

# مقایسه عددی جواب معادله دیفرانسیل تصادفی با نوفه سفید گاوسی و پواسونی

رمضان رضایان<sup>۱\*</sup>، رحمان فرنوش<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، تهران، ایران

<sup>۲</sup>دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت، نارمک، تهران، ایران

## چکیده

فرم تصادفی مدل ریاضی مربوط به انتشار ویروس ایدز که یک معادله دیفرانسیل تصادفی (SDE) می باشد را در نظر می گیریم. در SDE، توزیع نوفه سفید نقش بسزایی در حل عددی و تحلیلی دارد. هدف ما در این مقاله، مقایسه جواب عددی SDE با نوفه سفید گاوسی و پواسونی برای مدل انتشار ویروس ایدز می باشد. نتایج عددی و شبیه سازی مربوطه را با استفاده از نرم افزار MATLAB انجام داده و در نهایت نتیجه گیری می نمایم.

**کلمات کلیدی:** معادلات دیفرانسیل تصادفی، نوفه سفید گاوسی، نوفه سفید پواسونی، انتگرال ایتو فرآیند وینر، روش اویلر، ماریاما.

## ۱ مقدمه

سیستم های فیزیکی اغلب بوسیله معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) مدل سازی می شوند. هر چند بسیاری از مدل ها به صورت مطلوبی نمایش داده می شوند ولی در بسیاری از موارد اثرات تصادفی نادیده گرفته می شوند. تا مدتها در بسیاری از مدل های توسعه یافته برای توصیف پدیده های فیزیکی، عبارتهای تصادفی به دلیل، عدم وجود روش های عددی نامناسب و فقدان کامپیوترهای به اندازه کافی توانمند، نادیده گرفته می شد. در سال های اخیر مدل سازی ریاضی به دلیل کاربرد وسیع آن در علوم مورد توجه قرار گرفته است. قسمت عمده ای از این مدل ها در قالب فرآیندهای تصادفی<sup>۳</sup> می باشند. یک فرآیند تصادفی  $X = \{X(t) : t \in T\}$  روی فضای احتمال  $(\Omega, F, P)$  (فضای نمونه،  $F$  یک سیگما میدان،  $P$  یک تابع احتمال می باشد) و مجموعه اندیس گذار  $T$ ، یک تابع  $X : T \times \Omega \rightarrow R$  از دو متغیر است به طوری که برای هر  $X(t) = X(t, \cdot)$ ،  $t \in T$  یک

<sup>۱</sup>عده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: [r.rezaeyan@gmail.com](mailto:r.rezaeyan@gmail.com)

<sup>۱</sup> Stochastic differential equation

<sup>۲</sup> Ordinary differential equation

<sup>۳</sup> Stochastic process

رضایان و بنگار، مقاله‌های جواب معادله دیفرانسیل تصادفی با نوسانگر کلاسی و پواسونی

متغیر تصادفی و برای هر  $w \in \Omega$ ،  $X(., w) : \Omega \rightarrow R$  یک تجسم و یا مسیر نمونه ای از فرآیند تصادفی نامیده می شود [1].

از مهم ترین مثال هادر فرآیند تصادفی، می توان حرکت برآونی ( فرآیند وینر<sup>۴</sup> ) را نام برد .  
برای اولین بار در سال ۱۸۲۷ میلادی گیاه شناسی بنام رابرت برآون مشاهده نمود که دانه های گرده معلق در مایع دارای حرکت اند و در سال ۱۹۰۵، انیشتین علت حرکت را بمباران دانه های گرده توسط مولکول های مایع معرفی کرد که بعدها به نام حرکت برآونی نامیده شد [1]. دو مدل ریاضی برای توصیف حرکت ذره ای که تحت بمباران مولکولی قرار گرفته اند عبارتند از فرآیند وینر و معادلات دیفرانسیل تصادفی.  
یک فرآیند وینر استاندارد  $\{W_t : t \geq 0\}$  یک فرآیند گاوسی زمان پیوسته است با نموهای مستقل به طوری که به ازای هر  $0 \leq s \leq t$ ،

$$W(0) = 0 \quad W.P.1, \quad E(W_t) = 0, \quad Var(W_t - W_s) = t - s$$

در اینجا کلیاتی از SDE و انتگرال های تصادفی بیان می نمایم. فرض نمایید ODE زیر را مفروض باشد:

