

شاخص بهره وری مالک‌کوئیست چند مرحله ای

محمد علی جهانتیگی*^۱، زهره مقدس^۲، محسن واعظ قاسمی^۲

^۱دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زاهدان، گروه ریاضی، زاهدان، ایران

^۲دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: اول شهریور ۱۳۹۰

پذیرش مقاله: شانزدهم آذرماه ۱۳۹۰

چکیده

زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده که همان مراحل موجود آن واحد می باشند می توانند به صورت سری یا موازی به کار روند. این گونه مراحل موجود در واحدهای تصمیم گیرنده در اغلب مسایل حقیقی کاربردهای بسیاری دارند. در نظر نگرفتن این زیر واحدها و ارتباطات آن ها می تواند منجر به تنایج دور از واقعیت گردد. به منظور ارزیابی عملکرد یک واحد با زیر مجموعه های آن نسبت به گذشته و دیگران می توان از تکنیک های پیشرفت و پسرفت استفاده نمود که مهمترین تکنیک محاسبه پیشرفت و پسرفت یک واحد، شاخص بهره وری مالک‌کوئیست می باشد. در این مقاله با در نظر گرفتن واحدهای تصمیم گیرنده که شامل چند زیر واحد که به صورت سری به هم متصل هستند رویکرد شاخص بهره وری مالک‌کوئیست بسط داده است. همچنین کارایی هر یک از این زیر واحدها و کارایی تجمعی آن ها محاسبه و اندیس بهره وری مالک‌کوئیست برای هر زیر واحد و و اندیس بهره وری مالک‌کوئیست تجمعی معرفی می شوند.

کلمات کلیدی: شاخص بهره وری مالک‌کوئیست، تحلیل پوششی داده ها، مدل های چند مرحله ای، پیشرفت، پسرفت.

۱ مقدمه

مهمترین مساله برای مدیران در رابطه با واحدهای تصمیم گیرنده به منظور هدایت آن ها اطلاع از عملکرد واحدها می باشد. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد عملکرد، اثرات عوامل بیرونی، اثر واحدهای رقیب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم گیری های مناسب، تغییرات ناگهانی خط مشی به علت برخورد های انفعالی با مشکلات حاد (مانند بیکاری ...) از جمله عواملی است که مدیر بدون برخورد علمی نمی تواند از کارکرد واحدهای تحت امر، مطلع باشد و تصمیم گیری مناسبی را در جهت بهبود کارایی و بهره وری اتخاذ نماید. میزان پیشرفت با پسرفت یک واحد تصمیم گیرنده اولین بار با ایده تقسیم کارایی زمان حال به کارایی زمان گذشته مطرح گردید که به دلیل مشکلات زیاد، شاخص بهره وری مالک‌کوئیست که نشان دهنده پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده می باشد معرفی گردید.

در سال ۱۹۵۳ مالککوئیست [۱] اندیسی را معرفی کرد که مبنای کار کیوز و همکاران در سال ۱۹۸۲ برای ساختن اندیس بهره وری شد. در حال حاضر در میان محققینی که به تحلیل عملکرد واحد ها می پردازند، اندازه گیری و تحلیل تغییرات بهره وری بسیار مورد توجه می باشد. مانیاداکیس و همکاران [۲] اندیس بهره وری ای که تعمیم یافته ی اندیس بهره وری مالککوئیست بود را معرفی کردند. اندیس بهره وری هنگامی که قیمت ورودی ها مشخص و هدف تولید کننده ها به حداقل رسانیدن هزینه است قابل استفاده می باشد. به این منظور آن ها اندیس بهره وری را طوری توسعه دادند که نه تنها کارایی تکنیکی و تغییرات تکنولوژی بلکه کارایی تخصیصی و اثر تغییرات قیمت ورودی ها را نیز در نظر بگیرد. چن [۳] بر مبنای آن چه در تحلیل پوششی داده ها برای محاسبه این اندیس عنوان شده بود اندیس بهره وری مالککوئیست غیر شعاعی که در آن نظر تصمیم گیرنده در رابطه با اولویت نیز در نظر گرفته شده بود را مطرح کرد. حسن این اندیس این است که می تواند با اسلک های غیر صفر ناکارایی ممکنه را بر طرف نماید. لین و همکاران [۴] ۱۱۷ شعبه بانک را در تایوان در نظر گرفته و با استفاده از تحلیل پوششی داده ها به ارزیابی عملکرد این واحد ها پرداختند. ونگ و همکاران [۵] فرآیند ساختار سلسله مراتبی را برای انتخاب سیاست های بانک به کار گرفتند. نتایج به دست آمده مبین این مطلب است که در انتخاب استراتژی، مدیریت ریسک و نسبت ها مالی بانک ها از مهم ترین ملاحظات می باشند. هوآنگ - ای وو و همکاران [۶] برای ارزیابی عملکرد بانک ها تصمیم گیری چند معیاره فازی را پیشنهاد دادند.

