

یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد

محرم نیکوئی^{۱*}، میر کمال میرنیا^۲

^۱عضو باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز

^۲گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز

رسید مقاله: ۸۸/۱۲/۱

پذیرش مقاله: ۸۹/۵/۱

چکیده

در این مقاله، حل دستگاه معادلات خطی منفرد $n \times n$ مورد بررسی قرار گرفته است. ما نشان داده‌ایم هر دستگاه معادلات خطی منفرد با یک دستگاه معادلات خطی فرومعیین هم ارز است. با ارایه مثال‌های عددی، نیز نشان داده شده است که جواب مینیمال به دست آمده برای دستگاه معادلات خطی فرومعیین در دستگاه معادلات خطی منفرد هم ارز با آن نیز صدق می‌کند.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات منفرد، دستگاه معادلات فرومعیین، شاخص، معکوس درازین، دستگاه‌های هم ارز.

۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی در علوم مختلف مهندسی و اجتماعی کاربردهای فراوانی دارد. حل عددی بیشتر مسایل محاسباتی در علوم و مهندسی منجر به حل دستگاه معادلات خطی منفرد می‌شود که از آن جمله می‌توان به معادله Navier-Stokes در مهندسی سیالات و Markov chain modelling در متغیرهای تصادفی اشاره کرد [4,6].

جالب است بدانید، برای هر ماتریس $A \in C^{n \times n}$ ، حتی ماتریس‌های منفرد، معکوس منحصر بفردی به نام معکوس درازین وجود دارد. در سال‌های اخیر، جواب دستگاه معادلات خطی منفرد را با معکوس درازین به دست می‌آورند. در [6] یک الگوریتم دو مرحله‌ای برای به دست آوردن معکوس درازین در حل دستگاه معادلات خطی منفرد با شاخص یک ارایه شده است. همچنین روش کرامر برای یافتن معکوس درازین را در [5] ببینید. در این مقاله، ما برای به دست آوردن معکوس درازین از قضیه‌ای که مربوط به موجود و منحصر بفرد بودن آن برای هر ماتریس دلخواه است استفاده می‌کنیم.

[°]عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: nikuie_m@yahoo.com

کیونگی و بنکار، یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی مترو

یک دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار دارای بی شمار جواب است. تاکنون روش های متعددی برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد ارایه شده است [2,4,6]. مجموعه جواب ها یک دستگاه معادلات خطی فرومعین نیز نامتناهی است. با این حال یک دستگاه معادلات خطی فرومعین دارای یک جواب منحصر بفرد بنام جواب مینیمال است. در صورتی که یک دستگاه فرومعین دارای رتبه کامل سطری باشد، جواب مینیمال آن را با شبه معکوس به دست می آورند. این جواب دارای کمترین نرم اقلیدسی است [2].

هدف ما از نگارش این مقاله، معرفی معکوس درازین، اشاره به تفاوت آن با شبه معکوس و بیان کاربرد آن ها در حل دستگاه معادلات خطی است. همچنین جواب به دست آمده برای دستگاه معادلات خطی منفرد با معکوس درازین را با جواب به دست آمده با شبه معکوس برای دستگاه معادلات خطی فرومعین هم ارز با آن، مقایسه نموده ایم.

بخش بعدی این مقاله شامل تعاریف و قضایای مقدماتی درباره دستگاه معادلات خطی است. چند تعریف و قضیه درباره دستگاه معادلات خطی فرومعین و دستگاه های معادلات خطی هم ارز نیز ارایه شده است. مهمترین آن ها قضیه ای درباره دستگاه معادلات خطی منفرد ناسازگار است. در سومین بخش به نقش معکوس درازین و شبه معکوس در حل دستگاه معادلات خطی اشاره شده و یک روش برای به دست آوردن جواب مینیمال در دستگاه معادلات خطی منفرد ارایه شده است. همچنین در این بخش با طرح چند سوال و پاسخگویی به آن ها به شرح روش جدید پرداخته ایم. سه مثال عددی برای بررسی درستی مباحث ارایه شده در بخش های قبلی در بخش ۴ ارایه شده است.

