مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۲ (پیاپی ۲۵)، تابستان ۸۹، ص ص ۱۰۴-۹۱
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترل T^2 هتلینگ با اندازه‌های نمونه، فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر

محسن ترابیان[1*]، محمد بامنی‌مقدم[2]، علی‌رضا فراز[3]، نادر نعمت‌الهی[2]

[1] دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، تهران
[2] گروه آمار، دانشکده‌ی اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران
[3] گروه صنایع، دانشکده‌ی فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، خوزستان

رسید مقاله: ۸۹/۳/۲
پذیرش مقاله: ۸۹/۵/۳۰

چکیده

نمودار کنترل T^2 هتلینگ به عنوان یک روش چند متغیره دارای بیش‌ترین کاربرد برای دو یا چند مشخصه‌ی مرتبط است، ولی فاقد دقت لازم در تشخیص تغییرات کوچک و متوسط می‌باشد. اخیراً، ثابت شده است، طرح کنترل با فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر (VSICL) در مقایسه با نمودار کنترل T^2 هتلینگ با نرخ نمونه‌گیری ثابت (FRS)، توانایی بسیار خوبی در تشخیص تغییرات کوچک و متوسط دارد. به علاوه، نشان داده شده است که طرح با فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر، اقتصادی‌تر از نوع متعارف آن است. این مقاله پیامدهای اقتصادی یک طرح کنترل جدید به نام طرح کنترل با اندازه‌های نمونه، فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر (VSSICL) را بررسی می‌کند که در آن اندازه‌ی نمونه‌ی n، فاصله‌ی نمونه‌گیری h و حد کنترل k، بین دو مقدار مینیمم و ماکسیمم تغییر می‌کند. در این ارتباط، مدل هزینه‌ی کوستا و رحیم (۲۰۰۱) را مورد استفاده قرار می‌دهیم. این مدل هزینه، شامل هزینه‌ی هشدارهای اشتباه، هزینه‌ی کشف و اصلاح یک انحراف با دلیل، هزینه‌ی تولید اقلام خارج از کنترل و هزینه‌ی نمونه‌گیری و آزمایش است. علاوه بر این، فرض می‌کنیم طول زمانی که فرایند در حالت کنترل باقی می‌ماند، دارای توزیع نمایی است که با این فرض قادر به به‌کارگیری دیدگاه زنجیر مارکوف برای تعمیم مدل هزینه خواهیم بود. به منظور تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای مدل با مینیمم کردن تابع هزینه، از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌کنیم. سرانجام، نمودارهای $T^2-VSICL$ و $T^2-VSSICL$ را از طریق متوسط هزینه در واحد زمان مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: طرح اقتصادی، طرح آماری اقتصادی، نمودار کنترل T^2 هتلینگ، فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر، اندازه‌های نمونه فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر، زنجیر مارکوف و الگوریتم ژنتیک.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Torabianmohsen@gmail.com

۱ مقدمه

کنترل آماری فرایند (SPC) یکی از ابزار اساسی هفت‌گانه‌ی کیفیت است که در مدیریت کیفیت جامع (TQM) مورد استفاده قرار می‌گیرد. جنبش کیفیت درچند دهه گذشته، موجب شد کنترل کیفیت یک شرط ضروری جهت رقابت در عرصه‌های ساخت و سرویس دهی شود. توانایی کاهش تغییرات خروجی فرایند، یکی از کلیدهای شناخت واحد اقتصادی موفق است. در بسیاری از موارد کنترل آماری فرایند، ابزار مورد قبولی برای نشان‌دادن تغییرات فرایند است.

در ابتدا طرح آماری (SD) نمودارهای کنترل، شکل گرفت، به این معنی که فقط معیارهای آماری در طراحی نمودارها در نظر گرفته شد. در سال ۱۹۳۱ شوهارت اساس نمودار کنترل را با مطرح کردن نمودار $\bar{X}$ پایه‌گذاری کرد. طرح نمونه‌گیری مرسوم در نمودارهای کنترل عبارت از انتخاب نمونه‌هایی با اندازه‌ی ثابت و فاصله زمانی ثابت بین نمونه‌های مختلف می‌باشد، که آن را طرح نمونه‌گیری با نرخ ثابت می‌نامند. در سال‌های اخیر نمودارهای کنترل با فواصل نمونه‌گیری متغیر که فواصل نمونه‌گیری بر اساس مقدار آماره‌ی نمونه قبل بین دو مقدار، متغیر می‌باشد، مورد توجه قرار گرفته است. برخی نویسنده‌ها نشان داده‌اند که طرح کنترل $\bar{X}-VSI$ به‌طور قابل ملاحظه‌ای در تشخیص تغییرات کوچک در میانگین، کاراتر از طرح کنترل $\bar{X}-FRS$ است.

امروزه در صنعت، موقعیت‌های زیادی وجود دارد که پایش هم‌زمان دو یا چند مشخصه‌ی کیفیت، ضروری است. روش‌های کنترل فرایند چند متغیره به‌وسیله‌ی هتلینگ (۱۹۴۷) بنا شده است. یکی از ابزار بسیار مفید کنترل آماری فرایند چند متغیره، نمودار کنترل است. نمودار کنترل T^2 هتلینگ یکی از ابزار پرکاربرد در کنترل آماری فرایند چند متغیره است. این نمودار دارای مزیت‌های زیادی از جمله سادگی آن است ولی در شخیص تغییرات کوچک و متوسط فرایند به‌کندی عمل می‌کند. ایده‌ی فواصل نمونه‌گیری متغیر در حالت چند متغیره به‌وسیله‌ی آپاراسی وهارو (۲۰۰۱) مطرح شد. در این زمینه، چن (2006-a) و چو و همکاران (۲۰۰۶) به طراحی اقتصادی نمودار کنترل T^2-VSI پرداختند و نتایج بیان‌گر بهبود قابل ملاحظه‌ی از نظر اقتصادی بود.

