه مرجعی روی مرز می رسد. واحد مرجع برای هر واحد ناکارا، ترکیبی از واحدهای کارای موجود است که در واقعیت وجود عینی ندارد و تصنعی و خیالی است. در مدل های FDH این مشکل بر طرف می شود و مراجع واحدهای موجود هستند. در این مطالعه مدلی بر اساس مدل FDH ارائه می شود که در آن واحد مرجع برای هر DMU ناکارا، تنها شامل یکی از واحدهای موجود می باشد. این مدل غیرشعاعی، قابل تبدیل به فرم خطی می باشد و مستقیماً با حل یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط می توان نقطه تصویر را برای هر واحد ناکارا روی مرز کارارا به دست آورد. همچنین یکی از مزایای این مدل نسبت به مدل FDH این است که بطور همزمان در هر دو ماهیت ورودی و خروجی ارائه می شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، FDH، کارایی.

۱ مقدمه

اندازه گیری کارایی تکنیکی نخستین بار با کارهای دبرو ۱۹۵۱ و کوپمنز ۱۹۵۱ شروع شد. به دنبال آن، فارل ۱۹۵۷ اندازه ی کارای تکنیکی را معرفی کرد. پس از آن چارنز، کوپر و رودز ۱۹۷۸ دیدگاه فارل را توسعه داده و مدل CCR را مطرح نمودند. مدل های FDH برای کامل کردن مدل های تحلیل پوششی داده ها در سال ۱۹۸۴ توسط دیپرین، سیمار و تولکنز ارائه شدند. با توجه به اینکه مدل های تحلیل پوششی داده ها شرط تحدب دارند مدل های FDH بدون شرط تحدب عمل می کنند. لذا در تکنولوژی FDH مساله از طریق برنامه ریزی صحیح مختلط حل می شود. ویژگی جذاب مدل FDH این است که واحد مرجع برای هر DMU ناکارا، تنها شامل یکی از واحد های موجود باشد که مجموعه مرجع آن، در بسیاری از موارد با مسائل حقیقی زندگی بیشتر سازگاری

^۰عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: krostami@guilan.ac.ir

کردستی و بهکاران، بسودی برمدل FDH درمایت ورودی خروجی

این مدل تنها در ماهیت ورودی و یا خروجی ارایه شده است. در این مطالعه مدلی مطرح می شود که واحد ناکارا را در هر دو ماهیت ورودی و خروجی روی مرز تصویر می کند. یعنی هر واحد ناکارا به طور همزمان می تواند با کاهش ورودی ها و افزایش خروجی هایش به مرز کارائی برسد و مستقیماً با حل یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط، نقطه تصویر هر واحد ناکارا روی مرز کارا به دست می آید.

این مطالعه به صورت زیر سازمان دهی شده است:

در بخش ۲ مروری بر مدل های CCR و FDH انجام می گیرد. مدل پیشنهادی در بخش ۳ مطرح می شود. در بخش ۴ یک مثال عددی ارایه می شود و در بخش ۵ نتیجه گیری مطرح می گردد.

۲ مروری بر مدل های FDH و CCR

شکل مجموعه امکان تولید می تواند در تعیین مدلی که می خواهیم از آن استفاده کنیم نقش مهمی داشته باشد. مرز مجموعه امکان تولید، تقریبی از تابع تولید در نظر گرفته می شود. با پذیرفتن اصول موضوعه که شامل اصل شمول مشاهدات، بی کرانی اشعه، امکان پذیری، اصل تحدب و اصل کمینه برونایی است، مجموعه امکان تولید با بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_c = \{(x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \quad \lambda_j \geq 0\}$$

که در آن x یک بردار m تایی، y یک بردار s تایی، $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ بردار ناصفر ورودی ها و $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ بردار ناصفر خروجی ها است. مدل CCR با بازده ثابت به صورت زیر می باشد:

$$\text{Min} \quad \theta - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$$

