

تحلیل حساسیت واحدهای کارآ در تحلیل پوششی داده ها با بازده به مقیاس متغیر

سهراب کرد رستمی*، علیرضا امیر تیموری^۱، هستی پور جعفر^۱، صادق پور جعفر^۱

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت

رسید مقاله: ۸۸/۲/۴

پذیرش مقاله: ۸۸/۶/۳۱

چکیده

در این مقاله، تحلیل پوششی داده ها با بازده به مقیاس متغیر ارایه شده است. واحد های تصمیم گیرنده (DMU) به صورت کارآ یا ناکارآ طبقه بندی می شوند که بعد از تغییرات ورودی / خروجی های آن ها، ممکن است طبقه بندی شان تغییر کند. یعنی یک DMU ی کارآ می تواند ناکارآ شود و بالعکس. هدف این مقاله ارزیابی تغییرات ورودی / خروجی های یک DMU ی سوپر کارآی رأسی است به گونه ای که وضعیت کارآیی آن تغییر نکند و در نتیجه ناحیه ای کارآ برای آن واحد مشخص می گردد. تشخیص این ناحیه با استفاده از روش تکرار می باشد. در اولین گام، مدل بسط داده شده تحلیل پوششی داده ها (DEA) لحاظ شده که با استفاده از آن DMU ی تحت ارزیابی از مجموعه مرجع جدا می شود. با استفاده از برنامه ریزی پارامتریک و با به کار بردن جدول سیمپلکس جواب بهینه به دست می آید، سپس جواب های دوآل استخراج و معادله ی وجهک متناظر مشخص می گردد. با تکرار روش از وجهکی به وجهک مجاور رفته و تا تعیین همه ی وجهک های مرز ناحیه ی کارآیی برای DMU ی مورد نظر این عمل ادامه یافته، تا ناحیه ی کاملی از کارآیی به دست آید.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها (DEA)، بازده به مقیاس متغیر (VRS)، تحلیل حساسیت، LP، مدل بسط داده شده ی تحلیل پوششی داده ها، برنامه ریزی پارامتریک.

۱ مقدمه

تحلیل حساسیت یک واحد کارآی رأسی با تغییرات ممکن ورودی ها و خروجی های آن همواره مورد توجه تحلیل گران DEA بوده است. محققین متعددی در مورد تحلیل حساسیت واحدهای کارآ در تحلیل پوششی داده ها مطالعاتی داشتند و روش هایی برای به دست آوردن تغییرات مجاز ورودی ها و خروجی ها پیشنهاد شده است. چارنز و نرالچ [۵] نخستین بار به این موضوع پرداختند به این صورت که بعد از آشفتگی

*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: krostami@guilan.ac.ir

کردستی و بکاران، تحلیل حساسیت واحد های کار در تحلیل پوششی داده ها با بازده بر مبنای متغیر

ماتریس پایه ی بهینه، همچنان بهینگی آن حفظ گردید. مطالعات دیگری توسط تامسون و گنزالس [۱۱] مطرح شد.

آن ها از متغیرهای بهینه ی دوآل در مدل های مضربی برای ارزیابی کارآیی DMU ی مورد نظر استفاده کردند. در مطالعات بعدی از مدل گسترش یافته استفاده شد به طوریکه DMU ی مورد بررسی از مجموعه ی مرجع خارج شده و متغیرها با تغییراتی در ورودی و خروجی تعریف گردیده و نیز با ارایه ی تعریفی از ناحیه ی کارآ، حفظ کارآیی DMU ی مورد بحث بررسی گردید.

هدف از این مقاله به دست آوردن ناحیه ای کارآ (RE_0) است، به طوری که کارآیی واحد مورد نظر با تغییرات مجاز ورودی / خروجی همچنان کارآ باقی بماند.

