

مدل سازی حرکت آب و رسوب در شکست سد به روش حجم محدود

آیدا بهارستانی^۱ و محمدعلی بنی‌هاشمی^{۲*}

^۱ دانش آموخته کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

^۲ استادیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۶/۱۱، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۸/۱۲/۱۹، تاریخ تصویب ۸۹/۲/۴)

چکیده

در این تحقیق، حرکت رسوب ناشی از شکست سد، در بستر متحرک به صورت دو بعدی، شبیه‌سازی عددی شده است. معادلات، در چارچوب روش حجم محدود منقطع شده و از شمای دو مرحله ای پیش‌بینی - اصلاح مک کورمک، برای حفظ دقت مرتبه دوم در مکان و زمان استفاده شده است. همچنین برای مهار نوسانات غیر واقعی و غیر فیزیکی از روش Component-wise TVD به علت ساده تر بودن آن نسبت به دیگر روش‌های TVD به خاطر عدم نیاز به ماتریس ژاکوبین و تجزیه مشخصه ها، استفاده شده است. در زمینه هیدرولیک بستر متحرک، باید به واکنش قوی بین جریان و رسوب و تغییرات ریختاری بستر رودخانه توجه شود. از اینرو در اینجا معادلات بقا، برای مدل‌سازی رسوب، به صورت کوپل، که به حل همزمان معادلات آب و رسوب می پردازد، نوشته شده است. برای کنترل جواب‌ها و صحت یابی مدل‌سازی، از آزمون‌های شکست سد در بستر متحرک استفاده شده که نتایج قابل قبولی به همراه داشته است.

واژه‌های کلیدی: شکست سد، بستر متحرک، رسوب، مک کورمک، Component-wise TVD

مقدمه

شماهای عددی، برای معادلات آب کم عمق، نیاز به شرایط خاصی برای خواص بقای بدست آمده و مهار شوک دارند. از جمله روش‌های مهار شوک، اضافه کردن لزجت مصنوعی است که مقداری از نوسانات را کاهش می‌دهد ولی به طور کامل آنها را از بین نمی‌برد.

این موضوع، باعث توجه بیشتر به شماهای بالادست^۲ در حل این نوع مسائل شده است. شماهای بالادست، معمولاً برای جداسازی معادلات هایدربولیک، مطابق جهت انتشار موج، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در زمینه مدل‌سازی شکست سد در حالت بدون رسوب، تعدادی از دانشمندان از روش حجم محدود استفاده کردند. از آن جمله، آلکروود و گارسیا ناوارو (۱۹۹۲)، که یک شمای نوع گادونف با دقت بالا را در روش حجم محدود برای به دست آوردن دقت مرتبه دوم، بسط دادند [۲]. تسنگ و چاو (۲۰۰۰)، شکست سد را ابتدا با روش مرتبه اول ENO و TVD و Roe شبیه‌سازی کردند و بعد مدل خود را در چارچوب روش حجم محدود توسعه دادند [۳].

همچنین لین و همکاران (۲۰۰۳)، یک الگوریتم اصلاح شده مک کورمک را با تکنیک تجزیه بردار شار، جهت حل معادلات آب های کم عمق در چارچوب روش حجم محدود به کار بردند [۴].

در بعضی موارد عملی جریان‌های بوجود آمده در کانال‌های باز، از نوع غیردائمی متغیر سریع هستند. یکی از موارد جالب و حساس این نوع جریان‌ها، سیلاب ناشی از شکست سد است.

در دهه‌های اخیر، تلاش‌ها روی مطالعه هیدرولیک شکست سد افزایش یافته است، ولی بیشتر مطالعات محاسباتی، روی بستر ثابت، بدون توجه به توانایی فرسایشی قوی جریان ناپایدار و تکامل مورفولوژیکی مربوط به آن در بستر کانال انجام شده است.

هیدرولیک شکست سد رودخانه طبیعی، در واقع پیچیده است و نه تنها شامل جریان آب، بلکه شامل انتقال رسوب ناشی از جریان و تغییرات مورفولوژیکی است که به نوبه خود بر روی جریان تاثیر می‌گذارد [۱].

هیدرولیک شکست سد می‌تواند توسط معادلات هایدربولیک جریان آب کم عمق بیان شود. ولی برای مدل‌سازی رسوب ناشی از آن، باید معادلات بقا، برای مخلوط آب و رسوب نوشته شود. معادلات حرکت آب و رسوب معمولاً قابل حل به روش‌های تحلیلی نیستند. از این رو در سال‌های اخیر، به حل عددی این معادلات توجه بیشتری شده است.

از سوی دیگر، باید به شماهای^۱ عددی که می‌توانند در این روش‌ها مورد استفاده قرار گیرند نیز توجه شود.

اول این که، جریان، انتقال رسوب و تکامل مورفولوژیکی، می‌توانند به شدت به هم مرتبط باشند، نرخ تغییر شکل بستر به مقدار قابل توجهی با نرخ تکامل تدریجی جریان، مقایسه می‌شود. بنابراین، به جای استراتژی مدل‌سازی مجزا^۳ با استفاده از حل غیر همزمان معادلات ساده شده بقا، به کارگیری استراتژی مدل‌سازی همبسته^۴ با استفاده از معادلات کامل بقا و روش حل همزمان، لازم می‌باشد [۱].