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt$$

که اگر  $X(t) = X(t; t_0, x_0)$  جوابی از این معادله دیفرانسیل تصادفی باشد که در شرایط اولیه  $X(t_0) = x_0$  صدق کند. آن گاه با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق نتیجه می شود:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds \quad (1)$$

با اضافه کردن عوامل تصادفی در سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی ( در شرایط اولیه، شرایط مرزی مساله یادر توصیف تابع سیستم فیزیکی ) یک سیستم SDE، بوجود می آید.  
بعضی از عرصه هایی که در این نوع معادلات برای مدل سازی به کار می روند عبارتند از انتشار سخت، سرمایه گذاری بودجه، دینامیک جمعیت، زلزله شناسی، علوم پزشکی، فعالیت های ماهواره ای و غیره.  $\xi(t)$  را یک فرآیند تصادفی در نظر بگیرید که معادله (۱) توسط این فرآیند مختل می شود یعنی:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))\xi(t)dt \quad (2)$$

در این صورت  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$  یک فرآیند تصادفی، معادله (۲) یک SDE با ضریب رانش<sup>۵</sup>  $f(t, X(t))$  و ضریب انتشار<sup>۶</sup>،  $g(t, X(t))$  است که دو فرآیند  $\{\xi(t) : t \geq 0\}$  و  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$  را به هم مربوط می سازد [2].

حال اگر این فرآیند اخلال کننده ناشی از بمباران مولکولی باشد آن گاه با استدلال فیزیکی می توان نتیجه گرفت که  $\xi(t)$  به صورت نوفه سفید ( مشتق فرآیند وینر ) با یک پارامتر مناسب است [3].

<sup>4</sup> Wiener Process

<sup>5</sup> drift

<sup>6</sup> diffusion

باانتگرال گیری از طرفین رابطه (۲) داریم:

$$X(t, w) = X(t_0, w) + \int_{t_0}^t f(s, X(s, w)) ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s, w)) \xi(w) ds \quad (۳)$$

وقتی:

$$\xi_s(w) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(t+s) - W(t)}{s}$$

در نتیجه:

$$X(t, w) = X(t_0, w) + \int_{t_0}^t f(s, X(s, w)) ds + \int_{t_0}^t b(s, X(s, w)) dW_s(w)$$

اما می دانیم که فرآیند  $\{W(s), s \geq 0\}$  مشتق پذیر نیست و  $g_s(w)$  به عنوان یک فرآیند تصادفی از  $s$  وجود خارجی ندارد (در حقیقت یک چگالی طیفی یکنواخت ایجاب می کند که تابع کوواریانس آن مضرب ثابتی از تابع دیراک-دلتا<sup>۷</sup> باشد).

فرآیند وینر در هر بازه زمانی متناهی با تغییر کراندار نیستند، بنابراین دومین انتگرال در (۳) برای هر مسیر نمونه ای نمی تواند تعبیری نظیر یک انتگرال ریمان - استیلیس داشته باشد. پس روابط معادلات مربوط به انتگرال گیری

