



## ارائه مدل دیفرانسیلی پلی تروپیک به منظور ارزیابی عملکرد موتور استرلینگ با در نظر گرفتن مدل های مختلف انتقال حرارت در بازیاب

مجتبی بابالاهی<sup>1</sup>، حسین صیادی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\*تهران، صندوق پستی 19395-1999، [sayyaadi@kntu.ac.ir](mailto:sayyaadi@kntu.ac.ir)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

در این مقاله یک مدل حرارتی دیفرانسیلی به منظور شبیه سازی عملکرد حرارتی موتور استرلینگ ارائه گردیده است. در این مدل با ارزیابی واقعی تر عملکرد موتور، فرایند انبساط و تراکم پلی تروپیک جایگزین مدل های هم دما و آدیباتیک پژوهش های پیشین شده و علاوه بر این اثر افت های مختلف موجود در موتور واقعی به منظور تصحیح مدل وارد مدل پلی تروپیک توسعه داده شده گردیده است. برای این منظور اثر غیر ایده آل بودن بازیاب حرارتی در نظر گرفته شده و میزان حرارت بازیابی شده توسط بازیاب، تصحیح گردیده و غیر ایده آل بودن گرم کن و خنک کن مورد ارزیابی قرار گرفته است. سپس فشار در محفظه های موتور تصحیح گردیده و به منظور ارزیابی صحیح از کار تراکمی و انبساطی از روش تحلیل ترمودینامیک سرعت محدود<sup>1</sup> استفاده شده است. در نهایت اثر انتقال حرارت به واسطه هدایت طولی در بازیاب، نشست جریان بین سیلندر و پیستون<sup>2</sup> و اتلاف حرارتی پیستون<sup>3</sup> (اثر شاتل) بین محفظه گرم و سرد، به مدل مورد نظر اعمال گردیده و مدل توسعه داده شده روی یک موتور استرلینگ نمونه موسوم به موتور GPU-3 به کار گرفته شده و دقت مدل دیفرانسیلی به دست آمده با استفاده از نتایج آزمایشگاهی موجود، صحت گذاری شده و با مدل های حرارتی قبلی مقایسه گردیده است. با توجه به تأثیر بسیار زیاد عملکرد بازیاب روی کارکرد موتور استرلینگ و توجه به وجود مدل های حرارتی مختلف برای بازیاب، این مدل های حرارتی مربوط به بازیاب در مدل پلی تروپیک آزمایش گردیده و از طریق مقایسه با نتایج آزمایشگاهی دقیق ترین مدل حرارتی برای بازیاب معرفی گردیده است.

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 17 شهریور 1393  
پذیرش: 05 آذر 1393  
ارائه در سایت: 13 دی 1393  
کلید واژگان:  
موتور استرلینگ  
مدل پلی تروپیک  
مدل حرارتی دیفرانسیلی  
ترمودینامیک سرعت محدود  
بازیاب

## Differential Polytropic Model for Simulation of Stirling Engines Considering Various Regenerators Models

Mojtaba Babaelahi, Hoseyn Sayyaadi\*

Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

\*P.O.B.19395-1999, Tehran, Iran, [sayyaadi@kntu.ac.ir](mailto:sayyaadi@kntu.ac.ir)

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 08 September 2014  
Accepted 26 November 2014  
Available Online 03 January 2015

#### Keywords:

Stirling Engines  
Polytropic model  
Differential thermal model  
Finite Speed Thermodynamics  
Regenerator

### ABSTRACT

A differential thermal model for simulation of Stirling engines was presented. In the new model polytropic expansion/compression processes were substituted for traditional isothermal or adiabatic models of previous studies. In addition, the developed polytropic model was corrected for various loss mechanisms of real engines. In this regard, the effect of non-ideal operation as well as heat recovery in the regenerator was considered. In addition, non-ideal heat transfer of heater and cooler were implemented into the model. In pressure analysis and evaluation of work produced or consumed in cylinders, the effect of finite speed motion of piston was considered based on the concept of finite speed thermodynamics. Moreover, the effects of heat leakage in regenerator, leakage effect and shuttle effect were evaluated. Finally, new differential polytropic models were employed on a benchmark Stirling engine, so-called GPU-3, and accuracy of models was validated through comparison with experimental results as well as previous models. As thermal performance of Stirling engines is significantly affected by thermohydraulic performance of regenerator and there are various thermohydraulic models for regenerator, three famous thermohydraulic models of regenerator were integrated into models and through comparison with experimental performance of GPU-3 engine, a more accurate thermohydraulic model was introduced.

1- Finite Speed Thermodynamics (FST)  
2- Gas Leakage  
3- Shuttle Effect

Please cite this article using:

M. Babaelahi, H. Sayyaadi, Differential Polytropic Model for Simulation of Stirling Engines Considering Various Regenerators Models, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 187-197, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

## 1- مقدمه

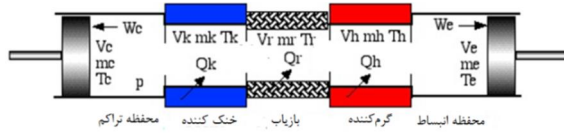
تکنولوژی موتور استرلینگ مربوط به حدود دویست سال گذشته است. با توجه به راندمان بالا و مشخصات منحصر به فرد این موتور نسبت به موتورهای درون‌سوز، اخیراً تلاش‌هایی جهت تجاری شدن این محصول صورت گرفته است. در عدم توسعه موتور استرلینگ عوامل مختلفی همچون انتقال حرارت یکنواخت در دمای بالا به سیال عامل، روغن کاری پیستون، ایجاد سیستم بازیاب حرارتی مناسب، مسائل مربوط به نشت جریان گاز و غیره تأثیرگذار بوده است.

با توجه به مطالب طرح شده و اهمیت مدل‌سازی موتور استرلینگ، تحقیقات فراوانی در زمینه شبیه‌سازی و بهینه‌سازی موتور استرلینگ انجام شده است. بدیهی است که این تحقیقات منجر به پیش‌بینی عملکرد موتور با مشخصات دلخواه و همچنین یافتن طرح بهینه می‌شود. در این مقاله، هدف ارائه مدلی است که بتواند پیش‌بینی درستی از عملکرد موتور استرلینگ داشته باشد. به‌منظور ارزیابی نکات قوت و ضعف هر یک از مدل‌های گذشته مروری اجمالی بر این مدل‌ها خواهیم داشت. مدل‌های گذشته به‌منظور تحلیل موتور استرلینگ، را می‌توان به مدل‌های تجربی و مدل‌های ریاضی تقسیم کرد. مدل‌های ریاضی را می‌توان به زیرگروه‌های مرتبه اول، دوم تقسیم کرد.

تحقیقاتی در ارتباط با توسعه روابط تجربی به‌منظور تخمین قدرت خروجی و همچنین راندمان موتور استرلینگ انجام شده است. وست [1] یک پارامتر بی‌بعد به نام عدد بیل را به‌منظور پیش‌بینی قدرت موتور ارائه کرده است. عدد بیل به‌وسیله قدرت خروجی موتور، فشار متوسط، حجم جارو شده توسط پیستون و فرکانس موتور تعریف می‌شود. به‌منظور یافتن رابطه مناسب به‌منظور ارزیابی قدرت خروجی موتور استرلینگ، کنگتراگول و همکاران [2]، راندمان موتور را به صورت آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار دادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که برای موتورهای با نسبت دمایی بالا، نمی‌توان عدد بیل مشخصی پیدا کرد. پری‌تو و همکاران [3،4]، محدوده وسیعی از نتایج آزمایشگاهی را مورد ارزیابی قرار دادند و از تشابه دینامیکی برای موتورهای مختلف استفاده کردند. همچنین پری‌تو و همکاران [5] به‌منظور دقت بخشیدن به پیش‌بینی قدرت خروجی موتور، از تحلیل ابعادی به‌منظور بررسی اثرات نشت و اتلافات مکانیکی استفاده کردند. پری‌تو و همکاران [6]، یافتند که استفاده از روابط مربوط به آنالیز ابعادی و در نظر گرفتن افت‌های موجود در موتور، رابطه بسیار دقیق‌تری ارائه می‌دهد.

مدل مرتبه اول بر مبنای روابط جبری معادلات جرم و انرژی برای فرایند کاری در موتور استرلینگ بیان می‌شود. از این‌رو می‌توان معادلات تحلیلی به‌منظور ارزیابی قدرت و راندمان موتور به‌دست آورد. اولین سری مدل‌های مرتبه اول، مدل اشمیت [7] است. در این مدل، روابط تحلیلی به‌منظور تعیین تغییرات فشار در طول سیکل استخراج می‌شود. این تحلیل بر مبنای سه محفظه تراکم، انبساط و مرده ارائه می‌شود. اشمیت فرض کرد که فرایند انجام شده در هر سه محفظه موردنظر، فرایندی دما ثابت است. تودا و همکاران [8]، مدلی ارائه کردند که در آن اثرات راندمان مکانیزم حرکتی موتور استرلینگ در تئوری اشمیت مورد ارزیابی قرار گرفته است. مارتینی [9]، مدلی هم‌دما بر پایه تحلیل اشمیت ارائه کرد و اثرات افت فشار و حرارت را مورد بررسی قرار داد. در تحقیق مارتینی دمای محفظه گرم و سرد با بررسی اثرات افت دما در گرم‌کن و خنک‌کن، مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج حاصله از مدل مارتینی برای موتور GPU3، نسبت به نتایج آزمایشگاهی حدود