۲ تعاریف اولیه و قضایای مقدماتی

تعریف ۱ ماتریس $A \in C^{n \times n}$ را در نظر بگیرید. گوئیم عدد صحیح نامنفی k شاخص ماتریس A است و با $ind(A)$ نمایش می دهیم، اگر k کوچکترین عدد صحیح نامنفی باشد به طوریکه

$$rank(A^{k+1}) = rank(A^k). \quad (1)$$

که معادل با اینکه شاخص ماتریس اندازه بزرگترین بلوک ژوردان متناظر با مقدار ویژه صفر ماتریس A است [7]. برای هر ماتریس $A \in C^{n \times n}$ شاخص ماتریس موجود و منحصر بفرد است [8]. برای آشنایی بیشتر با شاخص ماتریس و نحوه ی به دست آوردن شاخص هر ماتریس دلخواه به [8] مراجعه نمائید. در بخش چهارم، نحوه ی به دست آوردن شاخص ماتریس شرح داده شده است.

قضیه ۱ [8] ماتریس $A \in C^{n \times n}$ را در نظر بگیرید. داریم $0 \leq ind(A) \leq n$.

تعریف ۲ [7] ماتریس $A \in C^{n \times n}$ را بطوریکه $ind(A) = k$ در نظر بگیرید. ماتریس X معکوس درازین ماتریس A با A^D نمایش داده می شود، هرگاه X در روابط زیر صدق می کند

$$AX = XA, \quad XAX = X, \quad A^k XA = A^k. \quad (2)$$

اگر $ind(A) = 1$ باشد، A^D معکوس گروه ماتریس A نامیده می شود و با A_g نمایش داده می شود. اگر $ind(A) = 0$ باشد A یک ماتریس نامنفرد است و A^D معکوس ماتریس A نامیده می شود و با A^{-1}

نمایش داده می‌شود [8]. با توجه به قضیه‌ی زیر برای هر ماتریس دلخواه $A \in C^{n \times n}$ معکوس درازین A^D موجود و منحصر بفرد است.

تاکنون برای به دست آوردن معکوس درازین یک ماتریس روش‌های متعددی ارائه شده‌است. اکثر این روش‌ها درباره ماتریس‌های بلوکی است. یک الگوریتم در [7] برای به دست آوردن معکوس درازین ارائه شده‌است که از جامعیت لازم برای به دست آوردن معکوس درازین تمام ماتریس‌های منفرد برخوردار نیست. در زیر قضیه‌ای ارائه شده‌است که ضمن اینکه بیانگر وجود و منحصر بفرد بودن معکوس درازین برای همه ماتریس‌های منفرد است یک روش جامع برای به دست آوردن معکوس درازین ماتریس‌های منفرد است. در بخش چهارم، نحوه‌ی به دست آوردن معکوس درازین شرح داده شده‌است.

قضیه ۲ برای هر ماتریس دلخواه $A \in C^{n \times n}$ ، اگر $ind(A) = k$ و $rank(A^k) = r$ و فرم نرمال ژوردان ماتریس A بفرم زیر باشد

$$A = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}$$

که در آن D یک ماتریس مربع از مرتبه r است و $N^k = 0$ است. آنگاه معکوس درازین ماتریس A بفرم زیر است

$$A^D = P \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

اثبات. [7] را ببینید.

برای به دست آوردن فرم نرمال ژوردان یک ماتریس باید مقادیر ویژه، عدد آن‌ها و حداکثر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با مقادیر ویژه را به دست آورد. و آن را بفرم $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ نوشت. برای مطالعه بیشتر به [8] مراجعه نمایید.

تعریف ۳ [2] دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را در نظر بگیرید. که در آن A یک ماتریس $m \times n$ ، x یک بردار $n \times 1$ و b یک بردار $m \times 1$ می‌باشد. اگر $m < n$ باشد، در این صورت دستگاه فوق را فرامعین می‌گویند.