$s.t.$

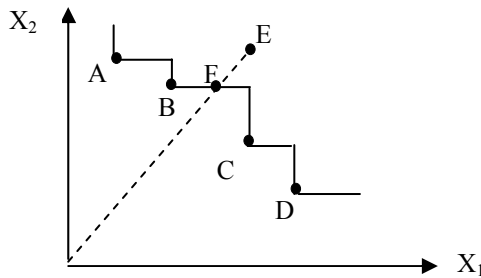
$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad \text{for all } i, j, r.$$

که در آن $\varepsilon > 0$ یک کمیت به اندازه کافی کوچک است. انگیزه ی اصلی از به وجود آمدن مدل FDH (مدل پله ای) اینست که مطمئن شویم میزان کارایی تنها بر اساس مشاهدات واقعی به دست آمده است زیرا در بعضی از مسایل، ترکیب محدب واحدها معنا ندارد مانند وقتی که می خواهیم کارایی موتور ماشین های مختلف را محاسبه کنیم. اختلاف CCR با FDH در آنست که تکنولوژی FDH خودش را به تکنولوژی تحدب محدود نمی کند این جهت گیری FDH جذاب به نظر می رسد زیرا یافتن یک توجیه برای اینکه شرط تحدب در مجموعه های امکان تولید قرار بگیرد مشکل است و کار راحت تر آن است که شرط تحدب حذف

شود پس هر کدام از واحدها در تشکیل واحد مجازی یا باید شرکت کنند یا شرکت نکنند یعنی λ_j (سهام مشارکت هر یک از واحدها) یا باید یک شود یا صفر. به عبارت دیگر $\lambda_j \in \{0, 1\}$.
شکل ۱ مثالی از مدل FDH برای پنج واحد تصمیم گیرنده با استفاده از دو ورودی و یک خروجی را نشان می دهد.



شکل ۱: مجموعه امکان تولید مدل FDH

با قبول اصول موضوعه به غیر از اصل تحذب مجموعه امکان تولید مدل FDH به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_{FDH} = \{(x, y) \mid x \geq x_j, y \leq y_j, x, y \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

که $\{x_j \geq 0, y_j \leq y_j, j = 1, \dots, n\}$ جزء مشاهدات واقعی هستند به عبارت دیگر یک نقطه عضوی از مجموعه امکان تولید است اگر مختصات همه ورودی ها حداقل به بزرگی x_j نظیر آن باشد برای $j = 1, \dots, n$ و مختصات خروجی ها نا بیشتر از بردارهای y_j نظیر مشاهدات واقعی باشد.
در واقع این مساله می تواند به فرم برنامه ریزی صحیح مختلط زیر فرمول بندی شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & x\lambda \leq \theta x_0 \\ & y\lambda \geq y_0 \\ & 1\lambda = 1 \quad \lambda_j \in \{0, 1\} \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن λ ها متغیرهای دودویی هستند و θ متغیری آزاد و پیوسته است.

مساله مدل ۲ تنها در ماهیت ورودی ارایه شده است. در ادامه مدلی مطرح می شود که بطور همزمان در هر دو ماهیت ورودی و خروجی ارایه شده است که یک امتیاز نسبت به مدل FDH است.

۳ مدل پیشنهادی

این مدل به طور همزمان ورودی ها را کاهش و خروجی ها را افزایش می دهد، بنابراین تابع هدف به صورت ترکیب فاکتورهای انقباض ورودی، $\sum_{i=1}^m \theta_i$ و فاکتورهای انبساط خروجی، $\sum_{r=1}^s \phi_r$ در یک روش جمعی مطرح می شود که یک امتیاز نسبت به مدل FDH است. برای ارزیابی (x_0, y_0) : DMU_0 مقدار این اندازه از فرمول بندی زیر به دست می آید:

$$Min \quad z = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = \phi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}$$

$$\theta_i \geq 0$$

برای خطی کردن مدل بالا از تبدیلات چارنر و کوپر (۱۹۷۶) استفاده می کنیم. با تغییر متغیر $\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r = \frac{1}{\rho}$ که ρ یک اسکالر مثبت است مساله به صورت زیر تغییر می یابد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \rho \theta_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s \rho \phi_r = 1, \\ & \sum_{j=1}^n \rho \lambda_j x_{ij} = \rho \theta_i x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \rho \lambda_j y_{rj} = \rho \phi_r y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \rho \lambda_j = \rho, \\ & \rho \theta_i \leq \rho, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \rho \phi_r \geq \rho, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{۴}$$