بسیار درصد خطا داشته است. در مدل‌های مرتبه دو، موتور به چندین محفظه تقسیم شده و معادلات دیفرانسیلی انرژی و حرارت بر روی محفظه‌ها بسط داده شده و سپس این دسته معادلات حل می‌شوند. اولین مدل مرتبه دو، توسط فینکلستین در سال 1960 ارائه شده است [10]. در این مدل محفظه‌های تراکم و انبساط به صورت کاملاً آدیباتیک و گرم‌کن و خنک‌کن به صورت هم‌دما در نظر گرفته شده‌اند. اورلی و برکوویچ [10]، مدلی آدیباتیک ارائه کردند که از مدل ارائه شده توسط فینکلستین پیشرفته‌تر بود. در این مدل، معادلات دیفرانسیلی حاکم بر محفظه‌ها به وسیله روش رنگ-کوتا حل شد. بعدها اوریلی و برکوویچ [10] به‌منظور بهبود پیش‌بینی حل عددی، روشی به نام روش ساده را ارائه کردند که در آن اثرات غیر ایده‌آل بودن گرم‌کن و خنک‌کن در نظر گرفته شده بود. در این روش، مبدل‌ها هم‌دما در نظر گرفته شده بودند اما مقدار دمای آن‌ها با استفاده از روابط انتقال حرارت تصحیح شده بود. عباس و همکاران [11]، مدلی شبیه به مدل ساده را با در نظر گرفتن اثرات غیر ایده‌آل بودن بازیاب مورد ارزیابی قرار داد. در این مدل، بازیاب به دو محفظه تقسیم شد و اثرات انواع اتلاف موجود در موتور استرلینگ مورد بررسی قرار گرفت. استراوس و دوسن [12]، مدل دیگری با استفاده از مدل ساده ارائه کردند که در آن اثرات اتلاف کار و همچنین اتلاف حرارتی در موتور که توسط اوریلی اشاره شده بود، در نظر گرفته شد. تلی و همکاران [13]، مدل مرتبه دو آدیباتیکی جدید ارائه کردند که در آن اثرات اتلاف‌های حرارتی و افت فشار در هریک از اجزا مورد توجه قرار گرفته بود. افت‌های در نظر گرفته شده شامل افت فشار در مبدل‌ها، اتلاف در بازیاب و سایر اتلافات است. اسکولز و اسچوندینگ [14]، مدلی ریاضی به‌منظور شبیه‌سازی موتور استرلینگ ارائه کردند. در این تحقیق از نتایج آزمایشگاهی جی پی یو-13 استفاده شد و تطابق بهتری بین مدل ریاضی و نتایج آزمایشگاهی نسبت به نتایج گذشته دیده شد. اسکولز و اسچوندینگ [14]، مدلی ریاضی دیگری ارائه کردند که در آن اثرات افت فشار و افت انتقال حرارت از مبدل‌ها مورد ارزیابی قرار گرفت. محکوموف و اینگهام [15]، محفظه‌های کاری را با در نظر گرفتن افت‌های مکانیکی برای یک موتور یک کیلووات خورشیدی، مورد تحلیل قرار دادند. در این مدل، اثر افت‌های هیدرولیکی و انتقال حرارت در تمام محفظه‌ها به وسیله یک روش ریاضی مرتبه 2 مورد ارزیابی قرار گرفت. اتائر و کارابالوت [16]، مدلی ریاضی به‌منظور تحلیل موتور استرلینگ V شکل، ارائه کردند که شامل افت فشار نیز است. در این تحقیق، تحلیل موتور با نوشتن معادلات جرم و انرژی در چهل حجم کنترل انجام شده است. کارا لوت [17]، مدل خود را با افزودن معادلات سینماتیکی به تحلیل موتور استرلینگ توسعه داد. اندرسون و همکاران [18]، به‌وسیله معادلات دیفرانسیلی جرم و انرژی مدلی با سیزده حجم کنترل به‌منظور تحلیل موتور استرلینگ ارائه کردند. مرتاج و همکاران [19]، به کمک تحلیل انرژی و آنتروپی و آگزروی، به بررسی ترمودینامیکی موتور استرلینگ پرداختند. این تحلیل با تقسیم موتور به سه محفظه هم‌دما انجام شده است. در پایان اثرات حجم مرده بازیاب بر راندمان انرژی و آگزروی مورد ارزیابی قرار گرفته است. بلنک و وو [20]، به تحلیل ترمودینامیکی موتور استرلینگ پرداخته و اثرات بازگشت‌ناپذیری را بر روی این سیکل مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق، شرایط مورد نیاز به‌منظور دستیابی به قدرت و راندمان بهینه به‌وسیله روش ترمودینامیک وابسته به زمان مورد بررسی قرار گرفت. اربای و یاووز [21]، راندمان موتور استرلینگ را در شرایط



شکل 1 طرحی شماتیک از محفظه‌های مورد بررسی در موتور استرلینگ

این نواحی را به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیلی ارائه نموده و با استفاده از روش‌های حل عددی مانند رانگ-کوتای مرتبه 4 که از رایج‌ترین روش‌های حل معادلات دیفرانسیلی است، برای حل این دستگاه بهره می‌گیریم. در ابتدا لازم است توضیحی در مورد بخش‌های مورد بررسی و نحوه انجام فرآیندها، ارائه گردد. در تحلیل پلی تروپیک به کمک روابطی ترمودینامیکی و با بهره‌گیری از ضریب پلی تروپیک به صورت دیفرانسیلی، میزان اتلاف حرارتی از محفظه‌های کاری موتور لحاظ می‌گردد. در این مدل، انتقال حرارت مؤثر در بخش مبدل‌های حرارتی محفظه گرم و سرد و بازیاب اتفاق بیفتد. همچنین سیال عامل با عبور از روی مبدل‌های حرارتی به دمای ثابت و مشخصی می‌رسند که در طول سیکل ثابت می‌ماند. به‌طور مثال با عبور گاز هلیوم (که به‌عنوان سیال عامل در نظر گرفته می‌شود) از روی مبدل حرارتی منبع گرم همواره دمای گاز خروجی از این محفظه به دمای  $T_h$  می‌رسد. همچنین انتقال حرارت بین بازیاب با محیط اطراف وجود ندارد. علاوه بر این موارد می‌توان به صرف نظر کردن از افت‌های اصطکاکی، پمپی و ضریب انتقال حرارت جابجایی نیز اشاره نمود. به‌منظور تهیه مدل دیفرانسیلی از موتور استرلینگ، حجم کنترلی به صورت شکل 2 در نظر می‌گیریم. معادله بالانس انرژی به صورت رابطه (1) می‌باشد:

$$Q_{polytropic} + Q_{shuttle} + (m_i C_{p,i} T_i - m_o C_{p,o} T_o) = dW + C_v d(mT) \quad (1)$$

معادله گاز ایده‌آل و دیفرانسیل آن به صورت روابط (2) و (3) می‌باشد:

$$PV = MRT \quad (2)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dm}{m} + \frac{dT}{T} \quad (3)$$

معادله بالانس جرمی و دیفرانسیل آن به صورت روابط (4) تا (6) قابل بیان می‌باشد:

$$M = m_c + m_k + m_e + m_h + m_r + m_{leak} \quad (4)$$

$$M = \frac{P}{R} \left[ \frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e} + \frac{V_r}{T_r} \right] + m_{leak} \quad (5)$$

$$M = dm_c + dm_k + dm_h + dm_e + dm_r + dm_{leak} = 0 \quad (6)$$

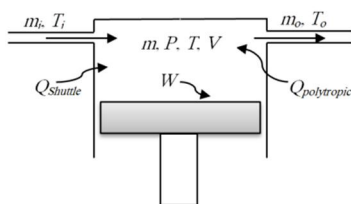
به‌منظور محاسبه میزان نشت گاز می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$m_{leak} = \pi D \frac{P + P_{buffer}}{4RT_g} \left( u_p J - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right) \quad (7)$$

برای مبدل‌های حرارتی می‌توان از روابط (7) تا (9) استفاده کرد:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dm}{m} \quad (7)$$