آن با انتگرال متداول ذکر شده متفاوت است به طوری که  $\int_a^b f(t) dW(t)$  به مفهوم معمولی وجود ندارد و به صورت معادلات با انتگرال های تصادفی ایتو<sup>۸</sup> و یا استراتنویچ<sup>۹</sup> بیان می شود [4]. اگر  $[t_i, t_{i+1}]$  را  $-i$  مین فاصله زمانی فرض کنیم آن گاه انتگرال که با انتخاب نقاط ابتدای بازه (انتهای چپ فاصله زمانی)  $t_j^* = t_j$  تعریف می شوند انتگرال ایتو نامیده و بانماد:

$$I_f(w) = \int_0^T f(s, w) dW_s(w)$$

نمایش می دهیم و انتگرالی را که با انتخاب نقاط میانی بازه،  $t_j^* = \frac{1}{2}(t_{j+1} + t_j)$ ، تعریف می شود، انتگرال استراتنویچ نامیده و به صورت زیر نشان می دهیم:

$$J_f(w) = \int_0^T f(s, w) \circ dW_s(w)$$

و مدل (۳) را یک  $SDE$  می نامیم. هر فرآیندی که در (۳) صدق نماید مانند،  $\{X(t) : t \geq 0\}$ ، یک فرآیند ایتو می باشد که به شکل عمومی زیر است:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds + \int_0^t g(s, X(s)) dW(s) \quad t \geq 0$$

<sup>7</sup> Dirac-delta

<sup>8</sup>Ito

<sup>9</sup>Stratonovich

حل معادله  $SDE$  عموماً پیچیده است و تنها حالات خاصی وجود دارد که راه حل های آن ها شناخته شده است (بیینید Kloeden). با وجود راه حل های عمومی ارایه شده توسط محققان، فاصله بین پیشرفتهای نظری در معادلات دیفرانسیل تصادفی با کاربرد عملی آن بسیار زیاد است و به همین علت در دهه های گذشته در مدل سازی ریاضی مربوط به حوادث طبیعی از عامل تصادفی، صرف نظر می کردند. یکی از مهمترین دلایل آن ها این بوده که در آن زمان روش حل عددی مناسب برای مدل ها ارایه شده با وجود عامل تصادفی در دسترس نبوده است. در سال های اخیر ریاضیدانان و آماردانان زیادی در این زمینه فعالیت نموده اند که از جمله نتایج آن می توان به روش اوایلر - ماریاما<sup>9</sup> که یکی از ساده ترین روش ها برای تقریب عددی  $SDE$  می باشد اشاره کرد [4]. سپس میلستین<sup>10</sup> بوسیله بسط تیلور یک جواب تقریبی برای  $SDE$  در حالت کلی ارایه نمود [5].

کیم و کیونلی<sup>11</sup> برای اولین بار در ۲۰۰۶ میلادی تقریب عددی  $SDE$  بانوفه سفید پواسونی را مطرح کردند [6]. با وجود روش های عددی فوق در دهه های اخیر دانشمندان زیادی در رشته های مختلف در مسایل کاربردی خود با فرض وجود عامل تصادفی مدل های مربوطه را به روش عددی حل نمودند از جمله آرنی و راعو<sup>12</sup> مدل ریاضی مربوط به انتشار ویروس ایدز در هندوستان را به روش عددی با فرض نوفه سفید گاوسی حل نمودند [7]. در ایران در مرجع [8] در سال (۲۰۰۷) فرآیند انتشار ویروس ایدز را مورد بررسی قرار گرفته و مدل  $SDE$  را با نوفه سفید گاوسی به روش اوایلر تقریب زده اند.

حال ما در این مقاله قصد داریم که در فرم  $SDE$  مربوط به انتشار ویروس ایدز، یک مقایسه بین تقریب عددی با نوفه سفید گاوسی و پواسونی انجام داده و نتیجه گیری کنیم. برای این منظور در بخش ۲، روش حل عددی  $SDE$  با نوفه سفید گاوسی و پواسونی را به طور مجزا از هم و به صورت مختصر بیان می کنیم و در بخش ۳، مدل  $SDE$  انتشار ویروس ایدز را شناسایی نموده و محاسبات عددی را با استفاده از نرم افزار MATLAB انجام داده و نتیجه گیری می نمایم.