دوم این که، مهم‌ترین مکانیزم انتقال رسوب، به علت جریان ناشی از شکست سد، ورود محلی^۵ رسوب بستر، به علت حرکات بسیار آشفته و پراثری است. برای جریانات شدیداً غیر دائمی و متغیر مکانی ناشی از شکست سد، اطلاعات زیادی از مقیاس زمانی مکانیزم‌های ورود رسوب به جریان در مقایسه با مقیاس زمانی مورد نیاز برای به تعادل رسیدن انتقال رسوب وجود ندارد و لذا نمی‌توان رابطه خاصی بین میزان رسوب موجود در جریان و ظرفیت حمل رسوب^۶، ارائه کرد. بنابراین، مدل‌های غیر ظرفیتی^۷، در مقایسه با مدل‌هایی که بر ظرفیت حمل رسوب استوار هستند، از دقت بیشتری برخوردارند.

معادلات دو بعدی حرکت آب و رسوب

قوانین بقای جرم و مومنتوم را می‌توان با مطالعه یک المان دوبعدی که در آن مقادیر متوسط گرفته شده در عمق متغیرهایی نظیر سرعت در نظر گرفته می‌شود، به دست آورد. فاز مایع و فاز جامد پراکنده، پیوسته فرض می‌شوند که می‌توانند به داخل هم نفوذ کنند. معادله بقای جرم برای فاز مایع و فاز جامد نوشته می‌شود؛ در حالی که تعادل مومنتوم برای کل مخلوط نوشته می‌شود. [۶]

معادله بقای جرم برای رسوب در حالت دو بعدی (فاز مایع) :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h v)}{\partial y} = -\rho_0 \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1)$$

معادله بقای جرم برای رسوب در حالت دو بعدی (فاز جامد):

$$\frac{\partial(ch)}{\partial t} + \frac{\partial(huc)}{\partial x} + \frac{\partial(hvc)}{\partial y} = E - D \quad (2)$$

معادله بقای مومنتوم برای مخلوط آب و رسوب در حالت دو بعدی در جهت x :

اخیراً توجه دانشمندان بر روی مطالعه جریان در بستر فرسایش پذیر، شامل رسوبات سست درشت دانه، معطوف شده است که این رسوبات می‌توانند مانند بار بستر حرکت کنند.

کاپارت و یانگ (۱۹۹۸)، به این موضوع توجه کردند که جریان ناشی از شکست سد، به عنوان عامل انتقال رسوب است [۵]. آنها نشان دادند که چگونه فرسایش ناگهانی در محل سد، باعث تشکیل پرش هیدرولیکی در محل سد می‌شود [۵]. فریرا و لیل (۱۹۹۸)، مفهوم ظرفیت انتقال رسوب را برای مدل‌سازی هیدرولیک شکست سد در بستر متحرک، بررسی کردند [۱]. فراکارولو و آرمائینی (۲۰۰۲)، یک راه حل نیمه تحلیلی را روی معادلات تعادل که بر پایه آنالیز ساختار ویژه چنین مطالعاتی نوشته شده است، پیشنهاد کردند و برای به دست آوردن این راه حل نیمه تحلیلی، از اصطکاک صرف نظر کردند [۴]. کائو و همکارانش (۲۰۰۴)، یک مطالعه اختصاصی روی هیدرولیک بستر متحرک جریان ناشی از شکست سد و انتقال رسوب ناشی از آن را در حالت یک بعدی انجام دادند. راه حل عددی پیشنهادی، روش تفاضل محدود-ورژن TVD مرتبه دوم با حل کننده ریمن و تقریب^۳ HLLC و محدود کننده SUPERBEE است [۱].

در تحقیق حاضر جریان ناشی از شکست سد در بستر فرسایش پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرد و معادلات حاکم برای مخلوط آب و رسوب نوشته شده و حرکت آب و رسوب، غیر دائمی فرض شده است. معادلات، با استفاده از روش حجم محدود، و در قالب شمای دو مرحله ای و مرتبه دوم مک کورمک حل شده و برای تسخیر شوک‌های غیر فیزیکی از تکنیک Component-Wise TVD بدلیل ساده‌تر بودن آن نسبت به تکنیک TVD استفاده شده است.

معادلات حاکم

در زمینه مطالعه محاسباتی هیدرولیک شکست سد، باید به واکنش قوی بین جریان و رسوب و تغییرات ریختاری بستر رودخانه توجه شود. عدم دقت روی این مساله، باعث می‌شود که مدل‌سازی، در شرایط طبیعی، کارایی چندانی نداشته باشد و نتواند جواب‌های درست و منطقی به دست دهد.