$$\frac{dm}{dm} = \frac{VdP}{P} = \frac{VdP}{RT} \quad (8)$$



شکل 2 طرحی شماتیک از محفظه‌های مورد بررسی در موتور استرلینگ

حداکثر توان مورد بررسی قرار دادند. در این مدل بازیاب با شرایط به نسبت واقعی‌تر مورد توجه قرار گرفت. مرتاج و همکاران [22]، موتور استرلینگ را مورد تحلیل انرژی، انرژی و آنتروپی قرار دادند. در این تحلیل، موازنه آنتروپی و انرژی در شرایط پایدار برای موتور استرلینگ نوشته شد. همچنین راندمان انرژی و تولید آنتروپی حداقل برای این موتور به دست آمد. بور [23]، موتور استرلینگ را به صورت عددی مورد بررسی قرار داد و اثرات افت حرارتی را بررسی کرد. سنفت [24]، مدلی به‌منظور بهینه‌سازی موتور استرلینگ با تکیه بر آنالیز اشمیت انجام داد. در این تحقیق، نسبت حجم بهینه و زاویه فاز برای رسیدن به حداکثر کار معرفی شد. در سال 2000 ارگان نیز در مورد بازیاب و تأثیر عوامل مختلف مانند قطر، طول و جنس مواد مورد استفاده بر عملکرد بازیاب و بازگشت‌ناپذیری‌ها و گردآیدان دمایی در بازیاب موتور استرلینگ تحقیق و به بهینه‌سازی آن پرداخت [25,26]. هارود و دیگران در سال 2009 قانون اول و دوم ترمودینامیکی را با احتساب ضریب تأثیر بازیاب و حجم مرده روی موتور مورد مطالعه قرار دادند و تأثیر آن‌ها را بر روی راندمان قانون اول و دوم بررسی نمودند [27]. یکی از روش‌های تحلیل، روش ترمودینامیک سرعت محدود است. این مفهوم اولین بار توسط پترسکو [28] مطرح شد. بعدها پترسکو به بررسی سیکل موتور استرلینگ به شیوه تحلیل پرداخت و اثرات سرعت محدود، افت فشار در مبدل‌ها و افت فشار اصطکاکی را مورد بررسی قرار داد [29]. بررسی تحقیقات گذشته نشان می‌دهد، هر یک از مدل‌های ارائه شده به‌منظور ارزیابی موتور استرلینگ به بخش خاصی از موتور تکیه کرده‌اند. از آنجایی که تمامی مدل‌های پیشین بر مبنای ساده‌سازی و فرض‌هایی بنا شده‌اند و فرایندهای کاری را به صورت ایده‌آل و آدیباتیک در نظر گرفته‌اند، لذا مدل‌های گذشته پیش‌بینی درستی از عملکرد موتور نداشته و نتایج حاصله از آن‌ها نسبت به نتایج آزمایشگاهی دارای اختلاف می‌باشند. لذا در این تحقیق سعی بر آن است که مدلی واقعی و با در نظر گرفتن اثرات تمامی اتلاف‌های موجود در موتور ارائه گردد. بدین منظور، در این مقاله موتور استرلینگ به شیوه دیفرانسیلی و با در نظر گرفتن محفظه‌های کاری به صورت پلی تروپیک مورد مدل‌سازی قرار می‌گیرد. در واقع برای اولین بار و به شیوه دیفرانسیلی، ضرایب پلی تروپیک در محفظه‌های موتور و در زوایای مختلف میل‌لنگ قابل محاسبه است. سپس اثر اتلافات حرارتی در بازیاب حرارتی و مبدل‌های گرم‌کن و خنک‌کن بررسی شده و میزان حرارت مورد نیاز موتور اصلاح می‌گردد. به‌منظور ارزیابی دقیق حرارتی از مبدل بازیاب، مدل‌های مختلف انتقال حرارت مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در مرحله بعد با محاسبه افت فشار در سه مبدل حرارتی و همچنین با بهره‌گیری از اصول ترمودینامیک سرعت محدود، فشارهای محفظه‌های مختلف موتور تصحیح می‌شود. در مرحله آخر اثرات نشت گاز، اتلاف حرارت در اثر هدایت طولی در بازیاب و اتلاف حرارتی در اثر حرکت رفت و برگشتی پیستون بین محفظه گرم و سرد محاسبه شده و راندمان نهایی محاسبه می‌شود. با توجه به تأثیر بسیار زیاد عملکرد بازیاب روی کارکرد موتور استرلینگ و توجه به وجود مدل‌های حرارتی مختلف برای بازیاب، این مدل‌های حرارتی مربوط به بازیاب در مدل پلی تروپیک توسعه داده شده آزمایش گردیده و از طریق مقایسه با نتایج آزمایشگاهی دقیق‌ترین مدل حرارتی برای بازیاب معرفی می‌گردد.

## 2- تحلیل دیفرانسیلی پایه برای مدل پلی تروپیک

در آنالیز پلی تروپیک موتور را مطابق شکل 1، به پنج ناحیه تقسیم شده و هر یک از این نواحی را به صورت جداگانه تحلیل می‌گردند. معادلات حاکم بر

حال عبارات فوق را در معادله بالانس جرم قرار می‌دهیم:

$$dm_c + dm_e + dm_{leak} + \frac{dP}{R} \left[ \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_k}{T_k} \right] = 0 \quad (25)$$

$$\frac{pdV_c + \frac{V_c dP}{\gamma} - \frac{C_n m_c}{C_p T_{ck}} dT_c + \frac{Q_{shuttle}}{T_{ck} C_p}}{\left( \frac{C_n (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)} + \frac{\frac{pdV_e + \frac{V_e dP}{\gamma} - \frac{C_n m_e}{C_p T_{he}} dT_e + \frac{Q_{shuttle}}{T_{he} C_p}}{\left( \frac{C_n (T_0 - T_e)}{C_p T_{he}} + 1 \right)} + \frac{dP}{R} \left[ \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_k}{T_k} \right] + dm_{leak}}{= 0} \quad (26)$$

نهایتاً با انجام ساده‌سازی‌های ریاضی به رابطه (27) برای فشار می‌رسیم:

$$dP = \left\{ -\gamma \left( \frac{\left[ \frac{pdV_e - \frac{RC_{ne} m_e}{C_p T_{he}} dT_e + \frac{RQ_{shuttle}}{T_{he} C_p}}{\left( \frac{C_{ne} (T_0 - T_e)}{C_p T_{he}} + 1 \right)} + \frac{\left[ \frac{pdV_c - \frac{RC_{nc} m_c}{C_p T_{ck}} dT_c - \frac{RQ_{shuttle}}{T_{ck} C_p}}{\left( \frac{C_{nc} (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)} \right]}{\left( \frac{C_{nc} (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)} \right) + Rm_{leak} \right\} \left\{ \frac{V_c}{T_{ck} \left( \frac{C_{nc} (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)} + \frac{V_e}{T_{he} \left( \frac{C_{ne} (T_0 - T_e)}{C_p T_{he}} + 1 \right)} + \gamma \left[ \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_k}{T_k} \right] \right\} \quad (27)$$

$$B_1 = \frac{C_{ne} (T_0 - T_e)}{C_p T_{he}} + 1, B_2 = \left( \frac{C_{nc} (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right) \quad (28)$$

$$dP = \left\{ -\gamma \left( \frac{\left[ \frac{pdV_e - \frac{RC_{ne} m_e}{C_p T_{he}} dT_e + \frac{RQ_{shuttle}}{T_{he} C_p}}{\left( \frac{C_{ne} (T_0 - T_e)}{C_p T_{he}} + 1 \right)} + \frac{\left[ \frac{pdV_c - \frac{RC_{nc} m_c}{C_p T_{ck}} dT_c - \frac{RQ_{shuttle}}{T_{ck} C_p}}{\left( \frac{C_{nc} (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)} \right]}{\left( \frac{C_{nc} (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)} \right) + Rm_{leak} \right\} \left\{ \frac{V_c}{T_{ck} B_2} + \frac{V_e}{T_{he} B_1} + \gamma \left[ \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_k}{T_k} \right] \right\} \quad (29)$$

با نوشتن معادله بقای انرژی برای محفظه‌های خنک‌کن، بازیاب و گرم‌کن، معادلات انتقال حرارت را برای این بخش‌ها می‌توان با استفاده از روابط (30) تا (31) بیان نمود:

$$dQ_k = \frac{V_k C_v dP}{R} + c_p (T_{ck} dm_c - T_{kr} (dm_c + dm_k)) \quad (30)$$

$$dQ_r = \frac{V_r C_v dP}{R} + c_p (T_{kr} (dm_c + dm_k) - T_{rh} (dm_c + dm_k + dm_r)) \quad (31)$$

$$dQ_h = \frac{V_h C_v dP}{R} + c_p (T_{rh} (dm_c + dm_k + dm_r) - T_{he} (-dm_e)) \quad (32)$$

برای محاسبه میزان کار تولیدی از روابط (33) تا (35) استفاده می‌کنیم:

$$dW_c = PdV_c \quad (33)$$

$$dW_e = PdV_e \quad (34)$$

$$W_{net} = \int dW_e - \int dW_c \quad (35)$$

$$dm_h = \frac{V_h dP}{RT_h}, dm_k = \frac{V_k dP}{RT_k}, dm_r = \frac{V_r dP}{RT_r} \quad (9)$$

با توجه به معادلات بالا، فرمت دیفرانسیلی قانون بقای جرم را می‌توان به صورت رابطه (10) نوشت:

$$dm_c + dm_e + dm_{leak} + \frac{dP}{R} \left[ \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_k}{T_k} \right] = 0 \quad (10)$$

میزان انتقال حرارت در فرایند پلی‌تروپیک و دیفرانسیل آن با استفاده از روابط (11) و (12) قابل بیان می‌باشد [30]:

$$Q_n = mC_n (T_0 - T_c) \quad (11)$$

$$dQ_n = mC_n (T_0 - T_c) dm - mC_n dT_c \quad (12)$$

میزان ضریب پلی‌تروپیک به صورت رابطه (13) قابل تعریف است:

$$C_n = C_v \frac{n - k}{n - 1} \quad (13)$$

برای محاسبه ضریب پلی‌تروپیک از معادله فرایند پلی‌تروپیک و دیفرانسیل‌گیری از آن استفاده می‌کنیم.

$$PV^n = \text{const}$$

$$\ln(P) + n \times \ln(V) = \ln(\text{const})$$

$$d(\ln(P) + n \times \ln(V)) = d(\ln(\text{const}))$$

$$\frac{dP}{P} + n \frac{dV}{V} = 0$$

$$n = -\frac{V dP}{P dV}$$

معادله بالانس انرژی برای محفظه تراکم را می‌توان به صورت روابط (14) تا (22) نوشت:

$$dQ = mC_n (T_0 - T_c) dm - mC_n dT_c + Q_{shuttle} - C_p m_{ck} T_{ck} = dW_c + C_v d(m_c T_c) \quad (14)$$

$$m_{ck} = dm_c \quad (15)$$

$$dW_c = pdV_c \quad (16)$$

$$C_n (T_0 - T_c) dm_c - mC_n dT_c + Q_{shuttle} + C_p T_{ck} dm_c = pdV_c + C_v d(m_c T_c) \quad (17)$$

$$C_n (T_0 - T_c) dm_c - mC_n dT_c + Q_{shuttle} + C_p T_{ck} dm_c = pdV_c + C_v d\left(\frac{PV_c}{R}\right) \quad (18)$$

$$C_n (T_0 - T_c) dm_c - mC_n dT_c + Q_{shuttle} + C_p T_{ck} dm_c = p \left( 1 + \frac{C_v}{R} \right) dV_c + \frac{C_v}{R} V_c dP \quad (19)$$

$$\frac{C_n}{C_p} (T_0 - T_c) dm_c - \frac{mC_n}{C_p} dT_c + \frac{Q_{shuttle}}{C_p} + T_{ck} dm_c = \frac{pdV_c}{R} + \frac{C_v}{RC_p} V_c dP \quad (20)$$

$$\frac{C_n}{C_p} (T_0 - T_c) dm_c - \frac{mC_n}{T_{ck} C_p} dT_c + \frac{Q_{shuttle}}{T_{ck} C_p} + dm_c = \frac{pdV_c}{RT_{ck}} + \frac{1}{R\gamma T_{ck}} V_c dP \quad (21)$$

$$dm_c \left( \frac{C_n (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right) + \frac{C_n m_c}{C_p T_{ck}} dT_c + \frac{Q_{shuttle}}{T_{ck} C_p} = \frac{pdV_c}{RT_{ck}} + \frac{V_c}{R\gamma T_{ck}} dP \quad (22)$$

$$dm_c = \frac{\frac{pdV_c + \frac{V_c dP}{\gamma} - \frac{C_n m_c}{C_p T_{ck}} dT_c + \frac{Q_{shuttle}}{T_{ck} C_p}}{\left( \frac{C_n (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)}}{\quad} \quad (23)$$