## ۲ تقریب عددی $SDE$

فرض کنید فرآیند ایتو  $X = \{X_t : t \in [t_0, T]\}$  جواب های  $SDE$  اسکالر

$$dX_t = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (۴)$$

با مقدار اولیه  $X(t_0) = x_0$  و افزایش داده شده

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \leq \dots \leq \tau_N = T$$

در فاصله  $[t_0, T]$  باشد که در آن توزیع نوفه سفید گاوسی می باشد.

تقریب اوایلر (۴) یک فرآیند تصادفی زمان پیوسته  $\gamma = \{\gamma_t : T \in [t_0, T]\}$  است که در معادله بازگشتی زیر صدق می کند،

<sup>9</sup>Euler - Maryama Method

<sup>10</sup>Milestone Method

<sup>11</sup> Kim and Kyunly

<sup>12</sup>Arni and Rao

$$y_{n+1} = y_n + f(t_0, y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + g(\tau_n, y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}) \quad (5)$$

برای  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  با مقدار اولیه

$$\Delta_n = \frac{T - t_0}{n}, \quad y_n = y(\tau_n), \quad y_0 = x_0$$

$$\Delta = \max \Delta_n, \quad \Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n} \rightarrow N(0, \Delta n), \quad \tau_n = t_0 + n\Delta$$

دنباله  $y = \{y_n : n = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$  مقاداری از تقریب اویلر-ماریاما در زمان مشخص  $\tau_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ) می باشد [8, 4].

حال فرض نماییم نوفه سفید  $\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt}$  در [5, 4] در (۴)، دارای توزیع پواسونی باشد که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n(\Delta t)} Z_k \delta(t - \tau_k)$$

که در آن  $\delta(t)$  یک تابع دیراک-دلتا است.

$$\delta(t - \tau_k) = \begin{cases} 1 & t = \tau_k \\ 0 & t \neq \tau_k \end{cases}$$

تقریب اویلر برای این مدل، یک فرآیند تصادفی زمان گسسته  $y = \{y_t : t \in [t_0, T]\}$  است که در فرم بازگشتی زیر صدق می نماید.

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\Delta t + g(t_n, y_n)\Delta X \quad (6)$$

که در آن  $y_0 = X(t_0) = x_0$ ،  $y_n = y(t_n)$ ،  $\Delta X = \sum_{k=1}^{n(\Delta t)} Z_k$ ، ارتفاع  $\{Z_k\}$ ، یک نمونه<sup>۱۳</sup> تصادفی  $(Z_1, Z_2, \dots)$ ، را یک نمونه تصادفی گوئیم هرگاه متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل از هم باشند) از توزیع مشخصی مثلاً توزیع نمایی با پارامتر  $\mu$  می باشند،

$$\Phi(Z) = \frac{e^{-Z}}{\mu} \theta(Z)$$

که  $\{Z_k\}$  توسط رابطه زیر شبیه سازی می گردد:

$$Z_k = -\mu \ln(1 - U_k)$$

$\theta(Z)$  عددی تصادفی از توزیع یکنواخت در فاصله واحد، (0,1) می باشد [10].

<sup>13</sup>Sample

### ۳ شناسایی مدل

یکی از ساده ترین مدل های رشد جمعیت ( جمعیت انسان ها، باکتری، ویروس، و ... ) عبارت است از:

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0 \quad (7)$$

که در آن  $N_0$ ، مقدار ثابت،  $N(t)$  تعداد کل جمعیت در لحظه  $t$ ،  $a(t)$  نرخ رشد و جمعیت در زمان  $t$  است که ضریب  $a(t)$  کاملاً مشخص و معلوم نمی باشد ولی فقط می دانیم که:

$$a(t) = r(t) + \text{"noise"}$$

که رفتار نوفه (*noise*) برایمان دقیقاً مشخص نمی باشد ولی توزیع احتمال آن کاملاً مشخص است و  $r(t)$  هم تابعی غیر تصادفی بر حسب  $t$  می باشد. حال فرض کنید

$$a(t) = r(t) + b\xi_t \quad (8)$$

که  $\xi_t$  نوفه سفید می باشد ( $\frac{dW_t}{dt} = \xi_t$ )،  $r(t) = a$ ،  $b$  و مقادیر ثابت باشند. با جایگذاری (8) در (7) داریم:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (r(t) + b\xi_t)N(t)$$