همچنین روشی برای به دست آوردن ناحیه ی کارای کامل ارایه گردید که به طور همزمان همه ی ورودی ها و خروجی های DMU_0 ی کارآ تغییر کنند [۱۰]. تاکنون با استفاده از مدل بسط داده شده ی تحلیل پوششی داده ها و به کاربردن برنامه ریزی پارامتریک و تغییرات ورودی / خروجی به عنوان پارامتر، ناحیه ی کارآ DMU_0 ارایه گردید. ناحیه ی مذکور با روشی که وجهک های مرز کارآ را مشخص می سازند، به دست می آید. با توجه به این که بررسی های قبلی شرط لازم کارآ بودن را دنبال می کردند، در این مقاله سعی بر پیدا کردن شرایط لازم و کافی بوده که نهایتاً منجر به مشخص نمودن ناحیه ی کارآی کامل برای DMU_0 خواهد شد.

۲ ناحیه کارآ

ناحیه کارآ برای DMU_0 کارآ (RE_0)، مجموعه ی همه مقادیر ممکن است که برای DMU_0^* می توان به دست آورد تا همچنان کارآ باقی بماند. یعنی

$$RE_0 = \{(x_0^{*T}, y_0^{*T})^T \mid x_0^{*T} \geq x_0^T, y_0^{*T} \leq y_0^T\} \quad (1)$$

$(x_0^{*T}, y_0^{*T})^T$ در مقایسه با $n-1$ DMU ی دیگر کارآ است. در واقع RE_0 به معنای تشخیص بیشترین تغییرات ورودی / خروجی ممکن است. یعنی DMU_0^* تحت تغییرات به دست آمده کارآ می باشد، اگر و فقط اگر تغییرات در شرایط لحاظ شده صدق کنند. با حذف DMU ی مورد نظر از مجموعه ی امکان تولید (PPS)، فضای تولید کاهش می یابد و با انتخاب DMU_0 به عنوان واحد سوپر کارآ و حذف آن، مجموعه ی امکان تولید کاهش یافته ($RPPS_0$)، حاصل می گردد. برای شروع یک وجهک از ($RPPS_0$) که شامل یکی از نقاط تصویری DMU_0 مانند DMU_{22} (که نقطه تصویر در طول خروجی)، یا DMU_{21} (که نقطه تصویر در طول ورودی) است، به دست می آید. (شکل ۲)

این عمل با حل برنامه ریزی خطی که هدف آن مینیمم سازی مقدار افزایش ورودی یا کاهش خروجی (به فرض ورودی یا خروجی اول)، با حفظ شرط کارآ بودن DMU_0 و سپس به دست آوردن وجهک های متناظر با استفاده از ضرایب دوآل مندرج در جداول بهینه ی سیمپلکس می باشد [۱۱].

ورودی / خروجی ممکن است. یعنی DMU_0^* تحت تغییرات به دست آمده کارآ می باشد، اگر و فقط اگر تغییرات در شرایط لحاظ شده صدق کنند. با حذف DMU ی مورد نظر از مجموعه ی امکان تولید (PPS)، فضای تولید کاهش می یابد و با انتخاب DMU_2 به عنوان واحد سوپر کارآ و حذف آن، مجموعه ی امکان تولید کاهش یافته ($RPPS_2$)، حاصل می گردد. برای شروع یک وجهک از $RPPS_2$ که شامل یکی از نقاط تصویری DMU_2 (به عنوان واحد سوپر کارآ) مانند DMU_{22} (که نقطه تصویر در طول خروجی)، یا DMU_{21} (که نقطه تصویر در طول ورودی) است، به دست می آید. (شکل ۲) بدون آنکه از کلیت استدلال کاسته شود و با فرض افزایش اولین ورودی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \min \beta_1 \\ & \text{s.t.} \\ & \beta_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j x_{1j} \geq -x_{10} \\ & -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j x_{ij} \geq -x_{i0} \quad i = 2, \dots, m \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j, \beta_1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

البته ممکن است (۱) نشدنی گردد که در این صورت می توان β_1 را به دلخواه افزایش داد بدون اینکه DMU_0^* نا کارآ گردد. حال در صورتی که جواب بهینه λ^* و β_1^* وجود داشته باشد آن گاه

$$DMU_0^* = DMU_{01} = (x_{10} + \beta_1^*, x_{20}, L, x_{m0}, y_{10}, L, y_{r0})^T \quad (2)$$