تعریف ۴ [2] ماتریس $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$ ، شبه معکوس ماتریس A نامیده می‌شود در صورتی که A یک ماتریس $m \times n$ ($m < n$) با رتبه m باشد. شبه معکوس ماتریس A را معمولاً با A^+ نمایش می‌دهند.

قضیه ۳ فرض کنید دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ یک دستگاه سازگار یا ناسازگار باشد. اگر $ind(A) = k$ باشد در این صورت دستگاه $A^k Ax = A^k b$ سازگار است.

اثبات دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $rank(A) = rank(A|b)$ [2]. با توجه با آنچه که در تعریف ۱-۲ درباره شاخص ماتریس بیان شد واضح است که $rank(A^{k+1}) = rank(A^{k+1}|A^k b)$ بنابراین دستگاه $A^k Ax = A^k b$ سازگار است.

برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار یا ناسازگار $Ax = b$ در صورتیکه $ind(A) = k$ باشد. با توجه به خواص معکوس درازین می‌توانیم جواب های دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار $A^k Ax = A^k b$ را به دست آوریم [6].

تعریف ۵ [3] دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز نامیم، هرگاه هر معادله یک دستگاه ترکیبی خطی از معادلات دستگاه دیگر باشد.

قضیه ۴ [3] جواب های دستگاه های معادلات خطی هم ارز یکی هستند.

بهتر است بدانیم برای حل یک دستگاه از معادلات، می‌توانیم هر دستگاه هم ارز آن را به جای آن دستگاه حل کنیم، هیچ جوابی کم نمی‌شود و هیچ جواب جدیدی ظاهر نمی‌شود.

قضیه ۵ [3] هر ماتریس $m \times n$ مانند A با یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری است. و در صورتی که $[R|Z]$ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی $[A|Y]$ باشد. دستگاه های $AX = Y$ و $RX = Z$ هم ارزند.

۳ یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد

در این بخش، قضیه‌ای را درباره رسیدن به یک دستگاه معادلات خطی فرومعین، هم ارز با یک دستگاه معادلات خطی منفرد ثابت می‌کنیم. این قضیه اساس ارایه روش جدید برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد است. ابتدا نگاهی گذرا به نقش معکوس درازین و شبه معکوس در حل دستگاه معادلات خطی خواهیم داشت.

۳-۱ نقش معکوس درازین و شبه معکوس در حل دستگاه معادلات خطی

قضیه ۶ [1] فرض کنید $A \in C^{n \times n}$ باشد. $A^D b$ جواب دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \quad ind(A) = k \quad (۳)$$

است و با $x_d = A^D b$ نشان داده می‌شود، اگر و فقط اگر $b \in R(A^k)$.

قضیه ۷ دستگاه معادلات خطی فرومعین

$$Ax = b, \quad A \in C^{m \times n} \quad (m < n) \quad (۴)$$

را در نظر بگیرید. برای حل چنین دستگاهی اغلب لازم است x ای را بیابیم که $\|x\|_2$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. بنابراین جواب مینیمال دستگاه فرومعین فوق معادل است با حل مساله $\{ \|x\|_2 : Ax = b \}$ minimize. در صورتی که $rank(A) = m$, $(m < n)$ باشد جواب مینیمال دستگاه فرومعین (۴) عبارت است از $A^+ b$. بنابراین جواب مینیمال هر دستگاه فرومعین که دارای رتبه کامل سطری باشد را با $x_p = A^+ b$ نشان می‌دهیم. اثبات. [2] را ببینید.

با توجه به آنچه که در بالا بحث شد داریم، دستگاه $Ax = b$ با دستگاه $R'x = c'$ هم ارز است و دستگاه $R'x = c'$ با $Rx = c$ هم ارز است. هم ارزی سطری یک رابطه هم ارزی است [3]. پس دستگاه های معادلات خطی $Ax = b$ و $Rx = c$ هم ارزند. یک دستگاه $m \times n$ ($m < n$) فرومعین است و رتبه ماتریس ضرائب آن برابر است با m .

پس $Rx = c$ یک دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری است که هم ارز با دستگاه معادلات خطی منفرد (۵) می باشد. در حالت کلی، هر دستگاه فرومعین دارای رتبه کامل سطری کامل نیست.