در این مقاله واحد های تصمیم گیرنده و زیر واحدهای آن ها که غالباً به صورت سری مطرح می شوند در نظر گرفته شده و عملکرد آن ها با زیر مجموعه های خود نسبت به گذشته و دیگران محاسبه شده است. در نیل به این هدف از مهمترین تکنیک محاسبه پیشرفت و پسرفت یک واحد که شاخص بهره وری مالککوئیست می باشد استفاده شده است. همچنین رویکرد شاخص بهره وری مالککوئیست بسط داده شده و برای محاسبه دو مرحله ای سری زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده با ورودی و خروجی های میانی مورد استفاده قرار گرفته است. بخش های مختلف این مقاله به شرح ذیل است: در بخش اول به اختصار تحلیل پوششی داده ها معرفی خواهد شد در ادامه، در بخش دوم، به معرفی اندیس بهره وری مالککوئیست خواهیم پرداخت. در بخش سوم شاخص بهره وری مالککوئیست چند مرحله ای با ورودی و خروجی میانی مورد بحث قرار میگیرد و در بخش چهارم به بیان نتایج و پیشنهادات خواهیم پرداخت.

۲ تحلیل پوششی داده ها

تحلیل پوششی داده ها، تکنیکی برای محاسبه کارایی نسبی مجموعه ای از واحدهای تصمیم گیرنده است که با استفاده از برنامه ریزی ریاضی انجام می گیرد، عبارت نسبی به این دلیل است که کارایی حاصل نتیجه مقایسه واحدها با یکدیگر است. وقتی گفته می شود واحد تصمیم گیرنده P ام کاراست یعنی این واحد خوب عمل می کند و از منابع به خوبی استفاده می کند. از آن جا که هدف پیدا نمودن مرز کارا یا تابع تولید است، که معمولاً در دسترس نمی باشد، با پذیرفتن اصول موضوعه زیر مجموعه امکان تولید زیر ساخته می شود و مرز

مجموعه به عنوان تقریبی از تابع تولید در نظر گرفته می شود. مجموعه امکان تولید T_c که در آن تکنولوژی با بازده به مقیاس ثابت در نظر گرفته شده است به صورت زیر است:

$$T_c = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

فرض کنید DMU_j ($j = 1, \dots, n$)، n واحد متجانس هستند که با به کار بردن بردار ورودی x_j ($j = 1, \dots, n$) بردار خروجی y_j ($j = 1, \dots, n$) را تولید می نمایند. همچنین فرض کنید که $x_j \in R^{m \geq 0}$ و $y_j \in R^{s \geq 0}$ ($j = 1, \dots, n$). اگر در T_c امکان تولیدی مانند (x, y) یافت نشود که غالب بر (x_o, y_o) باشد، در این صورت DMU_o کارای نسبی است. برای بررسی حالت اول مدل زیر که به مدل معروف است حل می شود.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{s.t. } (\theta X_o, Y_o) \in T_c. \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن (x_o, y_o) بردار ورودی ها و خروجی های DMU_o است. مدل (۱) به مدل CCR با ماهیت ورودی در فرم پوششی مشهور است. با توجه به تعریف T_c ، مدل (۱) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{s.t. } X\lambda \leq \theta X_o, \\ & \quad Y\lambda \geq Y_o, \\ & \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

توجه کنید که مدل (۲) همواره شدنی است و $0 < \theta^* \leq 1$.