نقطه تصویر DMU_0 در $RPPS_0$ در طول اولین ورودی خواهد بود. مرحله ی بعدی بدست آوردن معادله ی وجهی از $RPPS_0$ شامل DMU_{01} است که می تواند با دوآل مدل به کار رفته به دست آید.

$$\begin{aligned} \max \quad & - \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + w \\ \text{s.t.} \quad & - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + w \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq 0, \\ & v_1 \leq 1 \\ & v_i, \mu_r \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (2)$$

مقدار بهینه متغیرهای دوآل، $i = 1, \dots, m$ و v_i^* و $r = 1, \dots, s$ و μ_r^* و w^* ضرایب وجهی از $RPPS_0$ هستند که شامل نقطه تصویر می باشد.

۳ تکرار روش

در اولین مرحله با اطلاعاتی از جدول سیمپلکس، یک وجهک به دست می آید. با تغییراتی دیگر و با اعمال محوری از وجهک به دست آمده به وجهک مجاور، در صورت وجود، رفته و این روند تکرار می شود. این عمل با به کار بردن برنامه ای پارامتریک با تغییرات ورودی / خروجی به عنوان پارامتر و با استفاده از RHS مدل (۱) انجام می پذیرد. این تغییرات به گونه ای باید باشد تا ضمن شدنی بودن (۱)، پایه ی بهینه، همچنان بهینه باقی بماند. یعنی نامنفی بودن و بهینگی باید حفظ شوند.

در عمل از DMU_0 حرکت کرده و با توجه به مجموعه ی داده های جدید و با به کار بردن مدل بسط داده شده، بهینگی حفظ می شود زیرا تغییرات در نظر گرفته شده، تأثیری روی پایه ی بهینه نداشته و جدول سیمپلکس همچنان بهینه باقی خواهد ماند. تغییرات ورودی / خروجی می تواند به صورت زیر ارایه شود.

$$\Delta P_0 = \left(-\beta_1, \dots, -\beta_m, \dots, -\alpha_1, \dots, -\alpha_s, 0 \right)^T \quad (3)$$

$$\beta_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad 0 \leq \alpha_r \leq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s.$$

در این صورت

$$P_0^* = P_0 + \Delta P_0 = (-x_{10} - \beta_1, \dots, -x_{m0} - \beta_m, \dots, y_{10} - \alpha_1, \dots, y_{s0} - \alpha_s, 1) \quad (4)$$

که متناظر DMU_0^* است. جهت حفظ نامنفی بودن پایه ی بهینه ی حاصل از مدل (۱)، باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} B^{-1}P_0^* &= B^{-1}(P_0 + \Delta P_0) = B^{-1}P_0 + B^{-1}\Delta P_0 \geq 0 \\ -B^{-1}\Delta P_0 &\leq B^{-1}P_0 \\ -B^{-1}\Delta P_0 &\leq \Gamma_0 \end{aligned} \quad (5)$$

و با توجه به تغییرات ورودی / خروجی، سیستم زیر از نامعادلات (۵) با بازنویسی به دست می آید که با توجه به حفظ نامنفی بودن، نامساوی زیر برقرار خواهد بود.

$$\sum_{i=1}^m b_{kj}^{-1} \beta_i + \sum_{r=1}^s b_{km+r}^{-1} \alpha_r \leq \gamma_{k0} \quad k=1, \dots, m+s+1 \quad (۶)$$

تغییرات ورودی / خروجی در (۶) صادق است، همچنین زیر مجموعه ای از RE_0 به وجهک به دست آمده، وابسته است (یعنی با پایه بهینه متناظر وجهک). جهت ادامه ی روش، مدل زیر به کار می رود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m b_{1i}^{-1} \beta_i + \sum_{r=1}^s b_{1m+r}^{-1} \alpha_r \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m b_{ki}^{-1} \beta_i + \sum_{r=1}^s b_{km+r}^{-1} \alpha_r \leq \gamma_{k0}, \quad k=1, \dots, m+s+1 \end{aligned} \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} \beta_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m \\ 0 &\leq \alpha_r \leq \gamma_{10}, \quad r=1, \dots, s. \end{aligned}$$

اگر مقدار تابع هدف مدل (۳) برابر γ_{10} باشد با همان RHS ای که در نامساوی (۶) است، می توان به یک تساوی برای تغییرات ورودی / خروجی مطمئن رسید و عمل محوری را اجرا نمود. بعد از محورگیری، این روند با یک جدول سیمپلکس جدید مربوط به یک وجهک جدید تکرار می شود. نهایتاً با به دست آوردن همه ی وجهک های مرزی، RE_0 کامل حاصل می گردد.