در گذشته اغلب نمودارها بر اساس معیارهای آماری طراحی می‌شد که در این روش‌ها اندازه(ها)ی نمونه و حد (حدود) کنترل به گونه‌ای انتخاب می‌شود که قدرت آزمون برای تشخیص یک تغییر خاص و همچنین، احتمال ارتکاب خطای نوع I، برابر مقدار مشخصی باشد. این روش‌ها عواقب اقتصادی متعددی به همراه دارد. بنابر این، طرح اقتصادی (ED) نمودارهای کنترل دیدگاه طراحی اقتصادی نمودارها مطرح شد. دانکن (۱۹۵۶) نخستین مطالعه را در مورد طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل $\bar{X}-FRS$ انجام داد. بای و لی (۱۹۹۸) طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل $\bar{X}-VSI$ را ارایه کردند. مونت‌گومری و کلات (۱۹۷۲) نیز طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل T^2-FRS را مورد بررسی قرار دادند.

هر دو طراحی آماری و اقتصادی دارای نقاط ضعف و قوتی هستند. طراحی آماری نمودارهایی را ایجاد می‌کند که دارای توان بالا و احتمال ارتکاب خطای نوع I پایین هستند، اما ممکن است هزینه‌ی بیش‌تری نسبت به طراحی اقتصادی داشته باشند. از سوی دیگر طراحی اقتصادی فقط بر هزینه تأکید داشته و خواص آماری را

نادیده می‌گیرند. هدف طرح آماری اقتصادی (ESD) می‌نیمم کردن متوسط هزینه در واحد زمان با اعمال برخی محدودیت‌های آماری بر روی خطای نوع I، توان نمودار کنترل و میانگین اصلاح شده‌ی زمان تا صدور علامت (AATS) است. سانیگا (۱۹۸۹) طرح آماری اقتصادی توأم مربوط به نمودار $\bar{X}$ و R را ارایه کرد. فراز و سانیگا (۲۰۱۰) طرح آماری اقتصادی T^2-VSI را بر اساس مدل هزینه‌ی لورنزن و وانس (۱۹۸۶) ارایه کرده، به مقایسه‌ی آن با طرح آماری اقتصادی T^2-FRS پرداختند. تحقیق آن‌ها نشان داد که طرح ارایه شده نسبت به طرح آماری اقتصادی T^2-FRS اقتصادی‌تر است.

در این مقاله، طرح آماری اقتصادی نمودار کنترل T^2 هتلینگ با اندازه‌های نمونه، فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر ($T^2-VSSICL$) را ارایه کرده به مقایسه‌ی آن با طرح آماری اقتصادی نمودار کنترل T^2 هتلینگ با فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل متغیر ($T^2-VSICL$) می‌پردازیم. در واقع به دنبال پاسخ به این پرسش هستیم که اگر در طرح $T^2-VSICL$ اندازه‌های نمونه نیز متغیر باشد، آیا عملکرد آن بهبود می‌یابد؟

در بخش دوم، طرح کنترل $T^2-VSSICL$ و دیدگاه زنجیر مارکوف و در بخش سوم مدل هزینه ارایه می‌شود. یک مقایسه‌ی عددی بین طرح‌های آماری اقتصادی $T^2-VSICL$ و $T^2-VSSICL$ در بخش چهارم انجام می‌شود. سرانجام، در بخش پنجم نتیجه‌گیری موارد مطرح شده ارایه می‌شود.

۲ طرح کنترل $T^2-VSSICL$ و دیدگاه زنجیر مارکوف

فرایندی را در نظر بگیرید که دارای p مشخصه‌ی کیفیت هم‌بسته است که به طور هم‌زمان و توأم کنترل می‌شوند. فرض می‌کنیم که این p مشخصه‌ی کیفیت دارای توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_0' = (\mu_{01},...,\mu_{0p})$ و ماتریس کواریانس Σ در زمانی که فرایند تحت کنترل است، می‌باشد. در نمودارهای کنترل T^2 نیاز به محاسبه‌ی میانگین‌های نمونه‌ی هر یک از p مشخصه‌ی کیفیت با استفاده از نمونه‌ای به اندازه‌ی n داریم. سپس آماره‌های زیرگروهی $\mathrm{T}_i^2 = \mathbf{n}(\underset{\sim}{\bar{X}_i}-\boldsymbol{\mu}_0)'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}_i}-\boldsymbol{\mu}_0)$ به ترتیب در یک نمودار کنترل رسم می‌شوند. اگر $\mathrm{T}_i^2 \ge k$ باشد، نمودار علامتی مبنی بر خروج فرایند از حالت کنترل صادر خواهد کرد. در به دست آوردن توزیع آماره‌ی T^2، دو حالت کلی در نظر گرفته می‌شود. در حالت اول پارامترهای $\boldsymbol{\mu}_0$ و Σ معلوم فرض می‌شود و در حالت دوم فرض بر این است که این پارامترها نامعلوم هستند.