به طریقی مشابه و برای محفظه انبساط داریم:

$$dm_e = \frac{\frac{pdV_e + \frac{V_e dP}{\gamma} - \frac{C_n m_e}{C_p T_{he}} dT_e + \frac{Q_{shuttle}}{T_{he} C_p}}{\left( \frac{C_n (T_0 - T_e)}{C_p T_{he}} + 1 \right)}}{\quad} \quad (24)$$

## 3- بررسی اثرات بازیاب و مبدل‌های غیر ایده‌آل

آنالیز آدیاباتیکی یکی از رایج‌ترین روش‌ها برای تحلیل موتور استرلینگ است. اما در این تحلیل تأثیرات بازیابی ناقص و افت فشار در مبدل‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. بازیاب ایده‌آل، بازیابی است که در بخشی از سیکل حرارت را از سیال عامل دریافت و در مرحله بعد تمام این حرارت به سیال بازپس دهد. از آنجایی که این امر مستلزم حجم و سطح تبادل حرارت بی‌نهایت و زمان نامحدود است، بازیاب ایده‌آل وجود فیزیکی ندارد و در عمل بازیاب‌ها با افت‌هایی مواجه هستند. بنابراین برای بازیاب پارامتر ضریب تأثیر بازیاب را در نظر می‌گیرند که در این جا به شکل رابطه (36) تعریف می‌گردد [10]:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{m c_p}{h A_{wg}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{NTU}} = \frac{NTU}{1 + NTU} \quad (36)$$

همچنین برای مبدل‌های حرارتی این موضوع صادق است. بنابراین در ادامه این تحلیل برای نزدیک شدن مدل حاضر به مدل‌های واقعی از تحلیل دیگری با نام تحلیل ساده استفاده می‌گردد که در آن می‌توان ضریب تأثیر بازیاب و مبدل‌های حرارتی گرم و سرد را در نظر گرفت. در این تحلیل با توجه به این‌که بازیاب قادر به ارائه تمام حرارت جذب شده نخواهد بود، پس مقدار حرارت انتقال یافته از منبع گرم به سیال عامل به صورت رابطه (37 الف) افزایش می‌یابد [10]:

$$Q_H = Q_h + Q_r(1 - \varepsilon_r) \quad (37 \text{ الف})$$

که در آن  $Q_h$  و  $Q_r$  به ترتیب حرارت دریافت شده از منبع گرم در تحلیل ایده‌آل و حداکثر حرارت جذب شده توسط بازیاب در یک سیکل می‌باشند. همچنین حرارت دفع شده نیز به صورت رابطه (37 ب) افزایش می‌یابد (حرارت دفع شده از موتور با علامت منفی در نظر گرفته شده است):

$$Q_K = Q_k + Q_r(1 + \varepsilon_r) \quad (37 \text{ ب})$$

که در آن  $Q_k$  حرارت دفع شده توسط موتور به منبع سرد در تحلیل ایده‌آل است. به منظور ارزیابی دقیق انتقال حرارت در بازیاب موتور، از می‌توان از ضرایب انتقال حرارت زیر بهره برد.

ارگون برای محاسبه انتقال حرارت در بازیاب رابطه (38 الف) را پیشنهاد کرد [31]:

$$St = 0.33 Re^{0.67} Pr^{0.33} \quad (38 \text{ الف})$$

کیز و لندون رابطه (38 ب) را برای محاسبه انتقال حرارت در مبدل‌های فشرده مورد استفاده قرار دادند [32]:

$$St = 0.46 \frac{Re^{-0.4}}{Pr} \quad (38 \text{ ب})$$

ارگان، تحلیل دقیقی در ارتباط با انتقال حرارت در بازیاب انجام داد و رابطه (38 ج) را پیشنهاد کرد [25]:

$$St = 0.023 Re^{-0.2} Pr^{-0.6} \quad (38 \text{ ج})$$

با محاسبه ضریب انتقال حرارت در بازیاب، تعداد واحدهای انتقال حرارت از رابطه (39) قابل محاسبه است:

$$NTU = \frac{St A_{wg}}{A} \quad (39)$$

برای معادلات (37 الف) و (37 ب) با داشتن ضرایب انتقال حرارت جابجایی و سطح انتقال حرارت بین گاز و مبدل‌های حرارتی، می‌توان روابط (40 الف) و (40 ب) را ارائه داد:

$$Q_h + Q_{r,loss} = h_h A_h (T_{wh} - T_h) / f \quad (40 \text{ الف})$$

$$Q_k - Q_{r,loss} = h_k A_k (T_{wk} - T_k) / f \quad (40 \text{ ب})$$

که در آن  $h_k$  و  $h_h$  به ترتیب ضرایب انتقال حرارت منابع گرم و سرد،  $A_h$  و

$A_k$ ، سطوح انتقال حرارت در گرم‌کن و خنک‌کن،  $T_{wh}$  و  $T_{wk}$  دمای دیواره مبدل‌ها و  $f$  فرکانس دوران میل‌لنگ می‌باشند. همچنین  $Q_{r,loss}$  با استفاده از رابطه (41) به دست می‌آید:

$$Q_{r,loss} = (1 - \varepsilon_r)(Q_{r,max} - Q_{r,min}) \quad (41)$$

که در آن  $Q_{r,max}$  و  $Q_{r,min}$  به ترتیب حداکثر و حداقل انرژی جذب شده توسط بازیاب در طول یک سیکل را نشان می‌دهند. بنابراین دمای گاز در مبدل‌های حرارتی گرم‌کن و خنک‌کن به ترتیب با استفاده از روابط (42 الف) و (42 ب) قابل ارائه هستند:

$$T_h = T_{wh} - (Q_k + Q_{r,loss}) / h_h A_h \quad (42 \text{ الف})$$

$$T_k = T_{wk} - (Q_k - Q_{r,loss}) / h_k A_k \quad (42 \text{ ب})$$

با توجه به معادلات (42 الف) و (42 ب) که نشان دهنده این موضوع هستند که دمای گاز عامل پائین‌تر از مقداری است که قبل از این فرض گردیده بود، دوباره سیکل را با آنالیز آدیاباتیکی تحلیل می‌نماییم. برای محاسبه افت فشاری در مبدل‌های حرارتی از رابطه (43) استفاده می‌شود [10]:

$$\Delta P = \frac{-2 C_{ref} \mu u V}{d^2 A} \quad (43)$$

که در آن  $\mu$  لزجت سیال،  $u$  سرعت سیال حین عبور از مبدل،  $V$  حجم مبدل،  $d$  قطر هیدرولیکی مبدل و  $A$  سطح مقطع مبدل می‌باشند و  $C_{ref}$  به شکل رابطه (44) تعریف می‌شود.

$$C_{ref} = Re C_f \quad (44)$$

که  $Re$  عدد رینولدز و  $C_f$  ضریب اصطکاک است که برای مبدل‌های حرارتی فشرده به شکل رابطه (45) ارائه می‌گردد [10].

$$\begin{aligned} Re < 2000 & C_{ref} = 16 \\ 2000 < Re < 4000 & C_{ref} = 7.434 \times 10^{-4} Re^{1/3142} \\ Re > 4000 & C_{ref} = 7.434 \times 10^{-4} Re^{1/3142} \end{aligned} \quad (45)$$

برای محاسبه میزان اتلاف کار در اثر افت فشار از رابطه (46) استفاده می‌کنیم:

$$W_{loss} = \int_{\theta=0}^{\theta=360} \sum \Delta P dV_e = \int_{\theta=0}^{\theta=360} \sum \Delta P \frac{dV_e}{d\theta} d\theta \quad (46)$$

## 4- بررسی اثر ترمودینامیک سرعت محدود

علاوه بر افت فشاری که در مبدل‌های حرارتی موتور وجود دارد، بر اساس اصول ترمودینامیک سرعت محدود (FST) و به دلیل سرعت لحظه‌ای پیستون، فشار در پشت پیستون در محفظه تراکم و انبساط از فشار سیال عامل متفاوت است. منشأ تفاوت روش ترمودینامیک سرعت محدود، در نظر گرفتن بازگشت‌ناپذیری‌های داخلی است. مثلاً در یک سیستم سیلندر و پیستون، در شیوه سرعت محدود فشار روی پیستون با فشار گاز موجود در سیلندر به دلیل بازگشت‌ناپذیری‌های موجود متفاوت است. در طی فرآیند تراکم، فشار روی پیستون از فشار در تمامی نقاط دیگر سیستم بیشتر است و همچنین در طی فرآیند انبساط فشار روی پیستون از فشار سایر نقاط سیستم کمتر می‌شود. بنابراین در تحلیل ترمودینامیک با سرعت محدود ما به دو فشار متفاوت نیازمندیم. بر این اساس در محفظه انبساط و تراکم فشار پشت پیستون به ترتیب کمتر و بیشتر از فشار سیکل است. در نتیجه کار انبساطی کاهش و کار تراکمی افزایش می‌یابد. بر مبنای اصول FST، قانون اول ترمودینامیک به صورت رابطه (47) قابل بیان است [28]:

$$dU = \delta Q - P_m \left( 1 \pm \frac{aw}{c} \pm \frac{f \Delta P_f}{P_{m,i}} \right) dV \quad (47)$$