۴ تعیین نواحی کارآی دیگر

علاوه بر ناحیه کارآی قبلی، ناحیه های کارآی جدید RE_{0i} ارائه می گردد. در صورتی که ناحیه با افزایش y (خروجی) همراه باشد RE_{0i} به صورت زیر تعریف می شوند. (شکل ۲)

$$RE_{0i} = \left\{ (x_0^{*T}, y_0^{*T})^T \mid x_0^{*T} \geq x_0^T, y_0^{*T} \geq y_0^T \right\}$$

و $(x_0^{*T}, y_0^{*T})^T$ در مقایسه با $n-1$ DMU ی دیگر کارآی باشد.

و در صورتی که x (ورودی) کاهش یابد (RE_{02} ، شکل ۲)، نامساوی های بالا به کوچکتر یا مساوی تبدیل می شوند.

بدون آن که به کلیت مسأله خللی وارد آید، افزایش اولین ورودی را در نظر گرفته و (۳) با قید شدنی بودن حل می گردد.

max β

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{1j} \leq x_{10}^* - \beta$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad i = 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, \beta \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

x_{10}^* مربوط به ورودی DMU_{22} است [شکل ۲]. به همین ترتیب تمام ورودی و خروجی های دیگر بررسی می گردند.

قضیه ۱ DMU_0^* که در ناحیه ی RE_0 قرار دارد کارآ است اگر فقط اگر عنصری از $RPPS_0$ نباشد یا روی مرز کارآیی $RPPS_0$ باشد.

اثبات نخست فرض کنیم که DMU_0^* کارآ باشد یعنی بر نقاطی از $RPPS_0$ غالب می گردد در این صورت دو وضعیت وجود دارد:

(۱) DMU_0^* مورد نظر در نواحی RE_{0i} و خارج از مرز $RPPS_0$ قرار دارد.

(۲) DMU_0^* مورد نظر را می توان به صورت ترکیب محدبی از باقی مانده ی DMU ها نوشت.

در وضعیت (۱)، DMU_0^* عنصری از $RPPS_0$ نیست پس در داخل ناحیه ی کارآ بوده یا روی مرز PPS قرار دارد. اما در وضعیت (۲)، اگر DMU_0^* به صورت ترکیب محدبی از باقی مانده ی DMU ها ارایه گردد پس

عنصری از $RPPS_0$ می باشد که در این صورت کارآ است و باید عنصری از مرز کارآیی $RPPS_0$ باشد.

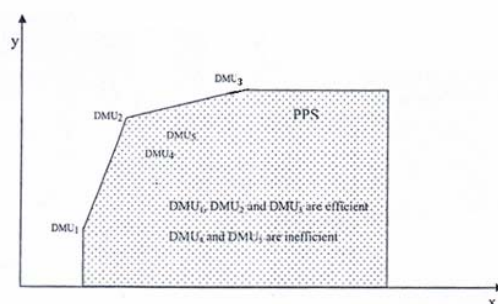
حال فرض کنید DMU_0^* عنصری از $RPPS_0$ نبوده یا روی مرز کارآیی $RPPS_0$ قرار داشته باشد. در اولین حالت، بر نقاطی از $RPPS_0$ غالب می باشد بنابراین کارآ است. در حالت دوم، چون روی مرز کارآیی قرار دارد پس کارآ است.

مثال کاربردی ۱ فرض کنید DMU با یک ورودی برای تولید یک خروجی موجود می باشد (جدول ۱).
 DMU₂ سوپر کارآی رآسی بوده و با استفاده از DEA بسط یافته، نخست زیر مجموعه ای از RE₀ را به دست آورده و در ادامه نواحی کارآی دیگر به دست می آید در نهایت RE₀ کامل حاصل می گردد.