حال تعریف می کنیم $\bar{\lambda}_j = \rho \lambda_j$, $\bar{\theta}_i = \rho \theta_i$, $\bar{\phi}_r = \rho \phi_r$. با تعریف $\bar{\lambda}_j = \rho \lambda_j$ و از آنجایی که $\lambda_j \in \{0, 1\}$ است دو حالت وجود دارد.

۱- اگر $\lambda_j = 0$ باشد آن گاه $\bar{\lambda}_j = 0$.
 ۲- اگر $\lambda_j = 1$ باشد آن گاه $\bar{\lambda}_j = \rho$.

بنابراین می توان دو محدودیت $0 \leq \bar{\lambda}_j \leq M \lambda_j$, $\bar{\lambda}_j \leq \rho \leq \bar{\lambda}_j + M(1 - \lambda_j)$ را به مساله افزود تا شرایط بالا برقرار گردد. در نتیجه این مدل به صورت زیر فرمول بندی می شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{\phi}_r = 1, \\ & \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_{ij} = \bar{\theta}_i x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j y_{rj} = \bar{\phi}_r y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j = \rho, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \bar{\lambda}_j \leq M \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \bar{\lambda}_j \leq \rho \leq \bar{\lambda}_j + M(1 - \lambda_j), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_i &\leq \rho, & i &= 1, \dots, m, \\ \bar{\phi}_r &\geq \rho, & r &= 1, \dots, s, \\ \lambda_j &\in \{0, 1\}, & \bar{\theta}_i &\geq 0, \quad \bar{\phi}_r \geq 0. \end{aligned}$$

با حل این مدل مستقیماً نقطه تصویر هر واحد ناکاراروی مرز کارا به دست می آید. حال ثابت می کنیم که مدل پیشنهادی همواره جواب شدنی دارد و هیچ گاه بیکران نیست.

قضیه ۱-۳ مدل پیشنهادی همواره جواب شدنی دارد.

برهان کافی است یک جواب برای مساله پیدا کنیم که در تمام قیود مدل پیشنهادی صدق کند مجموعه جواب همواره جواب شدنی دارد همچنین $(\theta_i = 1, \phi_r = 1, \lambda_\rho = 1, \lambda_j = 0 \ (j = 1, \dots, n, j \neq \rho))$ در تمام قیود صدق می کند بنابراین مدل پیشنهادی همواره جواب شدنی دارد همچنین $(\bar{\theta}_i = \rho, \bar{\phi}_r = \rho, \bar{\lambda}_\rho = \rho, \bar{\lambda}_j = 0 \ (j = 1, \dots, n))$ یک جواب شدنی برای مساله برنامه ریزی خطی این مدل می باشد.

قضیه ۲-۳ مدل پیشنهادی هیچگاه بیکران نیست.

برهان در مساله می نیمم سازی شرط بیکران بودن مساله این است که $cd < 0$ باشد همچنین در مساله ماکزیمم سازی شرط بیکرانی مساله، $cd > 0$ است. پس چون مدل پیشنهادی ما از نوع می نیمم سازی است کافی است ثابت کنیم که $cd < 0$ برقرار نیست. در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} c = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \geq 0 \\ d = (d_1, \dots, d_i, \dots, d_m) \geq 0 \end{cases} \rightarrow cd \geq 0$$

بنابراین مدل پیشنهادی هیچ گاه بیکران نیست.