در این زمینه باید به دو نکته اشاره کرد:

آب و مرز فرسایش پذیر پایینی، نشان می دهد. از یک طرف، ته نشینی رسوبات موجود در ستون متحرک آب، می تواند موجب آزادسازی بخشی از مومنتوم مخلوط آب و رسوب گردد و ترم مثبت چشمه^۸ مربوط به شار رسوب گذاری D را تولید نماید. از طرف دیگر ورود رسوب بستری که در ابتدا به علت حالت سکون مومنتم ناچیز دارد، باعث جذب مومنتوم از سیال می شود و مانند چاه^۹ (یعنی با علامت مخالف چشمه) در بقای مومنتوم رفتار می کند.

روش عددی

روش عددی به کار رفته در این تحقیق، در چارچوب روش حجم محدود (FVM) می باشد که در آن، از شمای مک کورمک برای حفظ دقت مرتبه دوم در مکان و زمان در ترکیب با تکنیک TVD برای مهار شوک ناپیوسته امواج، استفاده شده است.

منقطع کردن معادلات توسط روش حجم محدود

معادلات (۴)، (۶a)، (۶b)، (۲)، (۴)، یک سیستم هایپربولیک را تشکیل می دهند که می توانند بصورت عددی، با استفاده از شمای موثری که می توانند شوک را تسخیر کنند، حل شوند.

با یک فرم ساده، تغییر شکل بستر (معادله (۴))، می تواند از معادلات باقی مانده به علت تسریع عملیات محاسباتی جدا شود. این کار، به طور فیزیکی موجه است. چون تغییر شکل بستر، تنها توسط جریانات نهشته گذاری و ورودی های محلی تعیین می شود.

معادلات (۵)، (۶a)، (۶b)، (۲)، می توانند به طور فشرده، به صورت زیر نوشته شوند:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = Q \quad (7)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \\ hc \end{bmatrix} \quad (8-a)$$

$$E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \\ hcu \end{bmatrix} \quad (8-b)$$

$$\frac{\partial(\rho hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho hu^2 + \frac{1}{2}\rho gh^2) \quad (3a)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(\rho huv) = \rho gh(s_{0x} - s_{fx})$$

معادله بقای مومنتوم برای مخلوط آب در رسوب در حالت دو بعدی در جهت y :

$$\frac{\partial(\rho hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho hv^2 + \frac{1}{2}\rho gh^2) \quad (3b)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}(\rho huv) = \rho gh(s_{0y} - s_{fy})$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{D - E}{1 - P} \quad (4)$$

که در آن، z : ارتفاع بستر، c : غلظت حجمی رسوب در حجم متوسط. P : تخلخل رسوب، E : نرخ ورودی شار رسوب از کف به جریان، D : نرخ رسوب گذاری شار رسوب از جریان به کف. E و D ، تبادلات بین ستون آب و بستر را نشان می دهند.

با جاگذاری معادله (۴) در معادله (۱) داریم:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = \frac{E - D}{1 - P} \quad (5)$$

معادله (۵)، بقای جرم را برای مخلوط آب و رسوب نشان می دهد. [۶]

همچنین با جاگذاری معادلات (۵) و (۴)، معادلات (۳a) و (۳b) به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) \quad (6a)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(huv) = gh(-\frac{\partial z}{\partial x} - s_{fx})$$

$$- \frac{(\rho_s - \rho)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{(\rho_0 - \rho)(E - D)u}{\rho(1 - p)}$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) =$$

$$gh(-\frac{\partial z}{\partial y} - s_{fy}) - \frac{(\rho_s - \rho)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (6b)$$

$$- \frac{(\rho_0 - \rho)(E - D)v}{\rho(1 - p)}$$

در مقایسه با جریانات آب صاف در معادلات (۶)، دو ترم اضافی در سمت راست معادله وجود دارد. دومین ترم سمت راست، تاثیر غلظت متغیر جریان را نشان می دهد که باعث می شود این سیستم هایپربولیک با حالت عادی، فرق داشته باشد. سومین ترم در سمت راست معادلات (۶)، انتقال مومنتوم را به علت تبادل رسوب بین ستون

متغیرهای جریان در مرحله زمانی n مشخص اند و باید از روی آن، مقدار این متغیرها در مرحله زمانی $n+1$ محاسبه شود.

همانطور که گفته شد، در این شما، یک مرحله پیش بینی کننده و یک مرحله تصحیح کننده داریم. معادله (۱۲) را می توان برای نقاط مرکز سلول (i,j) به روش مک کورمک به صورت زیر منقطع کرد:

مرحله پیش بینی:

$$U_{i,j}^p(t+\Delta t) = U_{i,j}(t) - \lambda[(\bar{F}_{i,j-1}\bar{S}_s + \bar{F}_{i-1}\bar{S}_w) + (\bar{F}_{i,j}\bar{S}_n + \bar{F}_{i,j}\bar{S}_e)] + \Delta t Q(t+\Delta t) \quad (13)$$

مرحله اصلاح:

$$U_{i,j}^c(t+\Delta t) = U_{i,j}^p(t) - \lambda[(\bar{F}_{i,j}^p\bar{S}_s + \bar{F}_{i,j}^p\bar{S}_w) + (\bar{F}_{i,j+1}^p\bar{S}_n + \bar{F}_{i,j+1}^p\bar{S}_e)] + \Delta t Q^p(t+\Delta t) \quad (14)$$

که در آن، بالا نویسی های P و C به ترتیب نشان دهنده مراحل پیش بینی و اصلاح هستند.