اگر $\theta^* = 1$ در این صورت DMU_o کاراست در غیر این صورت ناکاراست. دوآل فرم پوششی که معروف به فرم مضربی است چنین می باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Max } U Y_o \\ & \text{s.t. } U Y_j - V X_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad V X_o = 1, \\ & \quad u \geq 0, \\ & \quad v \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

۳ شاخص بهره وری مالکونیست

در تحلیل های اقتصادی یکی از شاخص هایی که در بررسی رشد بهره وری کل عوامل، همواره مورد توجه بوده است شاخص بهره وری مالکونیست می باشد.

این شاخص ابتدا توسط مالک کوئیست [۱] به عنوان شاخص استاندارد معرفی شد و برای اولین بار توسط کیوز و همکاران [۷]، در تئوری تولید به کار گرفته شد. کیوز و همکاران [۷] برای محاسبه شاخص‌ها، از تابع فاصله $D(\cdot)$ استفاده کرده و فرض نمودند که همه واحدها نسبت به مرز تولید زمان خود، کارا می‌باشند یعنی $D^k(x^k, y^k) \equiv 1$. در واقع، آن‌ها برای محاسبه رشد بهره‌وری یک DMU طی زمان t_1, t_2 به محاسبه نسبت تابع فاصله مشاهدات آن DMU در زمان‌های مذکور نسبت به یکی از مرزهای کارایی زمان t_1, t_2 پرداخت و دو شاخص بهره‌وری را ارائه نمود. تابع فاصله فوق‌الذکر به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$D^{t_2}(x^{t_1}, y^{t_1}) = \text{Min}\{\theta \mid \theta x^{t_1} \text{ بتواند با تکنولوژی زمان } t_2 \text{ را تولید کند}\}$$

با توجه به یکسان بودن تعریف کارایی فنی فارل و تابع فاصله فوق‌الذکر، فار و همکاران [۸] از تکنیک‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای محاسبه شاخص مالکونیست استفاده کردند و آن را به صورت میانگین هندسی شاخص‌های بهره‌وری مالکونیست ارائه شده توسط کیوز و همکاران ارائه نمودند

در این تحقیق برای محاسبه رشد بهره‌وری عوامل تولید واحد تصمیم‌گیرنده K در طی زمان t_1, t_2 از شاخص بهره‌وری مالکونیست فار استفاده می‌شود. این شاخص، با بهره‌گیری از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و براساس اندازه‌گیری تابع فاصله یا کارایی فنی مختصات مشاهدات واحد K در زمان t_1, t_2 نسبت به مرزهای تولید با تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت زمان‌های t_1, t_2 صورت می‌پذیرد.

فرض کنید تعداد واحد‌های تصمیم‌گیرنده برابر n می‌باشد و $x_j^{t_1} = (x_{1j}^{t_1}, \dots, x_{mj}^{t_1})$ و $y_j^{t_1} = (y_{1j}^{t_1}, \dots, y_{sj}^{t_1})$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) در زمان t_1 و $x_j^{t_2} = (x_{1j}^{t_2}, \dots, x_{mj}^{t_2})$ و $y_j^{t_2} = (y_{1j}^{t_2}, \dots, y_{sj}^{t_2})$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی واحد تصمیم‌گیرنده j ام در زمان t_2 می‌باشد. براساس شاخص بهره‌وری مالکونیست، رشد بهره‌وری واحد تصمیم‌گیرنده o ام ($o \in \{1, \dots, n\}$) در زمان t_2 نسبت به t_1 از روش ذیل محاسبه می‌گردد.

$$M_o = \left[\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \times \frac{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{1/2}$$

$$M_o = \frac{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \left[\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} \times \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{1/2}$$