در رابطه فوق علامت منفی برای محفظه انبساط و علامت مثبت برای محفظه تراکم است.  $f$  ضریبی در ارتباط با میزان بازگشت‌پذیری بوده و بین 0 برای

حرارتی پیستون جابجاکننده، قطر جابجاکننده، فاصله سیلندر-پیستون و طول جابجاکننده است. با توجه به این که روش مدل‌سازی مورد نظر به شیوه عددی است، لذا از عبارت فوق نسبت به زمان (و یا زاویه) دیفرانسیل‌گیری می‌کنیم و لذا به رابطه (55) می‌رسیم:

$$dQ_{P-shuttle} = \frac{0.4S^2 k_{pis} D_d}{g L_d} (dT_e - dT_c) \quad (55)$$

### 6- بررسی اثر نشت گاز

به دلیل اختلاف فشار محفظه تراکم و انبساط، مقداری گاز از فاصله بین سیلندر و پیستون خارج می‌شود. این خروج جرم گاز به دلیل افت فشار موجب کاهش حجم سیال عامل و به تبع آن کار خروجی می‌شود. اگر  $P_a$  و  $P_b$  فشار گاز در دو طرف پیستون،  $T_g$  دمای گاز،  $g$  فاصله بین سیلندر-پیستون و  $u$  سرعت پیستون باشد، مقدار جرم گاز خروجی به صورت رابطه (56) قابل محاسبه می‌شود [35]:

$$m_{leak} = \pi D \frac{P + P_{buffer}}{4RT_g} \left( u_{pJ} - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right) \quad (56)$$

از آنجایی که شیوه مدل‌سازی مورد نظر به صورت دیفرانسیلی است، لذا از معادله فوق دیفرانسیل می‌گیریم:

$$dm_{leakage} = \pi D \times d \left[ \frac{P + P_{buffer}}{4RT_g} \right] \times \left( u_{pJ} - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right) + d \left[ u_{pJ} - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right] \times \pi D \frac{P + P_{buffer}}{4RT_g} \quad (57)$$

$$dm_{leakage} = \frac{\pi D dP}{4RT_g} \left( u_{pJ} - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right) - \frac{\pi D (P + P_{buffer}) dT_g}{4R T_g^2} \left( u_{pJ} - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right) - \frac{\pi D (P + P_{buffer}) J^3 dP}{24R T_g \mu L} \quad (58)$$

### 7- روش حل

پس از تهیه مدل دیفرانسیلی پلی تروپیک، به منظور حل معادلات دیفرانسیل حاکم، از روش رونگ کوتاه استفاده می‌کنیم. مجموعه معادلات که باید با روش رونگ-کوتا حل شوند در جدول 1 نشان داده شده است. همچنین روش حل در شکل 3 نشان داده شده است.

جدول 1 مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل پلی تروپیک

$M = \left\{ \frac{P \left( \frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e} \right)}{R} \right\} + \left\{ \pi D \frac{P + P_{buffer}}{4RT_g} \left( u_{pJ} - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right) \right\}$	$\begin{aligned} m_{ck} &= -dm_c \\ \dot{m}_{kr} &= \dot{m}_{ck} - dm_k \\ \dot{m}_{rh} &= \dot{m}_{he} - dm_h \end{aligned}$
$dP = \frac{-\gamma \left( \frac{[PdV_c - RCncmc dT_c - RQ_{shuttle}]}{T_{ck} C_p T_{ck}} + \frac{[PdV_e - RCncmc dT_e - RQ_{shuttle}]}{C_p T_{he}} \right)}{\frac{V_c}{T_{ck} B_1} + \frac{V_e}{T_{he} B_2} + \left[ \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right]} + R m_{leak}$ $B_1 = \left[ \left( \frac{C_{ne}}{C_p} \right) \left( \frac{T_0 - T_e}{T_{he}} \right) + 1 \right], B_2 = \left[ \left( \frac{C_{ne}}{C_p} \right) \left( \frac{T_0 - T_c}{T_{ck}} \right) + 1 \right]$	$\begin{aligned} dT_c &= T_c \left( \frac{dP}{P} + \frac{dV_c}{V_c} - \frac{dm_c}{m_c} \right) \\ dT_e &= T_e \left( \frac{dP}{P} + \frac{dV_e}{V_e} - \frac{dm_e}{m_e} \right) \end{aligned}$
$dQ_k = \frac{V_k c_v dP}{R} + c_p (T_{ck} dm_c - T_{kr} (dm_c + dm_k))$ $dQ_r = \frac{V_r c_v dP}{R} + c_p (T_{kr} (dm_c + dm_k) - T_{rh} (dm_c + dm_k + dm_r))$ $dQ_h = \frac{V_h c_v dP}{R} + c_p (T_{rh} (dm_c + dm_k + dm_r) - T_{he} (-dm_e))$	<p>معادلات انرژی</p> <p>معادلات پیوستگی</p> <p>معادلات جرم</p> <p>معادلات حرارت</p>

جدول 1 مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل پلی‌تروپیک (ادامه)

$m_i = \frac{PV_i}{RT}, i = c, k, r, h, e$	$dW_c = PdV_c$	معادلات کار
$m_{leak} = \pi D \frac{P + P_{buffer}}{4RT} \left( u_{pl} - \frac{J^3 P - P_{buffer}}{6\mu L} \right)$	$dW_e = PdV_e$	
$dm_e = \frac{\frac{pdV_e + \frac{V_e dP}{\gamma}}{RT_{he}} - \frac{C_n m_e}{C_p T_{he}} dT_e + \frac{Q_{shuttle}}{T_{he} C_p}}{\left( \frac{C_n (T_0 - T_e)}{C_p T_{he}} + 1 \right)},$	$dm_c = \frac{\frac{pdV_c + \frac{V_c dP}{\gamma}}{RT_{ck}} - \frac{C_n m_c}{C_p T_{ck}} dT_c + \frac{Q_{shuttle}}{T_{ck} C_p}}{\left( \frac{C_n (T_0 - T_c)}{C_p T_{ck}} + 1 \right)},$	معادلات انرژی
$dm_i = m_i \frac{dP}{P}, i = k, r, h$		

8- نمونه آزمایشگاهی مورد مطالعه

به منظور ارزیابی مدل مورد نظر، از داده‌های مربوط به موتور GPU3 استفاده می‌کنیم. این موتور در سال 1965 توسط آزمایشگاه تحقیقاتی جنرال موتور آمریکا، به عنوانی موتوری 3 کیلوواتی ساخته شده است. موتور GPU3 موتوری از نوع بتا است که پیستون قدرت و جایجا کننده در یک سیلندر واقع شده است. حرکت دو پیستون در این موتور بر مبنای مکانیزم رومبیک است. گرم‌کن و خنک‌کن از نوع مبدل‌های فشرده می‌باشند. مشخصات این موتور در جدول 2 نشان داده شده است.

جدول 2 مشخصات موتور GPU-3 [9]

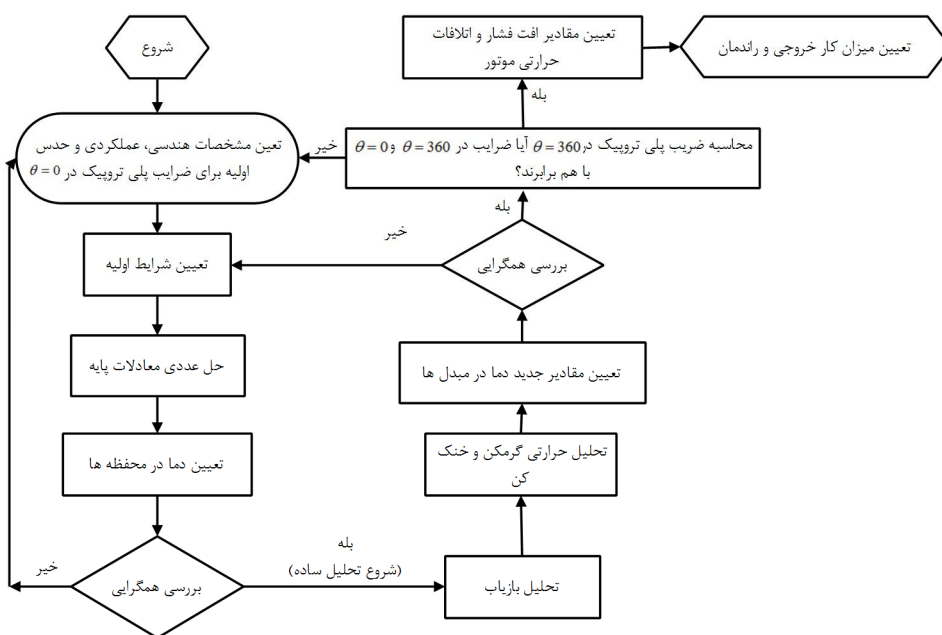
اطلاعات کلی	پیکربندی موتور	یک سیلندر rhombic
	سیال عامل	هیدروژن، هلیوم
	کورس حرکت پیستون	31/2 میلی‌متر
	قطر داخلی سیلندر	69/9 میلی‌متر
مشخصات گرم‌کن، خنک‌کن	طول متوسط لوله‌ها	245/3 (46/1) میلی‌متر
	طول لوله‌ها سمت سیلندر	116/4 میلی‌متر
	طول لوله‌ها سمت بازیاب	128/9 میلی‌متر
	قطر داخلی لوله‌ها	3/02 (1/09) میلی‌متر
	قطر خارجی لوله‌ها	4/83 (1/59) میلی‌متر
	تعداد لوله‌ها	40(312) عدد
مشخصات بازیاب	قطر داخلی بازیاب	22/6 میلی‌متر
	طول بازیاب	22/6 میلی‌متر
	تعداد (قطر لوله) بازیاب	8 (0/04 میلی‌متر)

9- نتیجه و بحث

9-1- صحت سنجی مدل ارائه شده

مقایسه بین نتایج حاصل از مدل ارائه شده در این مقاله و نتایج آزمایشگاهی و تحقیقات گذشته در جدول 3 نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد نتایج حاصله از مدل انتقال حرارت ارگان دارای خطای کمتری نسبت به مدل‌های انتقال حرارت دیگر است. همچنین مقایسات نشان می‌دهد که مدل پلی‌تروپیک در مقایسه با سایر روش‌ها و تحقیقات، مطابقت بسیار بهتری با نتایج آزمایشگاهی موجود دارد. نتایج نشان می‌دهد، مدل جدید در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی توان خروجی را با خطایی به میزان 0/9 درصد و راندمان را با خطایی به میزان 3/14 درصد را پیش‌بینی می‌نماید.