۴ مثال عددی

جدول ۱، داده های کتابخانه عمومی در ۲۳ ناحیه از توکیو در سال ۱۹۸۶ را نشان می دهد برای بررسی کارایی واحدها و مجموعه مرجع نظیر واحدهای ناکارا، ورودی ها و خروجی های زیر را در نظر می گیریم. ورودی ها عبارتند از:

۱- مساحت کتابخانه ($m_1 = 100$ واحد)

۲- تعداد کتاب ($1000 =$ واحد)

۳- کارمندان ($1000 =$ واحد)

خروجی ها عبارتند از:

۱- جمعیت ناحیه ($1000 =$ واحد)

۲- تعداد کتاب های ثبت شده ($1000 =$ واحد)

۳- تعداد کتاب های قرض داده شده ($1000 =$ واحد)

در جدول ۲، اندازه کارایی و مجموعه مرجع هر یک از کتابخانه های عمومی با استفاده از مدل پیشنهادی، FDH و مدل CCR نشان داده شده است.

تعداد کتابخانه	ورودی ها			خروجی ها		
	مساحت کتابخانه	تعداد کتاب ها	تعداد کارمندان	جمعیت ناحیه	ثبت شده	قرض داده
۱	۲/۲۴۹	۱۶۳/۵۲۳	۲۶	۴۹/۱۹۶	۵/۵۶۱	۱۰۵/۳۲۱
۲	۴/۶۱۷	۳۳۸/۶۷۱	۳۰	۷۸/۵۹۹	۱۸/۱۰۶	۳۱۴/۶۸۲
۳	۳/۸۷۳	۲۸۱/۶۶۵	۵۱	۱۷۶/۳۸۱	۱۶/۴۸۸	۵۴۲/۳۴۹
۴	۵/۵۴۱	۴۰۰/۹۹۳	۷۸	۱۸۹/۳۹۷	۳۰/۸۱۰	۸۴۷/۸۷۲
۵	۱۱/۳۸۱	۳۶۳/۱۱۶	۶۹	۱۹۲/۲۳۵	۵۷/۲۷۹	۷۵۸/۷۰۴
۶	۱۰/۰۸۶	۵۴۱/۶۵۸	۱۱۴	۱۹۴/۰۹۱	۶۶/۱۳۷	۱۴۳۸/۷۴۶
۷	۵/۴۳۴	۵۰۸/۱۴۱	۶۱	۲۲۸/۵۳۵	۳۵/۲۹۵	۸۳۹/۵۹۷
۸	۷/۵۲۴	۳۳۸/۸۰۴	۷۴	۲۳۸/۶۹۱	۳۳/۱۸۸	۵۴۰/۸۲۱
۹	۵/۰۷۷	۵۱۱/۴۶۷	۸۴	۲۶۷/۳۸۵	۶۵/۳۹۱	۱۵۶۲/۲۷۴
۱۰	۷/۰۲۹	۳۹۳/۸۱۵	۶۸	۲۷۷/۴۰۲	۴۱/۱۹۷	۹۷۸/۱۱۷
۱۱	۱۱/۱۲۱	۵۰۹/۶۸۲	۹۶	۳۳۰/۶۰۹	۴۷/۰۳۲	۹۳۰/۴۳۷
۱۲	۷/۰۷۲	۵۲۷/۴۵۷	۹۲	۳۳۲/۶۰۹	۵۶/۰۶۴	۱۳۴۵/۱۸۵
۱۳	۹/۳۴۸	۶۰۱/۵۹۴	۱۲۷	۳۵۶/۵۰۴	۶۹/۵۳۶	۱۱۶۴/۸۰۱
۱۴	۷/۷۸۱	۵۲۸/۷۹۹	۹۶	۳۶۵/۸۴۴	۳۷/۴۶۷	۱۳۴۸/۵۸۸
۱۵	۶/۲۳۵	۵۹۴/۱۵۸	۷۷	۳۸۹/۸۹۴	۵۷/۷۲۷	۱۱۰۰/۷۷۹
۱۶	۱۰/۵۹۳	۵۱۵/۶۲۴	۱۰۱	۴۱۷/۵۱۳	۴۶/۱۶۰	۱۰۷۰/۴۸۸
۱۷	۱۰/۸۶۶	۵۶۶/۷۰۸	۱۱۸	۵۰۳/۹۱۴	۱۰۲/۹۶۷	۱۷۰۷/۶۴۵
۱۸	۶/۵۰۰	۴۶۷/۶۱۷	۷۴	۵۱۷/۳۱۸	۴۷/۲۳۶	۱۲۲۳/۰۲۶
۱۹	۱۱/۴۶۹	۷۶۸/۴۸۴	۱۰۳	۵۳۷/۷۴۶	۸۴/۵۱۰	۲۲۹۹/۶۹۴
۲۰	۱۰/۸۶۸	۶۶۹/۹۹۶	۱۰۷	۵۹۰/۶۰۱	۶۹/۵۷۶	۱۹۰۱/۴۶۵
۲۱	۱۰/۷۱۷	۸۴۴/۹۴۹	۱۲۰	۶۲۲/۵۵۰	۸۹/۴۰۱	۱۹۰۹/۶۹۸
۲۲	۱۹/۷۱۶	۱۲۵۸/۹۸۱	۲۴۲	۶۶۰/۱۶۴	۹۷/۹۴۱	۳۰۵۵/۱۹۳
۲۳	۱۰/۸۸۸	۱۱۴۸/۸۶۳	۲۰۲	۸۰۸/۳۶۹	۱۹۱/۱۶۶	۴۰۹۶/۳۰۰