که در آن:

$$D_o^{t1}(X_o^{t1}, Y_o^{t1}) = \text{Min } \theta$$

s.t.

$$\begin{aligned} X_o^{t1} \lambda &\leq \theta X_o^{t1}, \\ Y_o^{t1} \lambda &\geq Y_o^{t1}, \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

$$D_o^{t2}(X_o^{t1}, Y_o^{t1}) = \text{Min } \theta$$

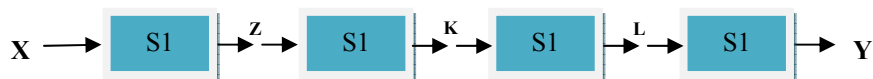
s.t.

$$\begin{aligned} X_o^{t2} \lambda &\leq \theta X_o^{t1}, \\ Y_o^{t2} \lambda &\geq Y_o^{t1}, \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

در صورتی که مقدار M_0 بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده افزایش، کاهش و عدم تغییر بهره وری واحد مورد نظر بوده است.

۴ شاخص بهره وری مالکونویست چند مرحله ای با ورودی و خروجی میانی

فرض کنید Π واحد تصمیم گیرنده موجود است به طوری که هر واحد تصمیم گیرنده دارای چهار زیر واحد باشند که بصورت زیر می توان نشان داد.



شکل (۱)

بنابراین هر واحد تصمیم گیرنده دارای چهار مرحله یا زیر واحد می باشد و (X, Z, K, L, Y) بردار مختصات واحد تصمیم گیرنده می باشد. در این بردار X بردار ورودی، Y بردار خروجی و L, K, Z بردارهایی با نام تولیدات میانی می باشند. کارایی مرحله اول، دوم، سوم، چهارم و تجمعی از رابطه زیر حاصل می شوند.

$$e^1 = \frac{WZ}{VX}, \quad e^2 = \frac{UK}{WZ}, \quad e^3 = \frac{VL}{UK}, \quad e^4 = \frac{UY}{VL}, \quad e^a = \frac{UY}{VY} \quad (۶)$$

مدل مضربی جهت محاسبه کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده P به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 &Max \quad \frac{UY_p}{VX_p} \\
 &s.t. \quad \frac{UY_j}{VX_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad \frac{WZ_j}{VX_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad \frac{\bar{U}K_j}{\bar{W}Z_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad \frac{\bar{V}L_j}{\bar{U}K_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad \frac{UY_j}{\bar{V}L_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad U \geq 1\varepsilon, \quad V \geq 1\varepsilon, \quad W \geq 1\varepsilon, \\
 &\quad \quad \bar{U} \geq 1\varepsilon, \quad \bar{V} \geq 1\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{7}$$

مدل خطی متناظر مدل (7) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 &Max \quad UY_p \\
 &s.t. \quad UY_j - VX_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad WZ_j - VX_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad \bar{U}K_j - WZ_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad \bar{V}L_j - \bar{U}K_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad UY_j - \bar{V}L_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \quad VX_p = 1, \\
 &\quad \quad U \geq 1\varepsilon, \quad V \geq 1\varepsilon, \quad W \geq 1\varepsilon, \\
 &\quad \quad \bar{U} \geq 1\varepsilon, \quad \bar{V} \geq 1\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{8}$$

بدیهی است دسته قیود اول در مدل (۳.۴) از مجموع دسته قیود دوم الی چهارم حاصل می‌شود و لذا زاید است و می‌تواند در مدل حذف گردد. با حذف این دسته قیود، دوآل آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 &Min \quad \theta \\
 &s.t. \quad X\lambda^1 \leq \theta X_p, \\
 &\quad \quad Z\lambda^1 - Z\lambda^2 \geq 0, \\
 &\quad \quad K\lambda^2 - K\lambda^3 \geq 0, \\
 &\quad \quad L\lambda^3 - L\lambda^4 \geq 0, \\
 &\quad \quad Y\lambda^4 \geq Y_p, \\
 &\quad \quad \lambda^1 \geq 0, \quad \lambda^2 \geq 0, \quad \lambda^3 \geq 0, \quad \lambda^4 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