با توجه به ویژگی دستگاه های معادلات خطی هم ارز داریم:

نتیجه ۱ جواب به دست آمده با معکوس درازین برای دستگاه معادلات خطی منفرد در دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری، هم ارز با آن نیز صدق می کند.

نتیجه ۲ جواب مینیمال به دست آمده با شبه معکوس برای دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری، در دستگاه معادلات خطی منفرد هم ارز با آن نیز صدق می کند.

۴ یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد

با توجه به قضیه ۸، یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد $Ax = b$ به دست آوردن یک دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری است که با آن هم ارز باشد. جواب مینیمال دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری را با شبه معکوس می توان به دست آورد. بنا به نتیجه ۲ این جواب، جواب مینیمال دستگاه معادلات خطی منفرد $Ax = b$ نیز هست.

طرح و پاسخگویی سوالات زیر به تبیین قضیه ۸ که پایه و اساس روش فوق است کمک می کند.

۱. آیا هر دستگاه معادلات خطی منفرد دلخواه، با یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری، هم ارز است؟

بلی، ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات خطی منفرد $n \times n$ ، ماتریسی از مرتبه $n \times (n+1)$ است. و بر اساس قضیه ۵ با یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری است. این خود دلیلی بر جامع بودن روش فوق است، یعنی رتبه، شاخص و سایر ویژگی های ماتریس ضرائب دستگاه منفرد محدودیت در اجرای روش ایجاد نمی کند.

۲. آیا هر دستگاه معادلات خطی منفرد ناسازگار دلخواه، هم ارز با یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری است؟

بلی، اگر در دستگاه معادلات خطی منفرد $Ax = b$ ، $ind(A) = k$ داشته باشیم $b \notin R(A^k)$ ، دستگاه ناسازگار

است و طبق قضیه ۲-۳ می توانیم روش فوق را برای دستگاه منفرد سازگار $Ax = A^k b$ اجرا کنیم.

۳. آیا جواب دستگاه های فرومعین را فقط با شبه معکوس می توان به دست آورد؟

خیر، روش های متعددی برای به دست آوردن جواب دستگاه های معادلات خطی فرومعیین وجود دارد [2]. اما جواب مینیمال آن دسته از دستگاه معادلات فرومعیین که دارای رتبه کامل سطری هستند را می توان با شبه معکوس به دست آورد. ما در اینجا چون x_p و x_d را با هم مقایسه می کنیم به دستگاه های فرومعیین با رتبه کامل سطری نیاز داریم.

۴. چرا در این روش از ماتریس تحویل شده سطری پلکانی استفاده می کنیم؟

ما با روش های متعددی می توانیم برای هر دستگاه معادلات خطی منفرد یک دستگاه فرومعیین هم ارز به دست آوریم [مثال ۲ را ببینید]. اما آنچه که برای ما مهم است، این است که به یک ماتریس فرومعیین با رتبه کامل سطری برسیم تا بتوانیم جواب مینیمال آن را با شبه معکوس به دست آوریم. در ماتریس تحویل شده سطری پلکانی سطرهای صفر زیر همه سطوری که دارای درایه های غیر صفرند واقع می شوند. به همین دلیل می توان بدون انجام عملیات اضافی آن ها را حذف کرد. چون سطرهای ماتریس افزوده هر دستگاه معادلات خطی منفرد وابسته خطی هستند پس ماتریس تحویل شده سطری پلکانی آن دارای سطر صفر خواهد بود.

۵. معکوس درازین با شبه معکوس چه تفاوتی دارد؟

معکوس درازین و شبه معکوس دو مفهوم کاملا مجزا از هم هستند. جواب مینیمال هر دستگاه معادلات خطی فرومعیین که دارای رتبه کامل سطری باشد و جواب کمترین مربعات هر دستگاه معادلات خطی فرامعیین که دارای رتبه کامل ستونی باشد را می توان با شبه معکوس به دست آورد [2]. معکوسی که برای ماتریس های نامنفرد تعریف شده است نوع خاصی از معکوس درازین است. بنابراین جواب یک دستگاه معادلات خطی منفرد یا نامنفرد را بدون توجه به استقلال خطی سطرها و ستونهای ماتریس ضرایب آن، می توان با معکوس درازین به دست آورد.