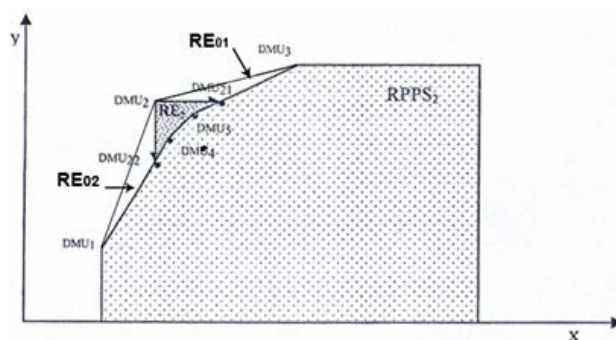
	DMU ₁	DMU ₂	DMU ₃	DMU ₄	DMU ₅
X-input	1	2	7	3	5
Y-output	1	6.5	7	4	6

جدول ۱: داده های مربوط به مثال ۱

ابتدا شکل های مربوط به PPS و RPPS₂ و نواحی RE₂ و RE₀₁ و RE₀₂ نشان داده شده است.



شکل ۱: مجموعه امکان تولید



شکل ۲: مجموعه تقلیل یافته و نواحی کارا

min β

$$\beta - \lambda_1 - 7\lambda_3 - 3\lambda_4 - 5\lambda_5 \geq -2 \quad (5)$$

$$\lambda_1 + 7\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 \geq 6.5$$

$$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

$$\beta, \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 3, 4, 5.$$

مقدار بهینه از مدل (5)، $\beta^* = 4$ با متغیرهای $\lambda_5, \lambda_3, \beta$ در پایه بهینه که $\lambda_5^* = 0.5, \lambda_3^* = 0.5$ است. تصویرنقطه در طول ورودی $DMU_{21} = (6, 6.5)^T$ می باشد. جدول بهینه (2) در زیر مشخص گردیده است.

B	β	λ_1	λ_3	λ_4	λ_5	s^-	s^+	s_a	Γ_0
β	1	-6	0	-2	0	-1	-2	7	4
λ_3	0	-5	1	-2	0	0	-1	6	0.5
λ_5	0	6	0	3	1	0	1	-7	0.5
$z_j - c_j$	0	-6	0	-2	0	-1	-2	7	4

جدول 2: جدول بهینه

با توجه به جدول بهینه ی بالا مقدار بهینه ی متغیرهای دو آل $w^* = -7, \mu^* = 2, v^* = 1$ می باشند و معادله ی وجهک به صورت زیر است.

$$-x + 2y - 7 = 0 \quad (7)$$

در این وضعیت، زیر مجموعه ای از RE_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$-x^* + 2y^* - 7 \geq 0 \quad (8)$$

در شکل (3)، زیر مجموعه ای از RE_2 نشان داده شده است. حال اگر $\beta = 0$ در این صورت $\alpha = 2$ (مقدار ماکزیمال) خواهد بود و نقطه ی به دست آمده روی مرز $RPPS_2$ ، $T_{\beta 1} = (6, 6.5)$ بوده که با DMU_{21} نشان می دهیم وناحیه ی محدب حاصل از نقاط DMU_2 ، $T_{\beta 1}$ و $T_{\alpha 1}$ را RE_{21}^H می نامیم. برای بررسی تغییرات ورودی / خروجی، نامساوی زیر به کار برده می شود.

$$-B^{-1} \Delta P_0 \leq \Gamma_0 \quad (9)$$

$$\beta + 2\alpha \leq 4$$

$$\alpha \leq 0.5$$

$$-\alpha \leq 0.5$$

با تکرار این روند و با کمک (۳)، λ_3 واجد شرایط برای عملیات محوری بوده که با استفاده از مدل (۱۰)، خواهیم داشت:

$$\max \alpha$$

$$s.t \quad \beta + 2\alpha = 4$$

$$\alpha \leq 0.5$$

$$-\alpha \leq 0.5$$

$$\alpha \leq 6.5$$

$$\alpha, \beta \geq 0$$

(۱۰)