بدیهی است رابطه زیر بین کارایی مراحل یک واحد تصمیم گیرنده و تجمعی آن وجود دارد.

$$e_p^a = e_p^1 \cdot e_p^2 \cdot e_p^3 \cdot e_p^4$$

به کمک این رابطه می توان فهمید که یک واحد تصمیم گیرنده کارا است اگر و فقط اگر تمام مراحل آن واحد کارا باشد. حال فرض کنید برای همه واحدهای تصمیم گیرنده در دو مقطع زمانی داده وجود دارد.

$$(X_j^{t+1}, Z_j^{t+1}, K_j^{t+1}, L_j^{t+1}, Y_j^{t+1}), \quad (X_j^t, Z_j^t, K_j^t, L_j^t, Y_j^t)$$

به ترتیب مختصات DMU_j در لحظه t, t+1 باشد. در این صورت برای هر واحد تصمیم گیرنده و مراحل چهار کارایی می توان به دست آورد که به کمک آن ها بتوان شاخص بهره وری مالکویست را محاسبه کرد. کارایی واحد تصمیم گیرنده p ام با مختصات لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از حل مسأله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \theta^t(t) = \text{Max} \quad & U Y_p^t \\ \text{s.t.} \quad & W Z_j^t - V X_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \bar{U} Y_j^t - W Z_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \bar{V} L_j^t - \bar{U} K_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & U Y_j^t - \bar{V} L_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & V X_p^t = 1, \\ & U \geq 0, \quad V \geq 0, \quad W \geq 0 \\ & \bar{U} \geq 0, \quad \bar{V} \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

فرض کنید $(U^*, V^*, W^*, \bar{U}^*, \bar{V}^*)$ جواب بهین مدل (۱۰) باشد کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد تصمیم گیرنده P ام در لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t) = \frac{W^* Z_p^t}{V^* X_p^t}, \quad e_p^{2,t}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^t}{W^* Z_p^t}, \quad e_p^{3,t}(t) = \frac{\bar{V}^* L_p^t}{\bar{U}^* K_p^t}, \quad e_p^{4,t}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{\bar{V}^* L_p^t}, \quad e_p^{a,t}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{V^* Y_p^t} \quad (11)$$

کارایی واحد p ام با مختصات لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t+1 از مسأله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 \theta_p^{t+1}(t) = \text{Max} \quad & UY_p^t \\
 \text{s.t.} \quad & WZ_j^{t+1} - VX_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \bar{U}Y_j^{t+1} - WZ_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & VL_j^{t+1} - \bar{U}K_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & UY_j^{t+1} - \bar{V}L_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & VX_p^t = 1, \\
 & U \geq 0, \quad V \geq 0, \quad W \geq 0, \\
 & \bar{U} \geq 0, \quad \bar{V} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با فرض $(V^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, U^*)$ به عنوان جواب بهین مساله (۱۲) کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد P ام در لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید در لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned}
 e_p^{1,t+1}(t) &= \frac{W^* Z_p^t}{V^* X_p^t}, \quad e_p^{2,t+1}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^t}{W^* Z_p^t}, \quad e_p^{3,t+1}(t) = \frac{\bar{V}^* L_p^t}{U^* K_p^t}, \quad e_p^{4,t+1}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{\bar{V}^* L_p^t}, \\
 e_p^{a,t+1}(t) &= \frac{U^* Y_p^t}{V^* Y_p^t}
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

کارایی واحد تصمیم گیرنده P ام با مختصات لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از حل مساله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 \theta_p^t(t+1) = \text{Max} \quad & UY_p^{t+1} \\
 \text{s.t.} \quad & WZ_j^t - VX_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \bar{U}Y_j^t - WZ_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \bar{V}L_j^t - \bar{U}K_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & UY_j^t - VL_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & VX_p^{t+1} = 1, \\
 & U \geq 0, \quad V \geq 0, \quad W \geq 0, \\
 & \bar{U} \geq 0, \quad \bar{V} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