\bar{F} نشان دهنده بردار شار و \bar{S} نشان دهنده بردار سطح می باشد. $A_{i,j}$ نشان دهنده مساحت سلول مورد نظر بوده و Δt گام زمانی محاسبات می باشد و داریم:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{A_{i,j}}$$

در انتهای محاسبات گام زمانی، حل عددی معادلات با متوسط گیری از مقادیر پیش بینی و اصلاح شده، محاسبه می شود. بنابراین در مرحله نهایی داریم:

$$U_{i,j}^m(t+\Delta t) = \frac{1}{2}(U_{i,j}^p(t+\Delta t) + U_{i,j}^c(t+\Delta t)) \quad (15)$$

منقطع سازی عددی با استفاده از شمای component-wise TVD

معادله (۱۲) را در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_j \Omega_j) + \sum_{sideS} (\vec{F} \cdot \vec{S}) = Q_j \Omega_j$$

این معادله، با فرض $A = \Omega_j$ می تواند به صورت زیر منقطع شود:

$$A \frac{dU}{dt} + \sum_{m=1}^M F_n^m L^m = A Q \quad (15)$$

که در آن، A سطح سلول، m اندیسی است که سمت سلول را نشان می دهد. M تعداد نهایی سمت های سلول F_n^m شار عمود بر هر سمت m است که دو سلول همسایه را جدا می کند. L^m طول سمت m سلول است.

$$G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ cvh \end{bmatrix} \quad (A-c)$$

$$Q = \begin{bmatrix} (E-D)/(1-p) \\ -gh(\frac{\partial z}{\partial x} + s_{\beta}) - \frac{(\rho_s - \rho)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{(\rho_0 - \rho)(E-D)u}{\rho(1-p)} \\ -gh(\frac{\partial z}{\partial y} + s_{\beta}) - \frac{(\rho_s - \rho)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{(\rho_0 - \rho)(E-D)v}{\rho(1-p)} \\ E-D \end{bmatrix} \quad (A-d)$$

معادله (۷) را می توان به طور خلاصه به صورت زیر

نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F = Q \quad (9)$$

با استفاده از روش حجم محدود مرکز سلول، داریم:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d_{\Omega} + \int_{\Omega} \nabla \cdot F d_{\Omega} = \int_{\Omega} Q d_{\Omega} \quad (10)$$

حال اگر قانون دیورژانس را که انتگرال روی حجم را به

انتگرال روی سطح تبدیل می کند، به کار ببریم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d_{\Omega} + \oint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{d}_s = \int_{\Omega} Q d_{\Omega} \quad (11)$$

که برای یک حجم کنترل دلخواه، معادله (۱۱) می

تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_j \Omega_j) + \sum_{sideS} (\vec{F} \cdot \vec{S}) = Q_j \Omega_j \quad (12)$$

که در آن مجموع ترم شار $\sum_{sideS} (\vec{F} \cdot \vec{S})$ ، مربوط به

چهار ضلع سلول Ω_j می باشد.

معادله (۱۲)، فرمول اصلی روش حجم محدود است.

روش مک کورمک

شمای پیش بینی - تصحیح مک کورمک، در دهه ۱۹۷۰ مطرح شد. این شما، یک شمای صریح با دقت مرتبه دوم در زمان و مکان است و به عنوان یک ابزار عددی به طور گسترده ای در حل مسائل شکست سد به کار می رود. این روش در ترکیب با تکنیک TVD می تواند برای جلوگیری از شوک های غیرفیزیکی و غیرپیوسته، بدون هیچ مشکل اضافی در رفتار ترم منبع Q به کار رود و همچنین دقت مرتبه دوم شمای اصلی را نیز حفظ کند.

فرمول بندی روش مک کورمک

روش مک کورمک، یک روش صریح می باشد یعنی

شار عمودی به سمت بیرون $F(\bar{U})$ ، می تواند به دو قسمت + و - تجزیه شود.

$$F(\bar{U}) = F^+ + F^- \quad (۱۹)$$

F^+ و F^- ، به ترتیب شارهای تجزیه شده مثبت و منفی هستند.

مطابق با اینها، شار عددی مرتبه اول F_{LR} در فصل مشترک هر سلول، با استفاده از متغیرهای سلول مجاور (یعنی \bar{Q}_R و \bar{Q}_L) تخمین زده می شود:

$$F_{LR} = F^+(\bar{Q}_L) + F^-(\bar{Q}_R) = F_L^+ + F_R^- \quad (۲۰)$$

که F_L^+ و F_R^- ، شارهای جدا شده چپ و راست در فصل مشترک سلول هستند.