۵ نتایج عددی

فرض کنید $Ax = b$ یک دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار باشد. در اینصورت $Ax = b$ دارای یک مجموعه جواب است و باید جواب مینیمال آن را به دست آورد. در این بخش، با ارایه مثال های عددی نشان داده ایم جواب به دست آمده با معکوس درازین برای $Ax = b$ همواره جواب مینیمال نیست. اهمیت استفاده از معکوس درازین در این است که استفاده از روش الگوریتم دومرحله ای برای به دست آوردن معکوس درازین دستگاه معادلات خطی منفرد از سایر روش های تکراری مانند PCG , $PGMRES$ بهتر و موفق عمل می کند [8].

مثال ۱ دستگاه معادلات خطی منفرد زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 1, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 2, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

ماتریس ضرایب دستگاه (۹) به صورت زیر می باشد

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

همچنین با انجام محاسبات لازم داریم. $rank(A) = rank(A^2) = 2$ بنابراین شاخص ماتریس A برابر یک است. پس (۹) یک دستگاه معادلات خطی منفرد با شاخص یک است. پس ماتریس A دارای معکوس گروه است. با توجه به اینکه $b \notin R(A)$ پس (۹) یک دستگاه ناسازگار است. طبق قضیه ۳ دستگاه $AAx = Ab$ را به دست می آوریم. A یک ماتریس خودتوان است. پس

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= -9, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 12, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= -9. \end{aligned} \quad (10)$$

بر اساس قضیه ۲ برای به دست آوردن معکوس گروه داریم

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{که در آن} \quad A = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A_g = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می کنیم که $A_g = A$. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [8] مراجعه نمائید. حال طبق قضیه ۳ برای دستگاه (۱۰) x_d به صورت زیر محاسبه می شود

$$x_d = A_g b = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix}$$

بنابر قضیه ۸ دستگاه معادلات خطی منفرد (۱۰) با دستگاه فرومعین زیر هم ارز است.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned} \quad (11)$$

دستگاه فرومعین (۱۱) دارای رتبه کامل سطری است، پس:

$$\begin{aligned} x_p &= R^+ c = R^T (RR^T)^{-1} c \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

طبق خاصیت دستگاه های هم ارز، x_p و x_d در (۱۰) و (۱۱) صدق می کنند. واضح است که $\|x_p\|_2 < \|x_d\|_2$.

مثال ۲ دستگاه معادلات خطی منفرد ناسازگار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 1, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 4, \\ -x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 1. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

ماتریس ضرائب دستگاه (۱۲) به صورت زیر می باشد

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$rank(B^2) = rank(B^3) = 2$ پس $ind(B) = 2$. دستگاه سازگار $B^2 Bx = B^2 b$ را تشکیل می دهیم

$$\begin{aligned} 3x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 14x_4 &= 101, \\ 2x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 11x_4 &= 84, \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= -37, \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= -37. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

از قضیه ۱ برای به دست آوردن معکوس درازین ماتریس B استفاده می کنیم.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 9 \\ 27 & 27 & 163 & 217 \\ 11 & 11 & 14 & 41 \\ 27 & 27 & 27 & 27 \end{bmatrix} \quad B = P^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 14 & 14 \\ 2 & 7 & 9 & 9 \\ -1 & -4 & -5 & -5 \\ -1 & -4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

طبق قضیه ۱ معکوس درازین ماتریس فوق به صورت زیر خواهد بود

$$B^D = P^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای x_d (۱۳) به صورت زیر محاسبه می شود

$$x_d = B^D b = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 84 \\ -37 \\ -37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 24 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

قضیه ۸ دستگاه فرومعین زیر را که هم ارز سطری دستگاه منفرد (۱۳) است به دست می دهد:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= -3, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 10. \end{aligned} \quad (14)$$