در حالت اول که پارامترهای $\boldsymbol{\mu}_0$ و Σ معلوم هستند، k صدک αام بالایی توزیع خی دو با p درجه آزادی است، یعنی $k=\chi^2_{p,\alpha}$ است. چنان‌چه مقدار آماره‌ی نمونه در زیر حد کنترل k قرار گیرد، فرایند تحت کنترل در نظر گرفته می‌شود، در غیر این صورت گفته می‌شود فرایند خارج از کنترل است.

البته در عمل $\boldsymbol{\mu}_0$ و Σ معمولاً نامعلوم هستند که در این صورت در حالت دوم، ابتدا این پارامترها در فاز I با استفاده از m نمونه‌ی اولیه به اندازه‌ی n به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\underset{\sim}{\bar{\bar{X}}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\underset{\sim}{\bar{X}_j} \ , \ \underset{\sim}{\bar{X}_j} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{X_{jk}} \qquad j=1,2,...,m$$

$$\bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}S_j \ , \ S_j = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\underset{\sim}{X_{jk}}-\underset{\sim}{\bar{X}_j})(\underset{\sim}{X_{jk}}-\underset{\sim}{\bar{X}_j})' \qquad j=1,2,...,m$$

به طوری که $\bar{\bar{X}}$ و $\bar{S}$ به ترتیب برآوردگرهای پارامترهای $\boldsymbol{\mu_0}$ و Σ هستند، سپس در فاز II یا فاز پایش، حد کنترل k محاسبه می‌شود. در این حالت، زمانی که $n > 1$ باشد، آماره‌ی $\frac{m(n-1)-p+1}{(m+1)(n-1)p}\mathrm{T}^2$ دارای توزیع F با درجه‌های آزادی p و $m(n-1)-p+1$ است و بنابر این، هر یک از مقدارهای $\mathrm{T_i}^2$ با مقدار

$$k = \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} F_{p,m(n-1)-p+1,\alpha} \qquad (۱)$$

مقایسه می‌شود که $F_{v_1,v_2,\alpha}$، صدک αام بالایی توزیع F با درجات آزادی v_1 و v_2 است. به علاوه، اگر $n=1$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$k = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{p,m(m-p),\alpha} \qquad (۲)$$

حدود کنترل فوق به وسیله‌ی فرانک عالت (۱۹۷۳) ارایه شد. طرح کنترل $T^2-VSSICL$ در واقع تعمیمی از طرح کنترل T^2-FRS محسوب می‌شود. فرض کنید n_2 و n_1 به ترتیب ماکسیمم و مینیمم اندازه‌ی نمونه، h_1 و h_2 ماکسیمم و مینیمم فاصله‌ی نمونه‌گیری همچنین، k_1 و k_2 ماکسیمم و مینیمم حد کنترل باشند که $0 < n_1 < n_2$، $0 < h_2 < h_1$ و $0 < k_2 < k_1$ است. انتخاب بین ماکسیمم و مینیمم اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و حد کنترل به موقعیت نقطه‌ی نمونه‌ی قبل در روی نمودار کنترل بستگی دارد. اگر نقطه قبل ($i-1$ام) در ناحیه‌ی ایمن باشد، مینیمم اندازه‌ی نمونه n_1، ماکسیمم فاصله‌ی نمونه‌گیری h_1 و ماکسیمم حد کنترل k_1 برای نقطه‌ی نمونه‌ی فعلی مورد استفاده قرار می‌گیرد و اگر نقطه‌ی نمونه‌ی قبل در ناحیه‌ی هشدار واقع شود، ماکسیمم اندازه‌ی نمونه n_2، مینیمم فاصله‌ی نمونه‌گیری h_2 و مینیمم حد کنترل k_2 برای نقطه‌ی نمونه‌ی فعلی استفاده خواهد شد. در نهایت، چنان‌چه نقطه‌ی نمونه‌ی قبل در ناحیه‌ی واکنش قرار گیرد، فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. نواحی هشدار و واکنش، به وسیله‌ی حد هشدار w_j و حد واکنش k_j مشخص می‌شوند، (ناحیه‌ی ایمن $[0,\ w_j)$، ناحیه‌ی هشدار $[w_j,\ k_j)$ و ناحیه‌ی واکنش $[k_j,\ \infty)$ است) به طوری که اگر نقطه‌ی نمونه‌ی قبل از یک فاصله‌ی نمونه‌گیری طولانی به دست آمده باشد، $j=2$ است. چنان‌چه k_j حد کنترل بالا باشد و نقطه‌ی مربوط در بالای k_j قرار گیرد، فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر طرح کنترل $T^2-VSSICL$ را می‌توان در تابع زیر خلاصه کرد:

$$(n_i,h_i,k_i) = \begin{cases} (n_1,h_1,k_1) & \text{if } \ 0 \le \mathrm{T_{i-1}}^2 < \mathrm{w_{i-1}} \\ (n_2,h_2,k_2) & \text{if } \ \mathrm{w_{i-1}} \le \mathrm{T_{i-1}}^2 < \mathrm{k_{i-1}} \end{cases} \qquad (۳)$$

به منظور مقایسه‌ی کارایی طرح‌های کنترل، از میانگین زمان از هنگام وقوع تغییری در میانگین تا زمانی که نمودار علامتی مبنی بر خروج فرایند از حالت کنترل صادر می‌کند (AATS)، استفاده می‌کنیم. این اندازه‌ی آماری مشخص‌کننده‌ی سرعت نمودار در تشخیص تغییری در میانگین فرایند است. میانگین زمان چرخه (ATC) در واقع میانگین زمان از شروع تولید تا هنگامی است که پس از وقوع تغییری در فرایند، علامتی صادر می‌شود. اگر