مطابق الگوریتم دو مرحله ای که در معادلات (۱۳) و (۱۴)، شرح داده شد، شمای حجم محدود component-wise TVD با ترمهای منبع، برای حفظ دقت مرتبه دوم در زمان و مکان به صورت زیر فرموله می شود:

مرحله پیش بینی:

$$\hat{U}_{i,j} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{A} \left[\sum_{m=1}^M T^{-1}(\theta) F^{(1)}(\bar{U}) L^m \right] + \Delta t \hat{Q}_{i,j}^n \quad (۲۱)$$

از روی نتایج به دست آمده در مرحله پیش بینی و جایگذاری آن در معادله زیر، مقدار $U_{i,j}^{n+1}$ در گام زمانی $n+1$ به دست می آید. لازم به توضیح است که در معادله زیر مرحله اصلاح به صورت ضمنی استفاده شده است.

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{A} \left[\sum_{m=1}^M T^{-1}(\theta) F^{(2)}(\bar{U}) L^m \right] + \Delta t \hat{Q}_{i,j}^n \quad (۲۲)$$

که در آن $\hat{U}_{i,j}$ و $\hat{Q}_{i,j}$ ، به ترتیب متغیرهای پیش بینی شده و ترمهای منبع برای سلول (i, j) هستند. $U_{i,j}^n$ و $Q_{i,j}^n$ ، به ترتیب متغیرهای بقایی و ترمهای منبع در اندیس زمانی n هستند.

$F^{(1)}(\bar{U})$ ، شار عددی مرتبه اول در اندیس زمانی n است و $F^{(2)}(\bar{U})$ ، شار عددی مرتبه دوم است که متغیرهای پیش بینی شده را مورد استفاده قرار می دهد. سلول های محاسباتی در سیستم مختصات $x-y$ در شکل (۱)، نشان داده شده است.

برای راحتی، بالانویس m را حذف می کنیم. فقط برای طول به عنوان یادآوری، استفاده می شود.

شار عمودی در هر سمت سلول به صورت زیر است:

$$F_n(U) = E \cos \theta + G \sin \theta \quad (۱۶)$$

$$= T^{-1}(\theta) F[T(\theta)U] = T^{-1}(\theta) F(\bar{U})$$

که در آن، θ زاویه بین بردار واحد به سمت بیرون n و محور x هاست که در جهت عقربه های ساعت اندازه گیری می شود. \bar{U} ، بردار متغیرهای انتقال یافته از \bar{U} ، $F(\bar{U})$ ، شار عمودی انتقال یافته، $T^{-1}(\theta)$ ، ماتریس انتقال معکوس است.

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

با جایگذاری معادله (۱۶) در معادله (۱۵)، داریم:

$$A \frac{dU}{dt} + \sum_{m=1}^M T^{-1}(\theta) F(\bar{U}) L^m = AS \quad (۱۷)$$

که در آن،

$$F(\bar{U}) = [hu_n, hu_n^2 + \frac{gh^2}{2}, hu_n v_t]^T$$

$$\bar{U} = [h, hu_n, hv_t]^T$$

که u_n و v_t به ترتیب مؤلفه های سرعت در جهات \bar{x} (عمود) و \bar{y} (مماس) هستند.

$$u_n = u \cos \theta + v \sin \theta$$

$$v_t = v \cos \theta - u \sin \theta$$

شار نرمال $F(\bar{U})$ ، می تواند به عنوان شار عددی متناظر با یک مساله ریمن در جهت عمود بر سلول در نظر گرفته شود. مساله یک بعدی ریمن، یک مساله مقدار اولیه است و به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial [F(\bar{U})]}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (۱۸-a)$$

$$\bar{U}(\bar{x}, 0) = \begin{cases} \bar{U}_L \dots \dots \dots \bar{x} < 0 \\ \bar{U}_R \dots \dots \dots \bar{x} > 0 \end{cases} \quad (۱۸-b)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{i,j} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{A_{i,j}} [T^{-1}(\theta_e) F_e^{(1)} L_e \\ & + T^{-1}(\theta_n) F_n^{(1)} L_n + T^{-1}(\theta_w) F_w^{(1)} L_w \\ & + T^{-1}(\theta_s) F_s^{(1)} L_s]_{i,j} + \Delta t Q_{i,j}^n \end{aligned} \quad (26)$$

با استفاده از رابطه (۲۳)، مربوط به تجزیه بردار شار $F^{(1)}(\bar{U})$ می توان معادله (۲۴) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{i,j} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{A_{i,j}} [T^{-1}(\theta_e)(F_{i,j}^+ + F_{i+1,j}^-) L_e \\ & + T^{-1}(\theta_n)(F_{i,j}^+ + F_{i,j+1}^-) L_n \\ & + T^{-1}(\theta_w)(F_{i,j}^+ + F_{i-1,j}^-) L_w \\ & + T^{-1}(\theta_s)(F_{i,j}^+ + F_{i,j-1}^-) L_s]_{i,j} + \Delta t Q_{i,j}^n \end{aligned} \quad (27)$$

با جایگذاری بردارهای F ، U و Q که در قبل توضیح داده شد، در معادله بالا، می توان مقادیر پیش بینی شده u, h, v و c را به دست آورد.