در نتیجه:

$$dN(t) = aN(t)dt + bN(t)dW_t \quad (9)$$

جواب (9)، یک فرآیند تصادفی است که آن را حرکت برآونی هندسی می نامیم [3].

$$N(t) = N_0 e^{(a - \frac{1}{2}b^2)t + bW_t}$$

یکی از مدل های تصادفی رشد جمعیت، رشد ویروس ایدز در سطح یک جامعه محدود است که برای اولین بار توسط آرنی و راعو در [7] به صورت زیر معرفی گردید

$$dy_t = (r_1 X_t y_t - r_2 y_t)dt + (b_1 X_t y_t - b_2 y_t)dW_t \quad (10)$$

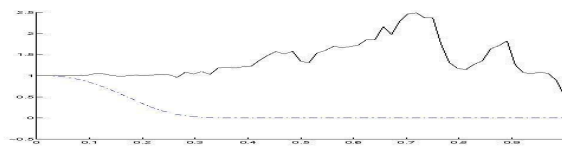
که در آن،  $r_1, r_2, b_1, b_2$  ضرایب ثابت،  $X_t$  تعداد افراد سالم در جامعه،  $y_t$  تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز در زمان  $t$  و  $\{W_t : t \geq 0\}$  یک فرآیند وینر استاندارد می باشد. فرم (10) یک مدل *SDE* با ضریب رانش  $r_1 X_t y_t - r_2 y_t$  و ضریب انتشار،  $b_1 X_t y_t - b_2 y_t$  است. از آنجائی که به صورت تحلیلی نمی توان جواب دقیق (10) را محاسبه کرد، به روش عددی جواب تقریبی آن را به دست می آوریم و چون ساده ترین روش، روش اوایلر-ماریاما است با استفاده از این روش جواب تقریبی (10) را به کمک برنامه MATLAB به دست می آوریم.

#### ۴ نتایج عددی

مدل (۱۰)، یک فرم تصادفی باضرائب مربعی می باشد و معادلات دیفرانسیل با ضرائب مربعی، تحت شرایط بسیار بسیار ویژه ای جواب دقیق آن را می توان به دست آورد و در حالت کلی نمی توان این کار را انجام داد لذا ناچاریم چنین معادلاتی را به روش عددی تقریب زده و جواب عددی آن را به دست بیاوریم. برای این منظور با فرض  $\Delta = 2^{-4}$ ,  $r = 1$ ,  $b = 1.5$ ,  $X_0 = 1$  و  $Y_t = t$  با استفاده از روش اوایلر-ماریاما و به کمک نرم افزار MATLAB مقادیر زیر حاصل گردیده است:

T=time	0	0.24	0.48	0.72	0.96
$y_t$ with GWN	1	0.645	0.3101	0.0801	0.148
$y_t$ with PWN	1	0.7227	0.4740	0.2734	0.1329

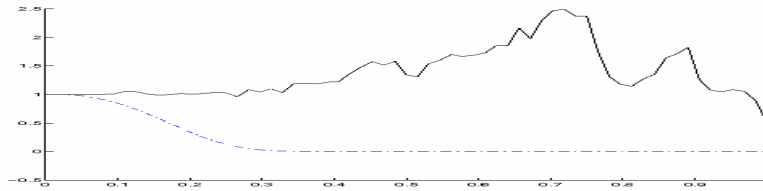
که در آن GWN، نماد نوفه سفید گاوسی و PWN، نوفه سفید پواسونی است. برای مقایسه دقیق تر در نتیجه گیری، با استفاده از برنامه MATLAB و مقادیر اولیه فوق نمودار تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز را در فاصله زمانی  $[0, T]$  برای مدل (۱۰) با نوفه سفید گاوسی و پواسونی بطور مجزا از هم رسم نموده ایم که نمودار حاصل به صورت زیر می باشد. در نمودار (۱)، منحنی که به صورت نقطه چین است، مقادیر  $Y_t$  را با فرض نوفه سفید گاوسی نمایش می دهد و منحنی با خط ممتد، نمایش مقادیر  $Y_t$ ، به ازای نوفه سفید پواسونی می باشد.