دستگاه (۱۳) را با $Rx = c$ نشان می دهیم. $rank(R) = 2$ پس $Rx = c$ یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری است و می توان جواب مینیمال آن را با شبه معکوس به دست آورد. با توجه به قضیه ۷ داریم

$$x_p = R^+b = R^T(RR^T)^{-1}b$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{29}{5} \\ \frac{5}{36} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{5}{5} \end{bmatrix}$$

x_p و x_d در دستگاه معادلات (۱۳) و (۱۴) صدق می کنند. x_p جواب مینیمال دستگاه منفرد (۱۲) است. با حذف سطر سوم دستگاه معادلات خطی منفرد (۱۳) ما به یک دستگاه معادلات خطی فرومعین می رسیم که با آن هم ارز سطری است، ولی دارای رتبه کامل سطری نیست.

مثال ۳ دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

شاخص ماتریس ضرائب دستگاه برابر با یک می باشد. از قضیه ۱ برای به دست آوردن معکوس درازین ماتریس A استفاده می کنیم.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{9}{22} & -\frac{3}{11} & -\frac{9}{22} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{که در آن} \quad A = P^{-1} \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & [0] \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

طبق قضیه ۱ معکوس درازین ماتریس فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$A_g = P^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -1 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -1 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

x_d برای (۱۵) به صورت زیر محاسبه می شود

$$x_d = A^D b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

قضیه ۸ دستگاه فرومعین زیر را که هم ارز سطری دستگاه منفرد (۱۵) است به دست می دهد:

$$x_1 + x_3 = -\frac{7}{4} \quad (۱۶)$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

(۱۳) یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری است. برای به دست آوردن جواب مینیمال آن را شبه معکوس

داریم

$$x_p = R^+ b = R^T (RR^T)^{-1} b$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$x_p = x_d$ در دستگاه معادلات (۱۵) و (۱۶) صدق می کنند. x_p جواب مینیمال دستگاه منفرد (۱۲) است.

۶ نتیجه گیری

در این مقاله، روش به دست آوردن دستگاه معادلات خطی فرومعین هم ارز با دستگاه معادلات خطی منفرد ارایه شده است. با این روش می توان جواب مینیمال را برای دستگاه معادلات خطی منفرد به دست آورد.

سپاسگزاری

این مقاله نتیجه حاصل از طرح پژوهشی با شماره ۸۸۷۲۴ است که با استفاده از اعتبارات پژوهشی باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تبریز به انجام رسیده است. نویسندگان از باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تبریز به خاطر حمایتش از طرح پژوهشی مذکور، از هیئت محترم داوران به خاطر ارایه پیشنهادات و نظرات گرانشنگ و دکتر سهراب کرد رستمی به خاطر زحماتشان ممنون و سپاسگزارند.

منابع

- [1] Campbell,S.L.,Meyer,C., (1979), *Generalized Inverses of Linear Transformations* , Pitman London.
- [2] Detta,B., (1994), *Numerical Linear Algebra and Application*, Thomson.
- [3] Hoffman,K.,Kunze,R., (1971), *Linear algebra*, Prentice-Hall.
- [4] Lin,L., Wei,Y., Zhang,N., (2008), *Convergence and quotient convergence of iterative methods for solving singular linear equations with index one* , J.Linear Algebra.Appl, V.203, PP.35-45.
- [5] Wang,G. , (1989), *A cramer rule for finding the solution of a class of singular equations* J. Linear Algebra and its Applications, V.116, PP.27-34.
- [6] Wei,Y., Zhou,J. , (2006), *A two-step algorithm for solving singular linear systems with index one*, J. Applied Mathematics and Computation, V.175, PP.472-485.
- [7] Zheng,L. , (2001), *A characterization of the Drazin inverse*, J.Linear Algebra and its Applications, V.335, PP.183-188.
- [8] Nikuie.M., Mirnia.M.K., Mahmoudi.Y., *Some results about the index of matrix and Drazin inverse*, Math Sci J. Islamic Azad University-Karaj Branch, to appear.