در جدول 4 نتایج مدل جدید پلی‌تروپیک با مدل آدیباتیک که جزء معروف‌ترین روش‌ها است مقایسه شده است. این جدول در حالت کلی، بیان می‌کند که خطای پیش‌بینی راندمان حرارتی و توان در مدل پلی‌تروپیک کمتر از مدل آدیباتیک است. مقایسه تغییرات راندمان و توان در مدل‌های مختلف انتقال حرارت (آرگون، کیز و ارگان) نشان می‌دهد در تمامی مدل‌ها، خطای پیش‌بینی راندمان، با افزایش مقدار فشار متوسط سیکل، کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج جدول 4 می‌توان گفت میزان خطای پیش‌بینی مدل با افزایش فرکانس موتور و فشار متوسط سیکل، کاهش می‌یابد.



شکل 3 مراحل انجام تحلیل پلی‌تروپیک

جدول 3 مقایسه نتایج حاصل از مدل پلی‌تروپیک با نتایج و تحقیقات گذشته (سیال عامل هلیوم در فشار 4/14 مگاپاسکال و فرکانس 41/67)

مدل	مدل آدیباتیک	مدل ساده [10]	مدل تیمونی [34]	مدل آدیباتیک همراه با اتلافات	مدل حاضر همراه با:		نتایج
	ایده‌آل			مدل ارگان برای بازیاب [25]	مدل کیز و لوندن برای بازیاب [32]	مدل ارگون برای بازیاب [32]	آزمایشگاهی [36]
	مقدار	مقدار	مقدار	مقدار	مقدار	مقدار	
	خطا (%)	خطا (%)	خطا (%)	خطا (%)	خطا (%)	خطا (%)	
راندمان	62/3	52/5	38/5	28/4	39/28	20/65	21/3
توان (kW)	8/30	6/70	4/27	3/62	4/759	41/17	3/0

جدول 4 مقایسه نتایج حاصل از مدل پلی‌تروپیک با مدل آدیباتیک در فشارها و فرکانس‌های مختلف (سیال عامل هلیوم)

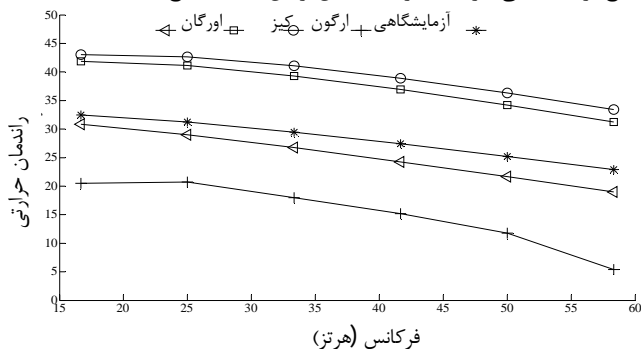
نتایج	مدل حاضر همراه با:						مدل آدیباتیک همراه با اتلافات						فرکانس (هرتز)	فشار متوسط (مگاپاسکال)
	مدل ارگون برای بازیاب [31]		مدل کیز و لوندن برای بازیاب [32]		مدل ارگان برای بازیاب [25]		اتلافات		اتلافات		اتلافات			
	میانگین	خطا	میانگین	خطا	میانگین	خطا	میانگین	خطا	میانگین	خطا	میانگین	خطا		
آزمایشگاهی [36]	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)		
20/5		22/56	43/06	21/39	41/89	10/36	30/86	11/98	32/48	16/67	2/76			
20/7		21/97	42/67	20/43	41/13	8/30	29/00	10/51	31/21	25/00	2/76			
18		23/09	41/09	21/31	39/31	8/74	26/74	11/45	29/45	33/33	2/76			
15/2	23/97	23/69	38/89	22/19	21/74	9/98	24/26	12/85	27/45	41/67	2/76			
11/8		24/51	36/31	22/42	34/22	9/86	21/66	13/41	25/21	50/00	2/76			
5/4		28/01	33/41	25/85	31/25	13/57	18/97	17/49	22/89	58/33	2/76			
24/8		20/97	45/77	18/85	43/65	4/55	29/35	7/49	32/29	25/00	4/14			
23/9		20/19	44/09	17/76	41/66	3/00	26/90	6/50	30/40	33/33	4/14			
21/3	21/58	20/65	41/95	18/98	17/98	4/37	24/44	8/28	28/39	41/67	4/14			
18/2		21/30	39/50	18/47	36/67	3/76	21/96	8/13	26/33	50/00	4/14			
12		24/80	36/80	21/85	33/85	7/39	19/39	12/21	24/21	58/33	4/14			
22/5		20/89	43/39	17/67	40/17	1/50	24/00	6/09	28/59	41/67	5/52			
18/8	22/43	22/20	41/00	19/04	18/79	3/07	21/58	8/11	26/62	50/00	5/52			
14/2		24/21	38/41	20/67	34/87	4/94	19/14	10/42	24/62	58/33	5/52			
18/7	24/09	23/10	41/80	19/22	37/92	2/45	21/15	7/91	26/61	50/00	6/90			
14/2		25/08	39/28	21/04	35/24	4/55	18/75	9/19	24/67	58/33	6/90			

منحنی تغییرات فشار داخل محفظه بر حسب تغییرات حجم مربوط به محفظه تراکم و انبساط مربوط به مدل پلی‌تروپیک و با استفاده از داده‌های ورودی موتور GPU-3 در شکل 5 نشان داده شده است. توزیع افت فشار در مبدل‌های گرم‌کن، خنک‌کن و بازیاب برحسب زاویه دوران میل‌لنگ در شکل 6 نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد، افت فشار اصطکاکی در مبدل بازیاب بیشترین سهم را در افت فشار کلی و اتلاف کار دارد. مقایسه مقادیر افت فشار در گرم‌کن و خنک‌کن نشان می‌دهد، میزان افت فشار در گرم‌کن به میزان 50 درصد بیشتر از افت فشار در خنک‌کن است.

منحنی تغییرات افت فشار در اثر اعمال اثرات سرعت محدود پیستون بر حسب زاویه میل‌لنگ در شکل 7 نشان داده شده است. این افت فشار در واقع اختلاف میان فشار پشت پیستون و فشار محفظه کاری است که به افت فشار ترمودینامیک سرعت محدود معروف است. نتایج نشان می‌دهد که میزان فشار ناشی از اثرات ترمودینامیک سرعت محدود در محفظه انبساط کمتر از محفظه تراکم است. این اختلاف به این دلیل است که میزان افت فشار ناشی از اثرات سرعت محدود با مقدار دما نسبت عکس دارد. از آنجایی که دما در محفظه تراکم پایین‌تر از محفظه انبساط است، لذا میزان افت فشار در محفظه تراکم بیشتر است. منحنی توزیع دما در محفظه‌های کاری بر حسب تغییرات

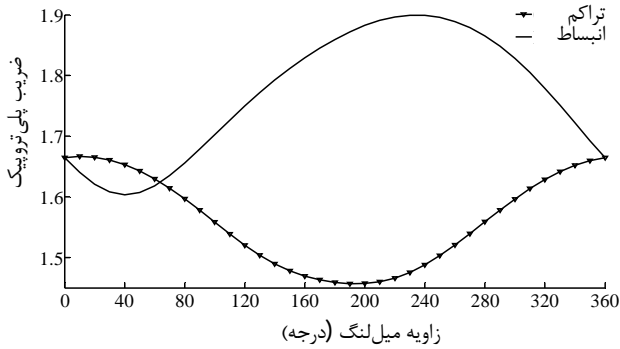
## 2-9- بررسی پیش‌بینی‌های مدل حاضر در ارتباط با نمونه تحت مطالعه

در شکل 4 منحنی تغییرات راندمان حرارتی برحسب فرکانس نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد راندمان حرارتی در مدل‌های مختلف به‌صورت نسبتاً هماهنگ با افزایش فرکانس، کاهش می‌یابد. از آنجایی که براساس محاسبات انجام شده، نتایج حاصله براساس ارگان مطابقت بیشتری نسبت به نتایج آزمایشگاهی دارد، لذا در ادامه مدل ارگان مبنای نتایج است.