انحراف با دلیل بر اساس یک توزیع نمایی با پارامتر λ رخ دهد، متوسط طول زمانی که فرایند در حالت کنترل باقی می‌ماند $\frac{1}{\lambda}$ خواهد بود. بنابر این، داریم:

$$AATS = ATC - \frac{1}{\lambda} \tag{۴}$$

خاصیت بدون حافظه‌ی توزیع نمایی این اجازه را می‌دهد که محاسبه‌ی ATC با به‌کارگیری دیدگاه زنجیر مارکوف انجام گیرد. از این رو، در هر یک از مراحل نمونه‌گیری، بر اساس وضعیت فرایند، یعنی این‌که فرایند در حالت کنترل یا خارج از کنترل باشد، اندازه‌ی نمونه کم یا زیاد باشد، طول فاصله‌ی نمونه‌گیری کوتاه یا طولانی باشد و حد کنترل k_1 یا k_2 باشد، یکی از پنج وضعیت انتقال به صورت زیر رخ می‌دهد:

وضعیت ۱: $0 \le \mathrm{T}^2 < w_j$ بوده و فرایند در حالت کنترل است.

وضعیت ۲: $w_j \le \mathrm{T}^2 < k_j$ بوده و فرایند در حالت کنترل است.

وضعیت ۳: $\mathrm{T}^2 \ge k_j$ بوده و فرایند در حالت کنترل است.

وضعیت ۴: $0 \le \mathrm{T}^2 < w_j$ بوده و فرایند خارج از کنترل است.

وضعیت ۵: $w_j \le \mathrm{T}^2 < k_j$ بوده و فرایند خارج از کنترل است.

زمانی که $\mathrm{T}^2 \ge k_j$ است، نمودار هشداری مبنی بر خروج فرایند از حالت کنترل صادر می‌کند. اگر فرایند در وضعیت ۳ باشد و علامتی صادر شود، در واقع این یک هشدار اشتباه است، همچنین، وضعیت جذب (وضعیت ۶) در هنگام صدور یک هشدار صحیح رخ خواهد داد.

بنابر این، ماتریس احتمال انتقال به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن p_{ij} بیان‌گر احتمال انتقال از وضعیت قبلی i به وضعیت فعلی j است. برای محاسبه‌ی p_{ij}ها از توزیع آماره‌ی T^2 هتلینگ استفاده می‌کنیم که دارای ضریبی از توزیع F غیر مرکزی است. $F(x, p, \nu, \eta)$ را تابع توزیع تجمعی F غیر مرکزی با درجه‌های آزادی p و $\nu = m(n-1) - p + 1$ و پارامتر غیر مرکزی $\eta = nd^2$ در نظر می‌گیریم که در آن

$$d^2 = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{۵}$$

و معکوس ضریب T^2 عبارت است از

$$C(m,n,p)=\begin{cases}\dfrac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} & n>1\\[2ex] \dfrac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} & n=1\end{cases} \qquad (۶)$$

یعنی $\frac{1}{C(m,n,p)}T^2$ دارای توزیع F غیر مرکزی با درجه‌های آزادی p و $\nu=m(n-1)-p+1$ و پارامتر غیر مرکزی $\eta=nd^2$ است. بنابر این، p_{ij} ها به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$p_1=p_{11}=\Pr(T^2<w_1)\times e^{-\lambda h_1}=F(\frac{w_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=0)\times e^{-\lambda h_1}$$

$$p_2=p_{12}=\Pr(w_1\le T^2<k_1)\times e^{-\lambda h_1}$$
$$=\left[F(\frac{k_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=0)-F(\frac{w_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=0)\right]\times e^{-\lambda h_1}$$

$$p_3=p_{13}=\Pr(T^2\ge k_1)\times e^{-\lambda h_1}=\left[1-F(\frac{k_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=0)\right]\times e^{-\lambda h_1}$$

$$p_{14}=\Pr(T^2<w_1)\times(1-e^{-\lambda h_1})=F(\frac{w_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=nd^2)\times(1-e^{-\lambda h_1})$$

$$p_{15}=\Pr(w_1\le T^2<k_1)\times(1-e^{-\lambda h_1})$$
$$=\left[F(\frac{k_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=nd^2)-F(\frac{w_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=n_1d^2)\right]\times(1-e^{-\lambda h_1})$$

$$p_{16}=\Pr(T^2\ge k_1)\times(1-e^{-\lambda h_1})=\left[1-F(\frac{k_1}{C(m,n_1,p)},p,\nu,\eta=n_1d^2)\right]\times(1-e^{-\lambda h_1})$$

$$p_{21}=p_{31}=\Pr(T^2<w_2)\times e^{-\lambda h_2}=F(\frac{w_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=0)\times e^{-\lambda h_2}$$

$$p_{22}=p_{32}=\Pr(w_2\le T^2<k_2)\times e^{-\lambda h_2}$$
$$=\left[F(\frac{k_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=0)-F(\frac{w_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=0)\right]\times e^{-\lambda h_2}$$

$$p_{23}=p_{33}=\Pr(T^2\ge k_2)\times e^{-\lambda h_2}=\left[1-F(\frac{k_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=0)\right]\times e^{-\lambda h_2}$$

$$p_{24}=p_{34}=\Pr(T^2<w_2)\times(1-e^{-\lambda h_2})=F(\frac{w_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=n_2d^2)\times(1-e^{-\lambda h_2})$$

$$p_{25}=p_{35}=\Pr(w_2\le T^2<k_2)\times(1-e^{-\lambda h_2})$$
$$=\left[F(\frac{k_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=n_2d^2)-F(\frac{w_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=n_2d^2)\right]\times(1-e^{-\lambda h_2})$$