با حل (۱۰)، $\beta^* = 3, \alpha^* = 0.5$ به دست می آید و مقدار بهینه ی تابع هدف برابر 0.5 می باشد. همچنین λ_3 (بنابراین DMU_3) از پایه خارج و λ_4 (بنابراین DMU_4) وارد پایه می گردد و پایه جدیدی متناظر و جهک جدید به دست می آید و با تکرار این روند خواهیم داشت:

B	β	λ_1	λ_3	λ_4	λ_5	s^-	s^+	s_a	Γ_0
β	1	-1	-1	0	0	-1	-1	1	3.5
λ_4	0	2.5	-0.5	1	0	0	0.5	-3	-0.25
λ_5	0	-1.5	1.5	0	1	0	-0.5	2	1.25
$z_j - c_j$	0	-1	-1	0	0	-1	-1	1	3.5

جدول ۳: جدول سیمپلکس بعد از اولین مرحله ی محور گیری

با استفاده از جدول ۳، وارون پایه ی جدید ماتریس و متغیرهای دوآل جدید را به دست می آوریم

$$v^* = 1, \mu^* = 1, w^* = -1$$

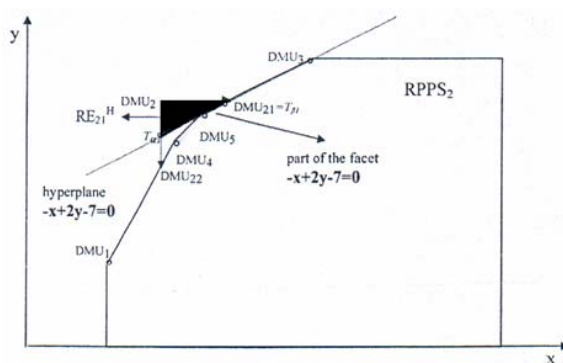
معادله ی وجهک جدید $-x + y - 1 = 0$ می باشد و زیر مجموعه ی RE_2^H ، RE_{22}^H ، با $-x + y - 1 \geq 0$ مشخص می گردد. در این صورت، تغییرات ورودی/ خروجی باید در نا مساوی $\beta + \alpha \leq 3.5$ صدق کنند و در شکل (۴)، زیر مجموعه ی RE_{22}^H که ترکیب محدبی از نقاط $T_{\alpha 2} = (2, 3)^T$ و $T_{\beta 2} = (5.5, 6.5)^T$ می باشد، نشان داده شده است. دوباره با استفاده از (۱۱)، تغییرات جدید را بررسی می کنیم.

$$\begin{aligned} \beta + \alpha &\leq 3.5 \\ -\alpha &\leq -0.25 \\ 0.5\alpha &\leq 1.25 \end{aligned} \quad (11)$$

و

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.5\alpha \\ \text{s.t.} \quad & \beta + \alpha = 3.5 \\ & -0.5\alpha \leq -0.25 \\ & 0.5\alpha \leq 1.2 \\ & \alpha \leq 6.5 \\ & \alpha, \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

با حل (12)، مقدار جواب بهینه ی تابع هدف 1.25، به دست می آید.



شکل ۳: قسمتی از ناحیه ی RE₂

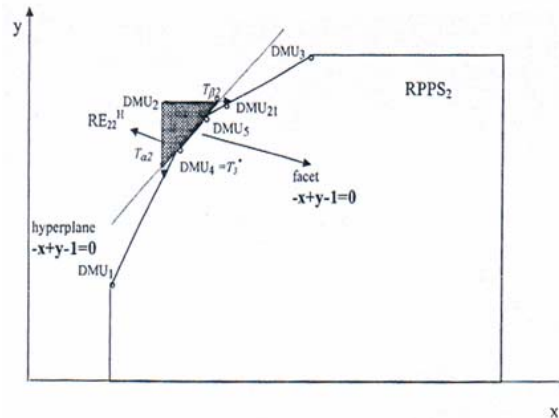
B	β	λ_1	λ_3	λ_4	λ_5	s^-	s^+	s_a	Γ_0
β	1	0	-2	0	-0.66	-1	-0.66	-0.33	2.66
λ_4	0	0	2	1	1.66	0	-0.33	0.33	1.83
λ_1	0	1	1	0	-0.66	0	0.33	-1.33	-0.83
$z_j - c_j$	0	0	-2	0	-0.66	-1	-0.66	-0.33	2.66

جدول ۴: جدول سیمپلکس بعد از دومین عملیات محور گیری

همچنین با توجه به جدول بالا، متغیر های دو آل $v^* = 1$, $\mu^* = 0.66$, $w^* = 0.33$ هستند و معادله ی وجهک جدید و زیر مجموعه ای از RE₂^H، (RE₂₃^H)، توسط نامساوی زیر مشخص می گردند.