جدول ۱: داده های کتابخانه عمومی

واحد	کارایی مدل پیشنهادی	مجموعه مرجع مدل پیشنهادی	کارایی مدل FDH	مجموعه مرجع مدل FDH	کارایی مدل CCR	مجموعه مرجع مدل CCR
۱	۱	۱	۱	۱	۰/۵۸۸۸	{۱۹و۲۳}
۲	۱	۲	۱	۲	۰/۶۴۲۹	{۱۸و۲۳}
۳	۱	۳	۱	۳	۰/۶۵۱۲	{۱۸و۲۳}
۴	۱	۴	۱	۴	۰/۶۱۷۹	{۱۸و۲۳}
۵	۱	۵	۱	۵	۰/۹۱۱۳	{۱۷و۲۳}
۶	۱	۶	۱	۶	۰/۷۴۵۰	{۲۳}
۷	۱	۷	۱	۷	۰/۷۱۰۰	{۱۸و۱۹و۲۳}
۸	۱	۸	۱	۸	۰/۷۰۲۵	{۱۷و۱۸}
۹	۱	۹	۱	۹	۰/۹۰۶۷	{۱۹و۲۳}
۱۰	۱	۱۰	1	۱۰	۰/۷۹۳۳	{۱۷و۱۸}
۱۱	۰/۵۸۵۲	۱۸	۰/۹۱۷۵	۱۸	۰/۶۵۰۹	{۱۸و۲۳}
۱۲	۱	12	۱	12	۰/۷۷۲۸	{۱۷و۱۸و۲۳}
۱۳	۱	13	۱	13	۰/۶۹۰۹	{۱۸و۲۳}
۱۴	۱	14	۱	14	۰/۸۰۰۴	{۱۸و۲۳}
۱۵	۱	15	۱	15	۰/۹۳۵۸	{۱۷و۱۸و۲۳}
۱۶	۰/۶۶۱۸	۱۸	۰/۹۰۶۹	۱۸	۰/۷۶۵۸	{۱۷و۱۸و۲۳}
۱۷	۱	17	۱	17	۱	17
۱۸	۱	18	۱	18	۱	18
۱۹	۱	19	۱	19	۱	19
۲۰	۱	20	۱	20	۰/۹۵۸۱	{۱۸و۱۹و۲۳}
۲۱	۱	21	۱	21	۰/۹۴۱۸	{۱۸و۲۳}
۲۲	۰/۵۰۹۱	۲۳	۰/۹۱۲۵	۲۳	۰/۷۰۱۱	{۱۸و۲۳}
۲۳	۱	23	۱	23	۱	23