فرض کنید $(V^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, U^*)$ جواب بهین مساله (۱۴) باشد کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد P ام در لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t+1) = \frac{W^* Z_p^{t+1}}{V^* X_p^{t+1}}, \quad e_p^{2,t}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^{t+1}}{W^* Z_p^{t+1}}, \quad e_p^{3,t}(t+1) = \frac{\bar{V}^* L_p^{t+1}}{\bar{U}^* K_p^{t+1}}, \quad e_p^{4,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{\bar{V}^* L_p^{t+1}},$$

$$e_p^{a,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{V^* Y_p^{t+1}} \quad (15)$$

کارایی واحد تصمیم گیرنده P با مختصات لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t+1 از حل مسأله زیر به دست می آید.

$$\theta_p^{t+1}(t+1) = \text{Max } U Y_p^{t+1}$$

$$\text{s.t. } W Z_j^{t+1} - V X_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\bar{U} Y_j^{t+1} - W Z_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\bar{V} L_j^{t+1} - \bar{U} K_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$U Y_j^{t+1} - \bar{V} L_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$V X_p^{t+1} = 1,$$

$$U \geq 0, V \geq 0, W \geq 0,$$

$$\bar{U} \geq 0, \bar{V} \geq 0. \quad (16)$$

فرض کنید $(V^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, U^*)$ جواب بهین مسأله (16) باشد. در این صورت کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد P در لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t+1 از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t+1) = \frac{W^* Z_p^{t+1}}{V^* X_p^{t+1}}, \quad e_p^{2,t}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^{t+1}}{W^* Z_p^{t+1}}, \quad e_p^{3,t}(t+1) = \frac{\bar{V}^* L_p^{t+1}}{\bar{U}^* K_p^{t+1}}, \quad e_p^{4,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{\bar{V}^* L_p^{t+1}},$$

$$e_p^{a,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{V^* Y_p^{t+1}} \quad (17)$$

بنابراین شاخص بهره وری مالمکوئیست مرحله اول در زمان های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_p^1 = \left(\frac{\theta_p^{1,t}(t+1) \cdot \theta_p^{1,t+1}(t+1)}{\theta_p^{1,t}(t) \cdot \theta_p^{1,t+1}(t)} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\theta_p^{1,t+1}(t+1)}{\theta_p^{1,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{1,t}(t+1) \cdot \theta_p^{1,t}(t)}{\theta_p^{1,t+1}(t) \cdot \theta_p^{1,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \quad (18)$$

در این حالت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^1 > 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^1 < 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^1 = 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره‌وری مالکونیت‌یست مرحله دوم در زمان‌های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$M_p^2 = \left(\frac{\theta_p^{2,t}(t+1) \cdot \theta_p^{2,t+1}(t+1)}{\theta_p^{2,t}(t) \cdot \theta_p^{2,t+1}(t)} \right)^{1/2} \quad (19)$$

$$= \frac{\theta_p^{2,t+1}(t+1)}{\theta_p^{2,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{2,t}(t+1) \cdot \theta_p^{2,t}(t)}{\theta_p^{2,t+1}(t) \cdot \theta_p^{2,t+1}(t+1)} \right)^{1/2}$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^2 > 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^2 < 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^2 = 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره‌وری مالکونیت‌یست مرحله سوم در زمان‌های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$M_p^3 = \left(\frac{\theta_p^{3,t}(t+1) \cdot \theta_p^{3,t+1}(t+1)}{\theta_p^{3,t}(t) \cdot \theta_p^{3,t+1}(t)} \right)^{1/2} \quad (20)$$