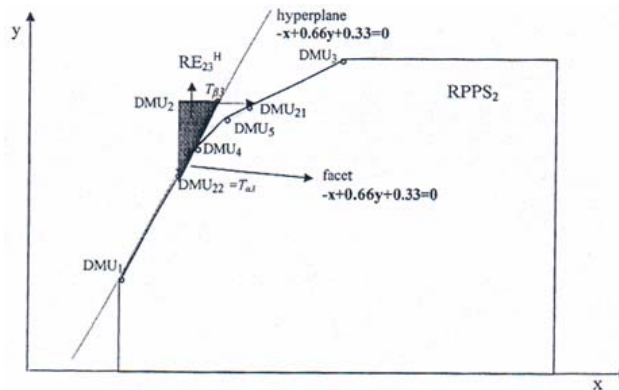
$$-x^* + 0.66y^* + 0.33 \geq 0 \quad (13)$$

بنابراین تغییرات ورودی / خروجی باید در $\beta + 0.66\alpha \leq 2.66$ صادق باشد.



شکل ۴: قسمتی از RE_2 بعد از دومین مرحله از روش مذکور

در شکل ۵، زیر مجموعه ی RE_{23}^H با تعریف (۱۳) ارایه شده است، که ترکیب محدبی از نقاط DMU_2 و $T_{\beta 3} = (4.66, 6.5)^T$ می باشد.



شکل ۵: قسمتی از RE_2 در سومین مرحله ی روش مذکور

با توجه به جدول ۴، دیگر نمی توان عملیات محوری جدیدی داشت. بنابراین همه ی وجهک های $RPPS_2$ را به دست آمده است، در این صورت تغییرات ورودی / خروجی می تواند در حد اقل یکی از نامساوی های زیر صادق باشد.

$$-x^* + 2y^* - 7 \leq 0 \quad (14)$$

$$-x^* + y^* - 1 \leq 0$$

$$-x^* + 0.66y^* + 0.337 \leq 0$$

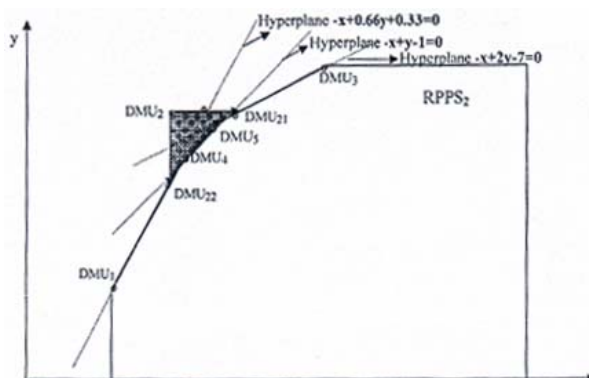
به طور معادل

$$\beta + 2\alpha \leq 4$$

$$\beta + \alpha \leq 3$$

$$\beta + 0.66\alpha \leq 2.66$$

(۱۵)



شکل ۶: مجموعه RE_2

که در این قسمت ناحیه ی کارآی RE_2 مشخص گردید حال به دنبال نواحی RE_{01} و RE_{02} می باشیم.

$$\max \alpha$$

$$s.t. \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 + 3\lambda_4 + 5\lambda_5 \leq 6$$

$$\lambda_1 + 6.5\lambda_2 + 7\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 \geq 6.5 + \alpha$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

(۱۶)

با حل برنامه فوق، $\alpha^* = 0.4$ و متغیرهای دوآل متناظر قیود به ترتیب برابر 0.1، -1، 6.3 می باشند پس