$$p_{26}=p_{36}=\Pr(T^2\ge k_2)\times(1-e^{-\lambda h_2})=\left[1-F(\frac{k_2}{C(m,n_2,p)},p,\nu,\eta=n_2d^2)\right]\times(1-e^{-\lambda h_2})$$

$$p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$$

$$p_{44} = \Pr(T^2 < w_1) = F(\frac{w_1}{C(m,n_1,p)}, p, \nu, \eta = n_1 d^2)$$

$$p_{45} = \Pr(w_1 \le T^2 < k_1) = \left[F(\frac{k_1}{C(m,n_1,p)}, p, \nu, \eta = n_1 d^2) - F(\frac{w_1}{C(m,n_1,p)}, p, \nu, \eta = n_1 d^2) \right]$$

$$p_{46} = \Pr(T^2 \ge k_1) = \left[1 - F(\frac{k_1}{C(m,n_1,p)}, p, \nu, \eta = n_1 d^2) \right]$$

$$p_{51} = p_{52} = p_{53} = 0$$

$$p_{54} = \Pr(T^2 < w_2) = F(\frac{w_2}{C(m,n_2,p)}, p, \nu, \eta = n_2 d^2)$$

$$p_{55} = \Pr(w_2 \le T^2 < k_2) = \left[F(\frac{k_2}{C(m,n_2,p)}, p, \nu, \eta = n_2 d^2) - F(\frac{w_2}{C(m,n_2,p)}, p, \nu, \eta = n_2 d^2) \right]$$

$$p_{56} = \Pr(T^2 \ge k_2) = \left[1 - F(\frac{k_2}{C(m,n_2,p)}, p, \nu, \eta = n_2 d^2) \right]$$

$$p_{61} = p_{62} = p_{63} = p_{64} = p_{65} = 0$$

$$p_{66} = 1$$

در هر وضعیت، متوسط تعداد آزمایش‌های مورد نیاز تا رسیدن به وضعیت جذب از رابطه‌ی $b'(I-Q)^{-1}$ محاسبه می‌شود که در آن Q با حذف سطر و ستون متناظر با وضعیت جذب در ماتریس P به دست می‌آید، I ماتریس یکانی مرتبه ۵ و $b' = (p_1,\ p_2,\ p_3,\ 0,\ 0)$ بردار احتمال‌های اولیه است، که در آن $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$.

بنابر این، داریم:

$$ATC = b'(I-Q)^{-1} h \qquad (۷)$$

که $h' = (h_1,\ h_2,\ h_2,\ h_1,\ h_2)$ بردار فواصل زمانی نمونه‌گیری است. به منظور ساده‌سازی در این مقاله بردار b' را برابر $(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ در نظر می‌گیریم.

۳ مدل هزینه

در این مقاله مدل هزینه‌ی کوستا و رحیم (۲۰۰۱) را بر اساس دیدگاه زنجیر مارکوف برای بناسازی تابع هدف مورد استفاده قرار می‌دهیم. فراز و همکاران (۲۰۰۹) پیش‌فرض‌هایی را به صورت زیر تدوین کردند که در اغلب مدل‌های اقتصادی مورد استفاده قرار می‌گیرند:

۱- کیفیت فرآیند به وسیله‌ی یک طرح کنترل $T^2 - VSSICL$ کنترل می‌شود که در واقع p مشخصه‌ی هم‌بسته میانگین را مورد پایش قرار می‌دهد.

۲- p مشخصه‌ی کیفیت دارای توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین μ و ماتریس کواریانس Σ هستند.

۳- زمانی که فرایند در حال کنترل است، $\mu = \mu_0$ می‌باشد.

۴- تنها یک انحراف با دلیل باعث ایجاد تغییرپذیری در میانگین از $\mu = \mu_0$ به $\mu = \mu_1$ می‌شود.

۵- فرض بر این است که ماتریس کواریانس همواره ثابت است.

۶- تعداد وقوع انحراف‌های با دلیل دارای توزیع پواسون با پارامتر λ در هر ساعت است. در نتیجه، زمانی که فرآیند تحت کنترل می‌ماند دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ خواهد بود.

۷- فرآیند خود اصلاح نیست. یعنی پس از انتقال فرایند به حالت خارج از کنترل، با دخالت مدیریت و انجام فعالیت‌های اصلاحی است که فرآیند به حالت تحت کنترل برمی‌شود.

۸- چرخه‌ی کیفیت از وضعیت در حالت کنترل شروع به کار کرده و تا زمانی که علامتی مبنی بر خروج فرایند از حالت کنترل صادر شده، ادامه می‌یابد. این مطلب به آن معنی است که چرخه‌ی کیفیت یک فرایند تجدید پاداش است.

۹- در هنگام بررسی یک انحراف بادلیل، فرایند متوقف خواهد شد.

چرخه‌ی فرآیند دربرگیرنده‌ی حالت‌هایی به شرح زیر است:

۱- دوره‌ی در حالت کنترل.

۲- دوره‌ی خارج از کنترل.

۳- زمان تشخیص یک انحراف با دلیل.

۴- زمان اصلاح یک انحراف با دلیل.

بنابر این، متوسط طول زمانی یک چرخه‌ی تولید عبارت است از:

$$E(T) = ATC + T_0 \times ANF + T_1 \qquad (8)$$

که در آن

T_0 = زمان مورد نیاز به منظور کشف یک هشدار اشتباه.