پایداری روش عددی

شمای مک کورمک، باید معیار کورانت- فردریش- لوی^{۱۲} (CFL) را در هر سلول، برای پایداری، ارضاء کند. یعنی گام زمانی Δt ، باید توسط شط پایداری CFL، به صورت زیر، محدود شود:

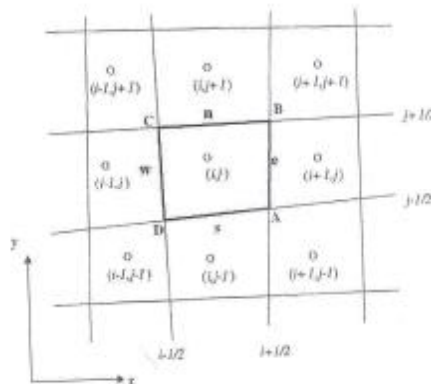
$$CFL = \frac{\Delta t}{\min[d_{i,j}]} \max[\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{gh}] \leq 1 \quad (28)$$

که i و j ، اندیس های سلول و $d_{i,j}$ نشان دهنده گروه کامل فواصل بین (i, j) امین مرکز و مرکزهای چهار سلول مجاور است.

شرایط مرزی

شرایط مرزی که در اینجا آورده شده است، به دو نوع مرز بسته^{۱۳} و مرز باز^{۱۴} تقسیم بندی می شود: در مرز بسته، سرعت عمود بر زمین، برای نشان دادن اینکه هیچ شاری در مرز وجود ندارد، مساوی صفر در نظر گرفته می شود. شرط مرزی بسته، به صورت زیر اعمال می شود:

$$\begin{aligned} h_R &= h_L \\ u_{nR} &= -u_{nL} \\ v_{tR} &= v_{tL} \end{aligned}$$



شکل ۱: سلول های محاسباتی در مختصات x-y.

در معادله (۲۱)، شار عددی مرتبه اول در وجه مشترک سلول $(i+1/2, j)$ به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$F^{(1)}(\bar{U}) = F_{LR} = F_L^+ + F_R^- = F_{i,j}^+ + F_{i+1,j}^- \quad (29)$$

در معادله (۲۲)، شار عددی مرتبه دوم در وجه مشترک سلول $(i+1/2, j)$ ، با اضافه کردن ترم ضد انتشار با تابع محدود کننده شار به F_{LR} ، به دست می آید.

$$F^{(2)}(\bar{U}) = F_{LR} + \frac{1}{2} [\phi(r_{i+1/2,j}^+) w_{i+1/2,j}^+ - \phi(r_{i+1/2,j}^-) w_{i+1/2,j}^-] \quad (29-a)$$

$$r_{i+1/2,j}^- = \frac{w_{i+3/2/2,j}^-}{w_{i+1/2,j}^-}, \quad r_{i+1/2,j}^+ = \frac{w_{i-1/2/2,j}^+}{w_{i+1/2,j}^+} \quad (29-b)$$

که $\hat{F}_{i,j} = F(\hat{U}_{i,j})$ شار پیش بینی کننده فرض می شود. اشکال مختلفی برای تابع محدود کننده شار $\phi(r)$ پیشنهاد شده است. در اینجا، از محدود کننده ون لیر (۱۹۷۴)، استفاده می شود:

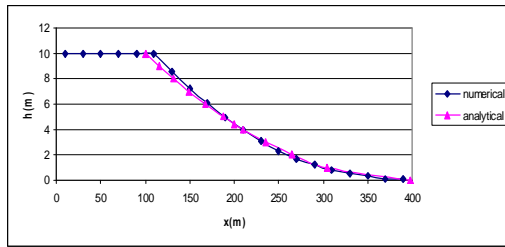
$$\phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|} \quad (25)$$

با توجه به معادلات (۲۱) و (۲۲)، مرحله پیش بینی، از تخمین شار عددی مرتبه اول در هر وجه مشترک سلول، به دست می آید. ضرورتا شمای component-wise TVD، نیازی به مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین ندارد. با این وجود، تکنیک جداسازی شار برای عملیات دو مرحله ای، لازم است.

منقطع سازی معادلات در مرحله پیش بینی با

استفاده از روش component-wise TVD

معادله (۲۲)، می تواند به صورت زیر بسط داده شود:



شکل ۲: مقایسه نتایج مدل حاضر با جواب‌های تحلیلی شکست سد با پایین دست خشک.

- برای حالت عمق پایین دست غیر صفر

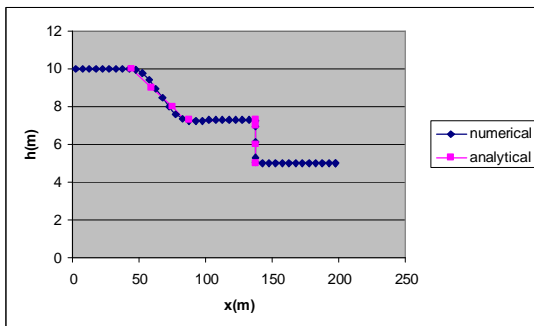
نتایج به دست آمده از مدل عددی حاضر را به کمک نتایج تحلیلی، مورد ارزیابی قرار می دهیم. داده‌های مورد استفاده برای این مساله در مدل حاضر به قرار زیر است:

$$L = 200m \quad \text{طول کانال مستطیلی}$$

$$h_1 = 10m \quad \text{عمق آب در بالادست}$$

$$h_0 = 5m \quad \text{عمق آب در پایین دست}$$

شکل (۳)، مقایسه نتایج حاصل از مدل حاضر با جواب‌های تحلیلی را نشان می دهد.