ابر صفحه مورد نظر

$$0.1x - y + 6.3 = 0$$

$$0.1x^* - y^* + 6.3 \geq 0$$

(۱۷)

در این صورت محدوده ی ناحیه ی RE_{01} به صورت زیر است:

$$y^* \geq 6.5$$

$$-x^* + 2y^* - 7 \geq 0$$

$$0.1x^* - y^* + 6.3 \geq 0$$

(۱۸)

به طور مشابه از DMU_{22} به سمت ابر صفحه ای که DMU_1 و DMU_2 روی آن قرار دارند، حرکت می کنیم با این وضعیت که فقط ورودی آن کاهش پیدا کرده و خروجی آن ثابت باشد در این صورت

$$\begin{aligned} \max \beta \\ s.t. \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 + 3\lambda_4 + 5\lambda_5 &\leq 2 - \beta \\ \lambda_1 + 6.5\lambda_2 + 7\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 &\geq 2.5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 1 \end{aligned} \quad (19)$$

که $\lambda_2^* = 0.27$ ، $\lambda_1^* = 0.73$ ، $\beta^* = 0.73$ و متغیرهای دوآل به ترتیب 1، -0.1818 و -0.8182 می باشند در این صورت ابر صفحه مورد نظر

$$x - 0.1818y - 0.8182 = 0 \quad (20)$$

پس محدوده ی ناحیه ی RE_{02} به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} x^* &\leq 2 \\ x^* - 0.1818y^* - 0.8182 &\geq 0 \\ -x^* - 0.66y^* + 0.33 &\leq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

نتیجه گیری

با توجه به این که تا کنون شرط لازم جهت حفظ کارآیی یک واحد سوپر کارآ DMU_0 بررسی شده، نه شرط کافی. یعنی فقط زیر مجموعه ای از ناحیه ی کارآ (RE_0) که با تغییرات ورودی / خروجی واحد سوپر کارآ حاصل گردیده، به دست آمده است. در این مقاله روشی ارزیابی گردید تا RE_0 به طور کامل به دست آید. در واقع شرط لازم و کافی برای RE_0 حاصل شده، برقرار گردید.

منابع

- [1] Andersen P, Petersen NC (1993), A procedure for ranking efficient unites in data envelopment analysis, Manage Sci 39:1261-1264.
- [2] Boljunčić, V, (1998), Some Aspects of Primal – dual Relationship in Sensitivity Analysis in DEA, Centr Eur J Operations Research Econ 6(1 – 2):39 – 66.
- [3] Boljunčić, V, (2006), Sensitivity analysis of an efficient DMU in DEA model with variable returns to scale (VRS). J Prod Anal 25:173-192.
- [4] Charnes A, Cooper W.W., Rhodes E, (1978), Measuring the efficiency of decision making units, Eur J Operational Research 2:429 – 444.
- [5] Charnes A, L.Neralić, Sensitivity analysis in data envelopment analysis 1, Glasnik Matematički Ser. III 24(44)(1989a), 211 – 226.
- [6] Charnes A, L.Neralić, Sensitivity analysis in data envelopment 2, Glasnik Matematički Ser. III 24(44)(1989b), 449 – 463.
- [7] Charnes A, L.Neralić, Sensitivity analysis in data envelopment analysis 3, Glasnik Matematički Ser. III 27(47):191-201.

- [8] Charnes A, Rousseau JJ, Semple JH, (1996), Sensitivity and stability of efficiency classifications in data envelopment analysis, J Prod Anal 7:5 – 18.
- [9] Seiford LM, Zhu J, (1998), Stability regions for maintaining efficiency in data envelopment analysis, Eur J Operational Res 108(1):127 – 139.
- [10] Seiford LM, Zhu J, (1998), Sensitivity analysis of DEA models for simultaneous changes in all data, J Operational Res Soc 49(10):1060 – 1071.
- [11] Thompson RG, Dhamapala Diaz J, Gonzales–Lima MD, Thrall RM, (1996), DEA multiplier analytic center sensitivity with an illustrative application to independent oil companies, Ann Operations Res 66:163 –177.
- [12] Zhu J, (2001), Super – efficiency and DEA sensitivity analysis, Eur J Operational Res 129:443 – 455.