شکل 4 منحنی تغییرات راندمان برحسب فرکانس در مدل‌های مختلف انتقال حرارت





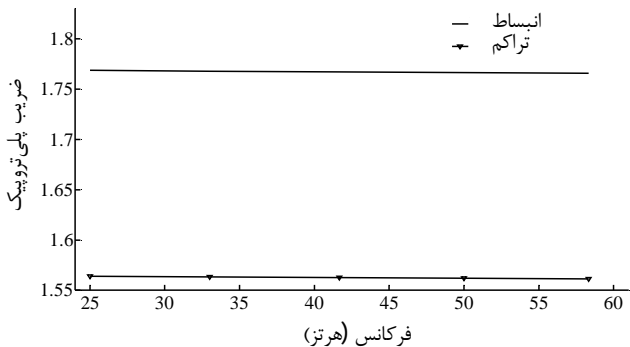
شکل 9 منحنی تغییرات ضریب پلی‌تروپیک در 41/67 هرتز و 4/14 مگاپاسکال

پلی‌تروپیک در محفظه انبساط 1/9 در زاویه 240 و کمترین آن 1/6 در زاویه 40 درجه است. در محفظه تراکم مقدار بیشینه ضریب پلی‌تروپیک 1/67 در زاویه 0 درجه و مقدار کمینه آن 1/45 در زاویه 200 درجه است.

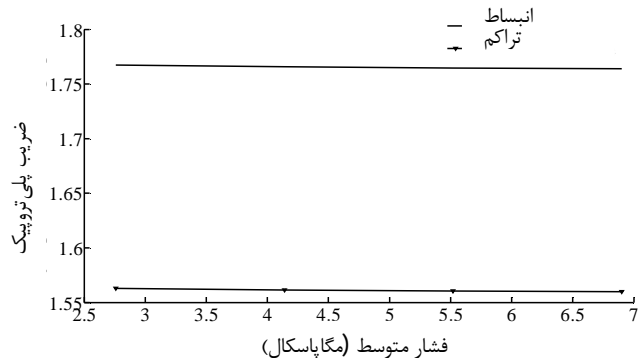
اثرات تغییر در فرکانس موتور بر ضریب پلی‌تروپیک در محفظه‌های کاری موتور در شکل 10 نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد، ضریب پلی‌تروپیک در محفظه‌های تراکم و انبساط با افزایش فرکانس موتور، کاهش می‌یابد. البته تغییرات در ضریب پلی‌تروپیک با نرخ بسیار پایینی اتفاق می‌افتد.

اثرات تغییر در فشار متوسط سیکل موتور بر ضرایب پلی‌تروپیک در محفظه‌های کاری موتور در شکل 11 نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد، ضرایب پلی‌تروپیک در مقابل افزایش در فشار متوسط سیکل، به آرامی رشد می‌کند.

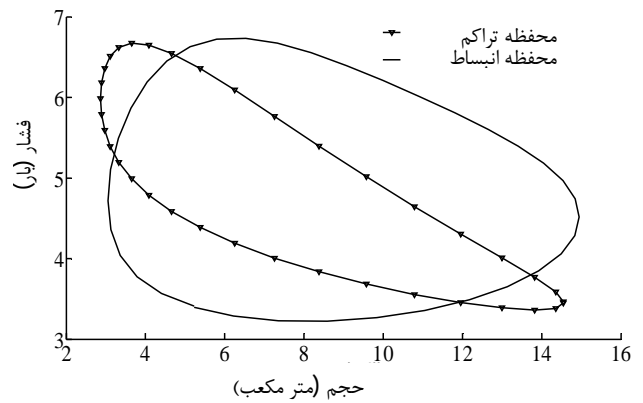
اثرات تغییرات دمای محفظه گرم‌کن بر ضرایب پلی‌تروپیک در محفظه‌های کاری موتور در شکل 12 نشان داده شده است. بر مبنای نتایج، ضرایب پلی‌تروپیک با افزایش دمای محفظه گرم‌کن، افزایش می‌یابد.



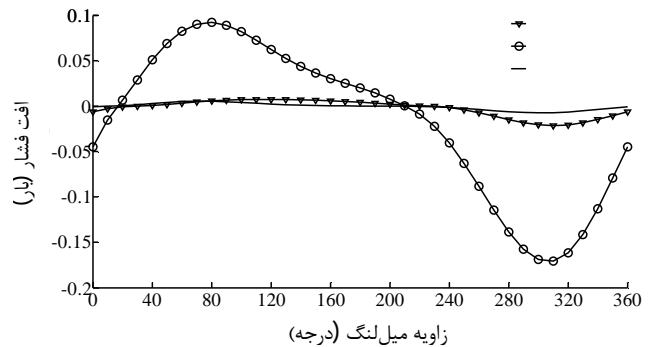
شکل 10 منحنی تغییرات ضریب پلی‌تروپیک بر حسب فرکانس در 4/14 مگاپاسکال



شکل 11 منحنی تغییرات ضریب پلی‌تروپیک بر حسب فشار در 41/67 هرتز

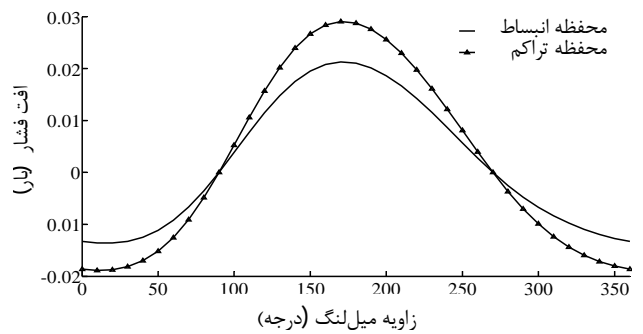


شکل 5 منحنی فشار - حجم در فشار 4/14 مگاپاسکال و فرکانس 41/67

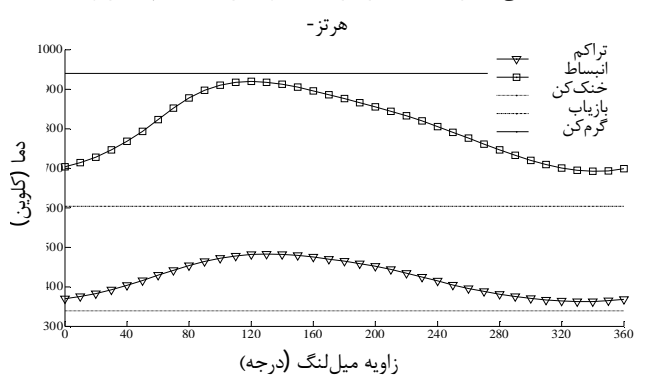


شکل 6 منحنی تغییرات افت فشار در محفظه‌ها در 4/14 مگاپاسکال و 41/67 هرتز

زاویه میل‌لنگ نیز در شکل 8 نشان داده شده است. منحنی تغییرات ضریب پلی‌تروپیک در محفظه‌های تراکم و انبساط بر حسب زاویه حرکت میل‌لنگ در شکل 9 نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد، ضریب پلی‌تروپیک در محفظه‌های کاری به صورت هارمونیک تغییر می‌کند. بیشترین مقدار ضریب



شکل 7 منحنی تغییرات افت فشار سرعت محدود در 4/14 مگاپاسکال و 41/67 هرتز



شکل 8 منحنی تغییرات دما در 4/14 مگاپاسکال و 41/67 هرتز

که مبدل بازیاب بزرگ‌ترین عامل در افت حرارتی و کار (در اثر افت فشار) در موتور است. پس از بازیاب عوامل مهم دیگر در اتلاف کار (ناشی از افت فشار) عبارتند از: اثرات سرعت محدود پیستون، اصطکاک مکانیکی، افت فشار در گرم‌کن، افت فشار در خنک‌کن، اثرات نشت گاز و اثر shuttle.

11- فهرست علائم

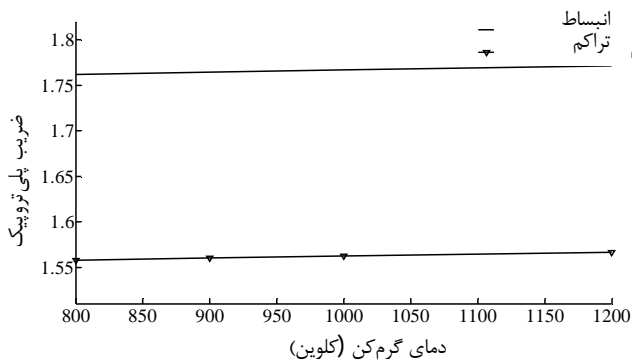
- A سطح مقطع گاز عامل (m<sup>2</sup>)
- c سرعت متوسط مولکول‌های گاز (m.s<sup>-1</sup>)
- D قطر پیستون (m)
- c<sub>n</sub> گرمای ویژه در شرایط پلی تروپیک (kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)
- c<sub>p</sub> گرمای ویژه در فشار ثابت (kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)
- c<sub>v</sub> گرمای ویژه در حجم ثابت (kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)
- d قدرت هیدرولیک (m)
- f فرکانس (Hz)
- f<sub>re</sub> ضریب اصطکاک رینولدز
- h ضریب انتقال حرارت جابجایی (W. m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup>)
- J لقی بین سیلندر و پیستون (m)
- L طول پیستون (m)
- M جرم (kg)
- NTU تعداد واحد انتقال حرارت
- P فشار (Pa)
- Pr عدد پرانتل
- Q گرما (J)
- Q<sub>n</sub> انتقال حرارت پلی تروپیک
- R ثابت جهانی گاز (kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)
- Re عدد رینولدز
- St عدد استانتون
- T دما
- u<sub>p</sub> سرعت جریان گاز (m.s<sup>-1</sup>)
- U انرژی داخلی (J)
- V حجم (m<sup>3</sup>)
- w سرعت خطی پیستون (m.s<sup>-1</sup>)
- W کار خروجی (J)

علائم یونانی

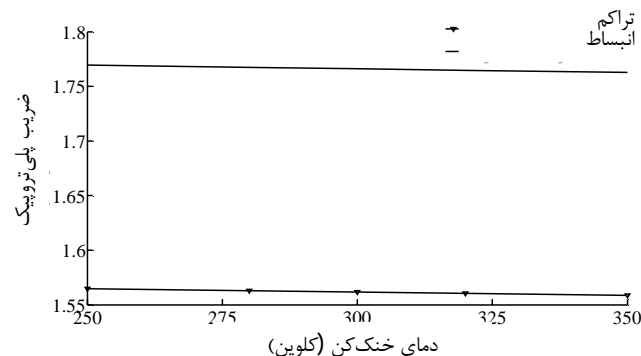
- μ ویسکوزیته (Pa.s)
- ε راندمان بازیاب
- ρ چگالی (kg.m<sup>-3</sup>)

زیرنویس‌ها

- c خنک‌کن
- ck مرز خنک‌کن و محفظه تراکم
- e محفظه انبساط
- h گرم‌کن
- he مرز گرم‌کن و محفظه انبساط
- K خنک‌کن
- Kr مرز خنک‌کن و بازیاب



شکل 12 منحنی تغییرات ضریب پلی تروپیک بر حسب دمای گرم‌کن در 41/67 هرتز و 4/14 مگا پاسکال



شکل 13 منحنی تغییرات ضریب پلی تروپیک بر حسب دمای خنک‌کن در 41/67 هرتز و 4/14 مگا پاسکال

شکل 13 نشان می‌دهد، با افزایش دما در محفظه خنک‌کن موجب کاهش ضرایب پلی تروپیک در محفظه‌های کاری موتور می‌شود.