شکل ۳: مقایسه نتایج حاصل از مدل حاضر با جواب‌های تحلیلی.

آزمون شکست سد در حالت دو بعدی

در ارزیابی دو بعدی مدل شکست سد، چند آزمون مورد بررسی قرار گرفته است که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت.

هنگامی که سد روی قطر قرار دارد

در این آزمون، فرض می شود که تعداد سلول‌ها در جهت x و y برابر باشد و سد روی قطر قرار گرفته باشد. ابعاد محیط، 50×50 متر، تعداد سلول‌های شبکه 10×10 ، عمق در یک طرف سد ۱۰ متر و در طرف دیگر ۵ متر است.

که متغیرهای با زیرنویس L و R ، به ترتیب، موقعیت های معلوم و مجهول هستند. در کنار اینها، زیرنویس های R و L ، به ترتیب برای موقعیت های راست و چپ در سلول مورد نظر هستند.

در مرز باز، دو شرط مرزی متفاوت، مورد استفاده قرار می گیرد. یکی جریان ورودی فوق بحرانی در مرز ورودی بالادست و دیگری، انتقال در مرز خروجی پایین دست.

برای شرط مرزی جریان ورودی فوق بحرانی، سه متغیر، (یعنی u_{nR} ، h_R ، v_{iR}) داده می شود. مرز انتقالی، اجازه می دهد که امواج، بدون انعکاس عبور نمایند و شرایط آن، به صورت زیر است:

$$h_R = h_L$$

$$u_{nR} = u_{nL}$$

$$v_{iR} = v_{iL}$$

ارزیابی مدل

در این بخش به ارزیابی مدل عددی ارائه شده برای بدست آوردن دقت آن، در مقایسه با مدل‌های فیزیکی و واقعی، می پردازیم.

در آزمون‌های اولیه، به صحت یابی مدل هیدرولیکی، بدون در نظر گرفتن غلظت رسوب پرداخته شده و پس از حصول اطمینان از نتایج این آزمونها، مدل عددی با فرض بستر سیلابی متحرک و قابل فرسایش، تست شده است.

آزمون شکست سد در حالت یک بعدی

- برای حالت عمق پایین دست صفر (بستر خشک) نتایج حاصل از مدل را مورد بررسی قرار می دهیم و جهت ارزیابی نتایج مدل، آنرا با نتایج تحلیلی مقایسه می کنیم.

در این آزمون از داده های زیر استفاده شده است:

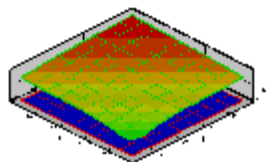
$$L = 400m \quad \text{طول کانال مستطیلی}$$

$$h_1 = 10m \quad \text{عمق آب در بالادست}$$

$$h_0 = 0 \quad \text{عمق آب در پایین دست}$$

شکل (۲)، نتایج حاصل از مدل حاضر را به همراه جواب‌های تحلیلی بعد از گذشت ۱۰ ثانیه نشان می دهد که تطابق خوبی بین نتایج مدل حاضر و جواب‌های دقیق مشاهده می شود.

اشکال زیر نتایج مدل حاضر را برای این مساله در زمان‌های مختلف نشان می‌دهند.

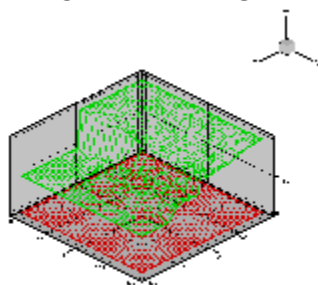


شکل ۹: نتیجه مدل‌سازی در ۰.۱s.

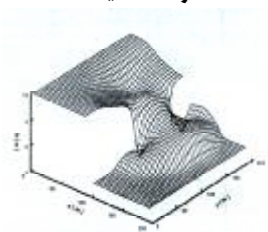
شکست جزئی سد

این آزمون یکی از آزمون‌های رایج در ارزیابی مدل شکست سد در حالت دو بعدی است. در این آزمون فرض می‌شود که قسمتی از سد به صورت ناگهانی شکسته شود. این در واقع مشابه بازشدگی ناگهانی یک دریچه است.