جدول ۲: اندازه کارایی و مجموعه مرجع مدل ها

با توجه به نتایج به دست آمده از جدول ۲، واحدهای ۱۱ و ۱۶ و ۲۲ تحت مدل پیشنهادی ناکارا شدند. مشاهده می شود که همین واحدها نیز تحت مدل FDH ناکارا هستند اما در مدل CCR ، تنها واحدهای ۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۳ کارا هستند. همچنین مجموعه مرجع برای این واحدهای ناکارا در مدل پیشنهادی تنها یکی از واحدهای موجود است و این در حالی است که در مدل CCR مجموعه مرجع برای واحدهای ناکارا، ترکیبی از واحدهای کارای موجود می باشد. به عنوان مثال واحد ۱۶ را در نظر بگیرید. مجموعه مرجع این واحد تحت مدل پیشنهادی و مدل FDH تنها شامل واحد ۱۸ است. یعنی نقطه مرجع آن تنها شامل یک واحد می باشد ولی مجموعه مرجع واحد ۱۶ تحت مدل CCR شامل واحدهای ۱۷، ۱۸ و ۲۳ است که نشان دهنده آنست که نقطه مرجع برای این واحد توسط مدل CCR ترکیبی از واحدهای ۱۷، ۱۸ و ۲۳ می باشد که در این صورت DMU مرجع بر آن غیر واقعی است. میزان کارایی این واحد در هر سه مدل نشان داده شده است. همچنین در مدل CCR واحد ۱۸، به تعداد چهارده مرتبه مرجع شده و این در حالی است که در FDH و مدل پیشنهادی واحد ۱۸، سه مرتبه مرجع شده است.

۵ نتیجه گیری

اندازه گیری کارایی تکنیکی نخستین بار با کار دبرو و کوپمنز در سال ۱۹۵۱ شروع شد. مدل های FDH برای کامل کردن مدل های تحلیل پوششی داده ها در سال ۱۹۸۴ توسط دیپیرین و همکارانش ارائه شد. با توجه به اینکه مدل های تحلیل پوششی شرط تحدب دارند. مدل های FDH بدون شرط تحدب عمل می کنند لذا از طریق برنامه ریزی صحیح مختلط حل می شود. همچنین واحد مرجع برای هر واحد ناکارا، تنها شامل یکی از واحد های موجود است بر این اساس، مدلی در این مطالعه ارائه شده، که همواره دارای جواب شدنی است و هیچ گاه بیکران نیست. یکی از امتیازات این مدل نسبت به FDH این است که این مدل در هر دو ماهیت ورودی و خروجی به طور همزمان ارائه می شود. که مستقیماً با حل یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط تصویر هر واحد ناکارا روی مرز کارا به دست می آید.

منابع

- [1] Silva M. C. A., Castro P. and Thanassoulis E. Finding closest targets in non-oriented DEA models: the case of convex and non-convex technologies. *Journal of Productivity Analysis*, 2003, 19:251-269.
- [2] Thrall R. M., what is the economic meaning of FDH ? *Journal of productivity Analysis*, 11, 1999, pp.243-250.
- [3] Charnes A., W.W. Cooper, and E. Rhodes, Measuring the Efficiency of Decision making Units. *European Journal of Operational Research* 2, 1978, 429-444.
- [4] Deprins D, Simar L, Tullkens H, Measuring labor-efficiency in post officies. In Marchand M, Pestieau p, Tullkens H, editors. *The performance of public enterprises*. Amsterdam: Etsvier science publishers: 1984, 243-267.
- [5] Podinovski V. V., On the linearisation of reference technologies for testing returns to scale in FDH models. *European journal of operational Research*, 152, 2004, 800-802.