10- نتیجه گیری

در این مقاله مدل جدیدی به منظور پیش‌بینی عملکرد موتور استرلینگ ارائه شد. در این مدل، محفظه‌های کاری برای اولین بار و برخلاف مدل‌های گذشته به صورت غیرآدیباتیک و با فرایندی پلی تروپیک در نظر گرفته شده‌اند. به کمک تحلیل پلی تروپیک، ضرایب پلی تروپیک در محفظه‌های کاری در زوایای مختلف میل‌لنگ به شیوه‌ای عددی محاسبه شده است. بدین منظور مجموعه جدیدی از معادله دیفرانسیل برای موتور استخراج گردید. علاوه بر این انواع مختلف اتلاف در موتور مورد ارزیابی قرار گرفت. برخی از این اثرات اتلاف به صورت دیفرانسیلی و برخی به صورت انتگرالی به مدل ارائه گردید. نتایج نشان می‌دهد، نتایج مدل جدید در مقایسه با نتایج مدل‌های گذشته، دقت بیشتری دارد. بر مبنای تحلیلی که در این مقاله ارائه شد، ضرایب پلی تروپیک در محفظه‌های تراکم و انبساط تعیین شدند. به منظور ارزیابی دقیق از عملکرد حرارتی بازیاب، مدل‌های انتقال حرارت ارگون، کیز و لوندون، اورگان مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد نتایج حاصله از مدل انتقال حرارت ارگان دقت بالاتری نسبت به مدل ارگون و کیز دارد. نتایج نشان دادند که متغیرهای عملکردی همانند فرکانس موتور، فشار متوسط سیکل، دمای محفظه گرم‌کن و خنک‌کن اثرات محسوسی بر ضرایب پلی تروپیک ندارند. با این متغیرهای هندسی همانند حجم در محفظه‌های کاری اثرات قابل توجهی بر ضرایب پلی تروپیک در موتور دارد. نتایج نشان داد

r بازیاب

rh مرز بازیاب و گرم‌کن

Shuttle اثر شاتل

wh دیوار گرم‌کن

wk دیوار خنک‌کن

## -12 مراجع

- [16] Ö. Ercan Ataer, H. Karabulut. Thermodynamic analysis of the V-type Stirling cycle refrigerator. *International Journal of Refrigeration*, Vol. 28, pp. 183-189, 2005.
- [17] H. Karabulut, H.S. Yücesu, C. Çınar. Nodal analysis of a Stirling engine with concentric piston and displacer. *Renewable Energy*, Vol. 31, pp. 2188-2197, 2006.
- [18] S.K. Andersen, H. Carlsen, P.G. Thomsen. Preliminary results from simulations of temperature oscillations in Stirling engine regenerator matrices. *Energy*, Vol. 31, pp. 1371-1383, 2006.
- [19] N. Martaj, L. Grosu, P. Rochelle. Thermodynamic Study of a Low Temperature Difference Stirling Engine at Steady State Operation. *International Journal of Thermodynamics*, Vol. 10, pp. 165-176, 2007.
- [20] D.A. Blank, C. Wu. Power optimization of an extra-terrestrial, solar-radiant Stirling heat engine. *Energy*, Vol. 20, pp. 523-530, 1995.
- [21] L.B. Erbay, H. Yavuz. Analysis of the Stirling heat engine at maximum power conditions. *Energy*, Vol. 22, pp. 645-650, 1997.
- [22] N. Martaj, L. Grosu, P. Rochelle. Exergetical analysis and design optimization of the Stirling engine. *International Journal of Exergy*, Vol. 3, pp. 45-67, 2006.
- [23] P.C.T. de Boer. Optimal regenerator performance in Stirling engines. *International Journal of Energy Research*, Vol. 33, pp. 813-832, 2009.
- [24] J.R. Senft. Optimum Stirling engine geometry. *International Journal of Energy Research*, Vol. 26, pp. 1087-1101, 2002.
- [25] A.J. Organ, *the Regenerator and the Stirling Engine*, Mechanical Engineering Publications Limited, London, 1997.
- [26] A.J. Organ, "Stirling's air engine a thermodynamic appreciation". *J. Mechanical Engineering Science: Part C* Vol. 214, pp. 511-536, 2000.
- [27] J. Harrod, P.J. Mago, K. Srinivasan, L.M. Chamra, First and second law analysis of a Stirling engine with imperfect regeneration and dead volume, *J. Mechanical Engineering Science: Part C*, Vol. 223, pp. 2595-2607, 2009.
- [28] S. Petrescu, M. Costea, C. Harman, T. Florea, Application of the direct method to irreversible Stirling cycles with finite speed. *International Journal of Energy Research*, Vol. 26, pp. 589-609, 2002.
- [29] S. Petrescu, M. Costea, *development of thermodynamics with finite speed and direct method*, Editura AGIR, Budapest, 2011.
- [30] *Applied Thermal Engineering Handbook, UNIT 8: RECIPROCATING COMPRESSORS*, 2011.
- [31] S. Ergun, Fluid Flow through Packed Columns, *Chemical Engineering Progress*, Vol. 48, pp. 89-94, 1952.
- [32] W.M. Kays, London A.L., *Compact Heat Exchangers. 3rd ed.* Melbourne, FL: Krieger Publishing Company, 1998.
- [33] J.B. Heywood, *Internal Combustion Engine Fundamentals*, McGraw-Hill, New York, 1988.
- [34] Y. Timoumi, I. Tlili, S.B. Nasrallah, Design and performance optimization of GPU-3 Stirling engines. *Energy*, Vol. 33, pp. 1100-1114, 2008.
- [35] A.D. Minasian, *Stirling Engines for Low-Temperature Solar-Thermal-Electric Power Generation*, PHD thesis, University of California at Berkeley, 2007.
- [36] W.R. Martini, *Stirling Engine Design Manual: Second Edition, Prepared for National Aeronautics and Space Lewis Research Center Under Grant NSG-3194, DOE/NASA/3194-1 NASA CR-168088*, 1983.
- [1] J. R. Senft, *Mechanical Efficiency of Heat Engines*, Cambridge University Press, 2007.
- [2] B. Kongtragool, S. Wongwises. Investigation on power output of the gamma configuration low temperature differential Stirling engines. *Renewable Energy*, Vol. 30, pp. 465-476, 2005.
- [3] J.I. Prieto, J. Fano, C. González, M.A. González, R. Diaz. Preliminary design of the kinematic Stirling engine using dynamic similarity and quasi-static simulation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 211, pp. 229-238, 1997.
- [4] J.I. Prieto, A.B. Stefanovskiy. Dimensional analysis of leakage and mechanical power losses of kinematic Stirling engines. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 217, pp. 917-934, 2003.
- [5] J.I. Prieto, M.A. González, C. González, J. Fano. A new equation representing the performance of kinematic Stirling engines. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 214, pp. 449-464, 2000.
- [6] J. Prieto, D. Garcia. Comparison between Kolin's cube law for power and other criteria for preliminary design of kinematic Stirling engines. *Proceeding of 12th international Stirling engine conference*, Durham UK, pp. 389- 397, 2005.
- [7] G. Walker. *Stirling engines*. Clarendon Press, 1980.
- [8] F. Toda, S. Iwamoto, K. Nagajima. Development of Low-Temperature Difference Stirling engine- Behaviour of the mechanism effectiveness for the performance prediction method. *Proceeding of 13th international Stirling engine conference*, Tokyo, pp. 49-51, 2007.
- [9] W.R. Martini. *Stirling Engine Design Manual*. Arch, 1978.
- [10] I. Urieli, D.M. Berchowitz. *Stirling cycle engine analysis*, A. Hilger, 1984.
- [11] M. Abbas, N. Said, B. Boumeddane. Thermal analysis of Stirling engine solar driven. *Revue des Energies Renouvelables*, Vol. 11, pp. 503- 514, 2008.
- [12] J.M. Strauss, R.T. Dobson. Evaluation of a second order simulation for Sterling engine design and optimisation. *Journal of Energy in Southern Africa*, Vol. 21, pp. 17-29, 2010.
- [13] I. Tlili, Y. Timoumi, S.B. Nasrallah. Analysis and design consideration of mean temperature differential Stirling engine for solar application. *Renewable Energy*, Vol. 33, pp. 1911-1921, 2008.
- [14] S. Schulz, F. Schwendig. A General Simulation Model for Stirling Cycles. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 118, pp. 1-7, 1996.
- [15] K.K. Makhkamov, D.B. Ingham. Analysis of the Working Process and Mechanical Losses in a Stirling Engine for a Solar Power Unit. *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol. 121, pp. 121-127, 1999.