نمودار ۱: نمودار تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز،  $Y_t = t$  با  $\Delta = 2^{-4}$

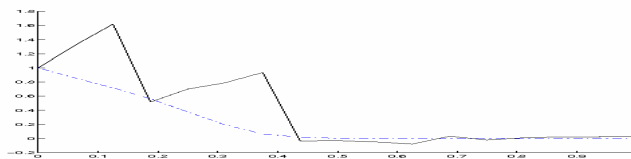
برای دقت بیشتر با مقادیر اولیه فوق برای  $Y_t = t$  به ازای  $\Delta = 2^{-6}$ ، با استفاده از روش اوایلر-ماریاما در برنامه MATLAB حاصل  $Y_t$  را به دست آوردیم که نتایج در جدول زیر و نمودار (۲) نشان داده شده است.

T=time	0	0.24	0.48	0.72	0.96
$y_t$ with GWN	1	0.5937	0.2541	0.0507	0.0054
$y_t$ with PWN	1	0.7460	0.5127	0.3172	0.1714

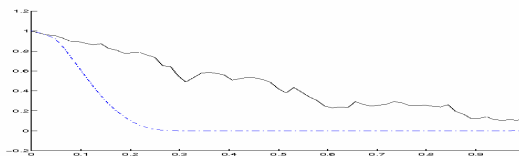


نمودار ۲: نمودار تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز،  $Y_t = t$  با  $\Delta = 2^{-6}$

نمودارهای (۳) و (۴)، حاصل  $Y_t$  را با نوفه سفید گاوسی و پواسونی برای  $Y_t = e^t$  بازای  $\Delta = 2^{-4}$  و  $\Delta = 2^{-6}$ ، به ترتیب نشان می دهد.



نمودار ۳: نمودار تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز،  $Y_t = e^t$  با  $\Delta = 2^{-4}$



نمودار ۴: نمودار تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز،  $Y_t = e^t$  با  $\Delta = 2^{-6}$

با توجه به نمودارهای فوق در می یابیم که تقریب عددی با نوفه سفید پواسونی برای مدل فوق در مقایسه با نوفه سفید گاوسی از خطای کمتری برخوردار می باشد و جواب دقیق تری حاصل می گردد.



## منابع

- [1] S. Karlin, H. M. Taylor, A first course in stochastic processes, AP, 1975.
- [2] L. Arnold, Stochastic Differential Equations, Theory and Applications, Wiley, 1974.
- [3] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations. Springer, 1985.
- [4] P.E. Kloeden, E. Platen. Numerical solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin, 1995.
- [5] G. N. Milstein, Numerical Integration of SDE, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [6] C. Kim, E.K. Lee, Numerical Method for Solving Differential Equations with Dichotomous noise, Physical Review, E73, 026101 2006.
- [7] S. R. Arni, S. Rao, Mathematical Modeling of AIDS epidemic in Indiana, Current Science. 84 9-10.
- [8] E. Pasha, H. R. Mostafaei, Diffusion process of AIDS in IRAN, mathematical science, 2007.
- [9] K. Burrage and E. Platen, Rung-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations, Ann. Numer. Math. 1994, 1, 63-78.
- [10] M. Carletti, Numerical solution of Stochastic Differential problems in the biosciences, j .comp .appl. Math, 185 2006, 422-440.