T_1 = زمان مورد نیاز به منظور بررسی و اصلاح یک انحراف با دلیل بر اساس یک هشدار صحیح.

ANF: متوسط تعداد هشدارهای اشتباه در هر چرخه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$ANF = b'(I-Q)^{-1} f \qquad (9)$$

به طوری که $f' = (0\ \ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ )$.

بنابر این، متوسط سود خالص چرخه‌ی تولید عبارت است از:

$$E(C) = \frac{V_0}{\lambda} + V_1 \times AATS - C_0 \times ANF - C_1 - s \times ANI \qquad (10)$$

که در آن

V_0 = مقدار سود هر ساعت، زمانی که فرایند در حالت کنترل باشد.

V_1 = مقدار سود هر ساعت، زمانی که فرایند خارج از کنترل باشد.

C_0 = متوسط هزینه به منظور کشف یک انحراف با دلیل و اصلاح فرایند.

s = هزینه‌ی هر مورد بازرسی شده.

ANI: متوسط تعداد موارد بازرسی شده تا زمانی که نمودار هشداری مبنی بر خروج فرایند از حالت کنترل صادر می‌کند، عبارت است از:

$$ANI = b'(I-Q)^{-1}n \qquad (۱۱)$$

که در آن $n' = (n_1, n_2, n_2, n_1, n_2)$ است.

اکنون بر اساس مدل هزینه‌ی کوستا و رحیم (۲۰۰۱)، متوسط زیان در هر ساعت به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$E(L) = V_0 - \frac{E(C)}{E(T)} = V_0 - \frac{\frac{V_0}{\lambda} + V_1 \times AATS - C_0 \times ANF - C_1 - s \times ANI}{ATC + T_0 \times ANF + T_1} \qquad (۱۲)$$

هدف طرح آماری اقتصادی $T^2 - VSSICL$ تعیین هشت پارامتر نمودار (حدود کنترل k_1 و k_2، حدود هشدار w_1 و w_2، اندازه‌های نمونه n_1 و n_2 و فواصل نمونه‌گیری h_1 و h_2) با معلوم بودن پنج پارامتر فرایند (p، λ، d، T_0 و T_1) و پنج پارامتر هزینه (C_0، C_1، V_0، V_1 و s) تحت شرایط $ANF \le ANF_0$ و/ یا $AATS \le AATS_1$ می‌باشد. به وضوح، مقدارهای کم ANF و AATS برای مقابله با هشدارهای اشتباه و تشخیص سریع تغییرات فرایند مطلوب‌تر است. بنابر این، مساله‌ی بهینه‌سازی کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

این مساله بهینه‌سازی شامل مقدارهای تصمیم گسسته و پیوسته و فضای حل ناپیوسته و غیر محدب می‌باشد که می‌توان آن را با روش‌های اکتشافی از قبیل جستجوی تابو، شبکه عصبی مصنوعی و الگوریتم ژنتیک و غیره حل نمود.

$$\begin{aligned}
& Min\, E(L) \\
& s.t. \\
& \quad 0 < n_1 < n_2 \\
& \quad 0 < h_2 < h_1 \\
& \quad 0 < k_2 < k_1 \\
& \quad 0 \le w_2 \le w_1 \\
& \quad 0 \le w_1 < k_1 \\
& \quad 0 \le w_2 < k_2 \\
& \quad n \in Z^+ \\
& \quad ANF \le ANF_0 \\
& \quad and\ /or \\
& \quad AATS \le AATS_1
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

دیدگاه الگوریتم ژنتیک (GA) روشی برای حل مسایل بهینه‌سازی مقید و غیر مقید است. در واقع GA افرادی را به طور تصادفی از جمعیت موجود به عنوان والدین انتخاب کرده و فرزندانی از آن‌ها برای نسل بعدی تولید می‌کند. به واسطه‌ی تولیدات متوالی، جمعیت به سوی حل بهینه پیش می‌رود. GA را می‌توان در حل مسایل بهینه‌سازی که برای حل آن‌ها الگوریتم‌های بهینه‌سازی استانداردی وجود ندارد، به‌کار برد. به عنوان نمونه

می‌توان به مسایلی که تابع هدف آن‌ها ناپیوسته، مشتق ناپذیر، تصادفی یا غیرخطی است، اشاره کرد. برخی از دلایلی که باعث شده است تا GA مورد توجه ویژه قرار گیرد، عبارت‌اند از:

۱- با توجه به این‌که GA به خواص تحلیلی و اطلاعات تابعی تکیه نمی‌کند، برای حل کلاس وسیعی از مسایل بهینه‌سازی مناسب می‌باشد.

۲- GA نقاط زیادی از فضای تحقیق را به طور هم‌زمان در نظر می‌گیرد.

۳- GA به طور مستقیم دنباله‌ای از مقدارهای مجموعه پارامترها را در نظر گرفته و با خود پارامترها کار نمی‌کند.

۴- GA از قواعد احتمالی در هدایت تحقیق به سمت حل بهینه استفاده می‌کند، در نتیجه می‌تواند در انواع مسایل بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گیرد.

۵- GA می‌تواند منجر به یک حل سراسری و نه موضعی شود.

۶- GA می‌تواند بسیاری از حل‌ها را در زمان و موقعیت یکسانی بررسی کند، در نتیجه می‌تواند به کارایی حل بهینه دست یابد.