$$= \frac{\theta_p^{3,t+1}(t+1)}{\theta_p^{3,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{3,t}(t+1) \cdot \theta_p^{3,t}(t)}{\theta_p^{3,t+1}(t) \cdot \theta_p^{3,t+1}(t+1)} \right)^{1/2}$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^3 > 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^3 < 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^3 = 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره‌وری مالکونیت‌یست مرحله چهارم در زمان‌های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$M_p^4 = \left(\frac{\theta_p^{4,t}(t+1) \cdot \theta_p^{4,t+1}(t+1)}{\theta_p^{4,t}(t) \cdot \theta_p^{4,t+1}(t)} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\theta_p^{4,t+1}(t+1)}{\theta_p^{4,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{4,t}(t+1) \cdot \theta_p^{4,t}(t)}{\theta_p^{4,t+1}(t) \cdot \theta_p^{4,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \quad (21)$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^4 > 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^4 < 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^4 = 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالکونیست تجمعی در زمان های $t+1$ نسبت به لحظه t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_p^a = \left(\frac{\theta_p^{a,t}(t+1) \cdot \theta_p^{a,t+1}(t+1)}{\theta_p^{a,t}(t) \cdot \theta_p^{a,t+1}(t)} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\theta_p^{a,t+1}(t+1)}{\theta_p^{a,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{a,t}(t+1) \cdot \theta_p^{a,t}(t)}{\theta_p^{a,t+1}(t) \cdot \theta_p^{a,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \quad (22)$$

در این حالت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^a > 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرنده p ام (تجمعی) در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^a < 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرنده p ام (تجمعی) در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^a = 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرنده p ام (تجمعی) در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

۵ نتیجه گیری

فرموله کردن مدل های واقعی که در برگیرنده جزئیات خاصی هستند مستلزم بررسی روابط مختلف و متعددی می باشد تا بتوان تمام جزئیات آن را به منظور به دست آوردن نتایج معتبر در نظر گرفت. زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده که همان مراحل موجود آن واحد می باشند می توانند به صورت سری یا موازی به کار روند که هر دوی این حالات کاربرد های عملی فراوانی در مسائل حقیقی دارند.

در این مقاله به بررسی شاخص بهره وری مالکونیست در حالت سری بودن چند زیر واحد می باشد پرداخته شده است. با در نظر گرفتن مدل ارایه شده می توان میزان پیشرفت یا پسرفت واحدها را در دو دوره ارزیابی برای

حالت شبکه‌ای محاسبه نمود. پیشنهادات بعدی برای پیشبرد هدف این مقاله در نظر گرفتن حالت اتصال موازی زیر واحد‌ها و بسط و توسعه مدل‌های معرفی شده می‌باشد.

منابع

- [1] Malmquist, S., (1953). Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos de Estadística*, 4, 209–242.
- [2] Maniadakis N., Thanassoulis E., (2004). A cost Malmquist productivity index. *European Journal of Operational Research*, 154, 396–409.
- [3] Chen, Y., (2003). A non-radial Malmquist productivity index with an illustrative application to Chinese major industries. *Int. J. Production Economics*, 83, 27–35.
- [4] Lin, T. T., Lee, C. C., Chiu, T. S. F., (2009). Application of DEA in analyzing a bank's operating performance. *Expert Systems with Applications*, 36, 8883–8891.
- [5] Wang, T. C., Lin, Y. L., (2009). Applying the consistent fuzzy preference relations to select merger strategy for commercial banks in new financial environments. *Expert Systems with Applications*, 36, 7019–7026.
- [6] Wu, H. Y., Tzeng, G. H., Chen, Y. H., (2009). A fuzzy MCDM approach for evaluating banking performance based on Balanced Scorecard. *Expert Systems with Applications*, 6, 10135- 10147.
- [7] Caves D.W., Christensen L. R. Diewert, W. E., (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output and productivity. *Econometrica*, 50, 1393–1414.
- [8] Fare, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., Ross, P., (1989). Productivity Developments in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach, Southern Illinois University at Carbondale. Department of Economics. Working Paper.
- [9] Charnes A, Cooper W. W. W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of operational research*. 2; 429-444.
- [10] Grifell-Tatjé E., Lovell C. A. K., Pastor J. T., (1998). A Quasi-Malmquist Productivity Index. *Journal of Productivity Analysis*, 10, 7–20.