بر اساس نکات فوق، GA به عنوان روش مناسبی در حل مساله بهینه‌سازی این مقاله مد نظر قرار گرفته است، همان طور که تا کنون، نویسنده‌های زیادی این روش را در طراحی آماری اقتصادی نمودارهای کنترل، مورد استفاده قرار داده‌اند. به عنوان مثال می‌توان چو و همکاران (۲۰۰۶)، فراز و همکاران (۲۰۰۹) و فراز و سانیگا (۲۰۱۰) را ملاحظه کرد. این روش حل مساله شامل مراحل زیر است:

مرحله‌ی ۱: به اندازه‌ی N_{pop} کروموزوم به عنوان نسل اولیه تولید می‌کنیم. در واقع هر کروموزوم یک حل دلخواه مساله‌ی بهینه‌سازی (۱۳) است که عموماً به وسیله‌ی رشته‌ای از اعداد بیان می‌شود.

مرحله‌ی ۲: متوسط زیان در هر ساعت را برای هر کروموزوم محاسبه می‌کنیم.

مرحله‌ی ۳: بر اساس مقدارهای متوسط زیان در هر ساعت، کروموزوم‌ها ارزیابی شده و احتمال گزینش هر کروموزوم بر اساس این مقدارها تعیین می‌شود. به این ترتیب که هر کروموزوم با متوسط زیان کم‌تر در هر ساعت، دارای مقدار زیبندگی بیش‌تر و در نتیجه شانس بیش‌تری برای انتخاب در نسل بعد خواهد بود.

مرحله‌ی ۴: به تعداد N_{elit} کروموزوم از نسل فعلی که دارای بیش‌ترین مقدارهای زیبندگی هستند، برای باقی‌ماندن در نسل بعد انتخاب می‌کنیم.

مرحله‌ی ۵: دو کروموزوم (به طور تصادفی یا بر اساس مقدارهای زیبندگی) به عنوان والدین از N_{pop} کروموزوم انتخاب می‌کنیم.

مرحله‌ی ۶: از ترکیب جفت کروموزوم انتخاب شده در مرحله ۵ به عنوان والدین، دو کروموزوم جدید به عنوان فرزندان تولید می‌کنیم. مراحل ۵ و ۶ را تا آن‌جا تکرار می‌کنیم که به تعداد $N_{pop} - N_{elit}$ فرزند به عنوان نسل جدید تولید شود. در حل ارایه شده از $N_{pop} = 100$ و $N_{elit} = 5$ استفاده شده است.

مرحله‌ی ۷: مراحل ۲ تا ۶ تا جایی تکرار می‌شود که جواب مناسب حاصل شود. یعنی زمانی که تعداد تولیدات به اندازه‌ی کافی زیاد باشد یا مقدارهای زیبندگی مناسب به دست آید.

٤ یک مقایسه‌ی عددی بین طرح‌های آماری اقتصادی $T^2-VSICL$ و $T^2-VSSICL$

در این بخش طرح‌های آماری اقتصادی $T^2-VSICL$ و $T^2-VSSICL$ را مقایسه خواهیم کرد. جدول ۱ مقدارهای ۱۳ پارامتر هزینه و فرایند را نشان می‌دهد که از کوستا و رحیم (۲۰۰۱) انتخاب شده است. این مقدارها، باعث می‌شود تا بتوانیم از یک تغییرپذیری مناسبی در مورد پارامترهای طرح بهره‌مند شویم. همچنین، با انتخاب این مقادیر، مقایسه‌ی دستاوردهای به دست آمده از نمودار کنترل $T^2-VSICL$ با نمودار کنترل $T^2-VSSICL$ امکان پذیر است. جدول‌های ۲ و ۳ مقدارهای بهینه پارامترهای طرح و زیان حاصل را برای طرح‌های $T^2-VSICL$ و $T^2-VSSICL$ به ترتیب در دو حالت $m=25,\ \ p=2$ و $m=50,\ \ p=4$ نشان می‌دهد. به دلیل وجود دو مقیاس اندازه‌گیری در طرح $T^2-VSSICL$ ارایه شده و به منظور ساده‌سازی کاربرد آن، طرح مذکور با یک حد هشدار، که دارای یک مقیاس اندازه گیری است، یعنی $w_1=w_2$ را مطرح کرده‌ایم که پارامترهای این طرح بهینه و زیان حاصل در جدول‌های ۴ و ۵ آمده است.

نتایج نشان می‌دهد که متوسط زیان طرح $T^2-VSSICL$ با دو حد هشدار کم‌تر از طرح $T^2-VSICL$ است. به عبارت دیگر زیان به‌کارگیری طرح $T^2-VSICL$ با دو حد هشدار نسبت به طرح $T^2-VSICL$ به طور متوسط ٪۷/۶۹ در ساعت کم‌تر است. ازطرفی، نتایج به‌کارگیری یک حد هشدار نشان می‌دهد که متوسط زیان طرح $T^2-VSSICL$ با یک حد هشدار نیز کم‌تر از طرح $T^2-VSICL$ بوده و زیان به‌کارگیری طرح $T^2-VSICL$ با یک حد هشدار نسبت به طرح $T^2-VSICL$ به طور متوسط ٪۶/۴۰ در ساعت کم‌تر است.

۵ نتیجه‌گیری

نمودار کنترل T^2 هتلینگ یک تعمیم مستقیم از نمودار کنترل $\bar{X}$ شوهارت محسوب شده و شاید دارای بیش‌ترین کاربرد در صنعت، به منظور پایش هم‌زمان چند مشخصه‌ی کیفیت باشد. در گذشته نویسنده‌ها نشان داده‌اند که نمودارهای کنترل T^2-VSI نسبت به نمودارهای کنترل T^2-FRS، تغییرات کوچک تا متوسط را سریع تر منعکس کرده و در نتیجه به میزان قابل ملاحظه‌ای هزینه را کاهش می‌دهند. همچنین، نشان داده شده که نمودارهای کنترل $T^2-VSICL$ نسبت به نمودارهای کنترل T^2-VSI عملکرد بهتری دارند ولی این بهبود چندان محسوس نیست. در این مقاله، یک طرح آماری اقتصادی نمودار کنترل $T^2-VSSICL$ را در شرایطی که بردار میانگین و ماتریس کواریانس نامعلوم فرض شده، ارایه نموده‌ایم. مدل هزینه بر اساس دیدگاه زنجیر مارکوف استخراج شده و الگوریتم ژنتیک برای به دست آوردن پارامترهای طرح مورد استفاده قرار گرفته است.

نتایج مقایسه‌های عددی نشان می‌دهد که زیان به‌کارگیری طرح $T^2-VSSICL$ با دو حد هشدار نسبت به طرح $T^2-VSICL$ به طور متوسط ٪۷/۶۹ در ساعت و زیان به‌کارگیری این طرح با یک حد هشدار نسبت به طرح $T^2-VSICL$ به طور متوسط ٪۶/۴۰ در ساعت کم‌تر است. به عبارت دیگر با به‌کارگیری طرح کنترل

$T^2-VSSICL$ (با دو یا یک حد هشدار) به مقدار قابل ملاحظه‌ای نسبت به طرح $T^2-VSICL$ در هزینه صرفه‌جویی می‌شود و این در حالی است که بین طرح‌های $T^2-VSSICL$ با دو و یک حد هشدار، تفاوت قابل ملاحظه‌ای دیده نمی‌شود. بنابر این، برای کاربردهای عملی استفاده از طرح $T^2-VSSICL$ با یک حد هشدار توصیه می‌شود.

ردیف	s	C_0	C_1	V_0	V_1	T_0	T_1	λ	d
1	5	500	500	500	50	5	1	0/01	1
2	10	500	500	500	50	5	1	0/01	1
3	5	250	500	500	50	5	1	0/01	1
4	5	500	50	500	50	5	1	0/01	1
5	5	500	500	250	50	5	1	0/01	1
6	5	500	500	500	100	5	1	0/01	1
7	5	500	500	500	**0**	5	1	0/01	1
8	5	500	500	500	50	2/5	1	0/01	1
9	5	500	500	500	50	5	10	0/01	1
10	5	500	500	500	50	5	1	0/05	1
11	5	500	500	500	50	5	1	0/01	1/5
12	5	500	500	500	50	5	1	0/01	0/5
13	5	500	500	500	50	5	1	0/01	2/0

جدول ۱: مقدارهای ۱۳ پارامتر هزینه و فرایند

$m=25,\quad p=2$

ردیف	طرح $T^2-VSSICL$										طرح $T^2-VSICL$								
	k_1	k_2	w_1	w_2	h_1	h_2	n_1	n_2	**ANF**	**E(L)**	k_1	k_2	w_1	w_2	h_1	h_2	n	**ANF**	**E(L)**
1	23/11	9/51	2/18	2/12	4/59	0/01	10	13	0/01	35/04	16/71	12/49	4/64	2/56	5/04	0/01	11	0/02	37/74
2	22/08	8/10	2/23	2/18	6/54	0/01	8	12	0/01	44/41	14/37	11/15	4/29	2/62	6/87	0/01	10	0/04	48/91
3	23/92	9/13	2/07	2/02	4/24	0/01	7	12	0/02	34/87	16/60	12/16	4/42	2/30	4/76	0/01	10	0/03	37/55
4	24/02	9/45	2/11	2/09	4/22	0/01	7	11	0/02	30/89	16/88	12/31	4/44	2/27	4/74	0/01	10	0/03	33/29
5	21/15	8/92	2/25	2/21	7/01	0/01	8	12	0/02	24/07	14/66	11/35	4/30	2/60	7/37	0/01	10	0/03	25/81
6	23/92	9/01	2/29	2/25	4/88	0/01	10	12	0/01	33/61	16/62	12/47	4/63	2/58	5/36	0/01	11	0/02	36/17
7	23/98	9/34	2/23	2/20	4/33	0/01	9	13	0/01	35/47	16/79	12/51	4/64	2/54	4/76	0/01	11	0/02	39/22
8	22/62	9/11	2/18	2/16	4/52	0/01	9	12	0/01	34/64	15/43	11/52	4/36	2/41	4/78	0/01	10	0/04	37/26
9	23/18	9/45	2/29	2/23	4/81	0/01	8	12	0/01	68/19	16/46	12/38	4/62	2/60	5/28	0/01	11	0/02	74/44
10	22/01	9/21	2/61	2/57	2/37	0/01	*9*	12	0/02	98/89	14/60	11/99	4/48	3/10	2/47	0/01	11	0/02	107/36
11	26/95	10/78	2/55	2/51	3/58	0/01	3	8	0/01	27/05	20/11	14/65	5/34	2/90	3/72	0/01	6	0/01	29/04
12	18/35	7/23	2/38	2/32	8/84	0/01	31	37	0/06	59/65	11/70	9/59	3/78	2/59	9/10	0/01	34	0/08	64/06
13	29/18	13/02	3/09	3/02	2/78	0/01	1	5	0/01	22/18	23/30	16/60	6/03	3/32	3/04	0/01	4	0/01	24/84

جدول ۲: پارامترهای بهینه‌ی طرح‌های $T^2-VSICL$ و $T^2-VSSICL$