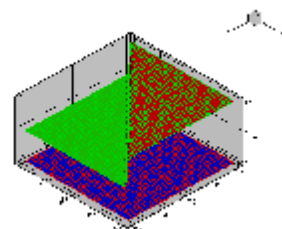
داده‌های مورد استفاده در این آزمون عبارتست از: ابعاد محیط ۲۰۰*۲۰۰ متر، تعداد سلولهای شبکه ۴۰*۴۰، عرض بازشدگی ۷۵ متر و عمق آب بالادست ۱۰ متر و عمق آب پایین دست آن ۵ متر. شکل (۱۰)، نتایج مدل حاضر را در حل مساله شکست جزئی سد، بعد از ۷/۲ ثانیه نشان می‌دهد. در شکل (۱۱) نیز نتایج مربوط به مرجع [۳] آورده شده است. مقایسه این دو نتیجه، نشان‌دهنده تطابق خوب مدل حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [۳] می‌باشد.



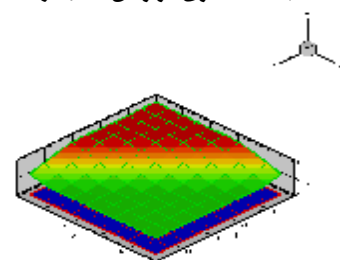
شکل ۱۰: نتایج مدل حاضر در آزمون شکست جزئی سد بعد از ۷/۲ ثانیه.



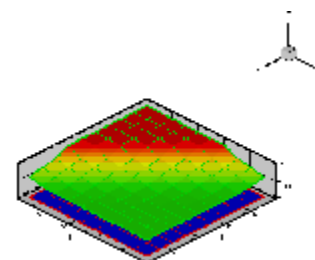
شکل ۱۱: نتیجه به دست آمده در مرجع [۳] در آزمون شکست جزئی سد بعد از ۷/۲ ثانیه.



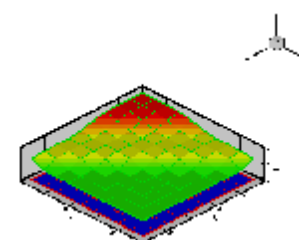
شکل ۴: نتیجه مدل‌سازی در زمان ۰.۵s (شرایط اولیه مساله).



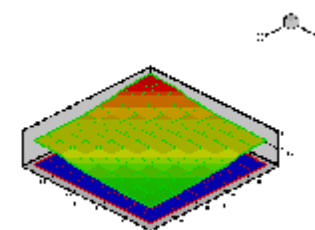
شکل ۵: نتیجه مدل‌سازی در زمان ۱s.



شکل ۶: نتیجه مدل‌سازی در زمان ۲s.



شکل ۷: نتیجه مدل‌سازی در ۵s.



شکل ۸: نتیجه مدل‌سازی در ۷s.

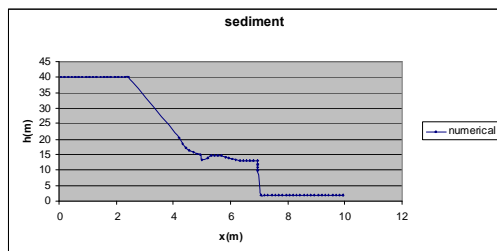
متر است. بستر اولیه کانال افقی و شامل رسوبات غیر چسبنده با دانه بندی یکنواخت فرض شده است. قطر دانه‌های رسوب در آزمون‌های مختلف برابر ۸ میلی‌متر می‌باشد.

برای نشان دادن نقش تحرک بستر و اندازه دانه‌های رسوب بر مشخصات هیدرولیکی جریان، در مورد ضریب زبری مانینگ بستر کانال 0.35 به صورت پیش فرض انتخاب شده است. سایر پارامترهای مورد استفاده در این آزمون عبارتست از:

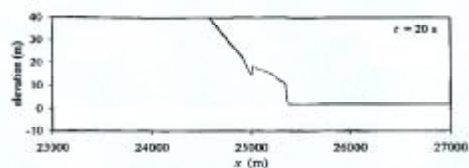
P ، نسبت تخلخل رسوبات بستر کانال ($p = 0.4$)

U ، ویسکوزیته آب ($\nu = 1.2E - 6 m^2 / s$)

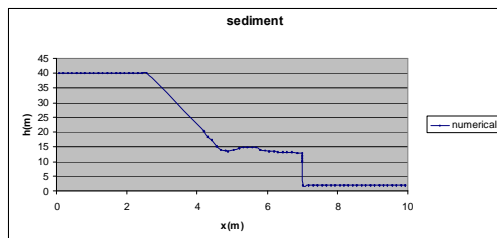
در اشکال زیر، پروفیل سطح آب محاسبه شده توسط مدل عددی با نتایج موجود در مرجع [۱] مقایسه شده است.



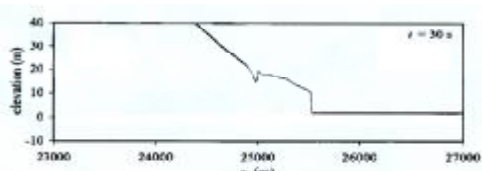
شکل ۱۳: نتایج به دست آمده از مدل عددی حاضر بعد از $20s$.



شکل ۱۴: نتایج به دست آمده در مرجع [۱] بعد از $20s$.



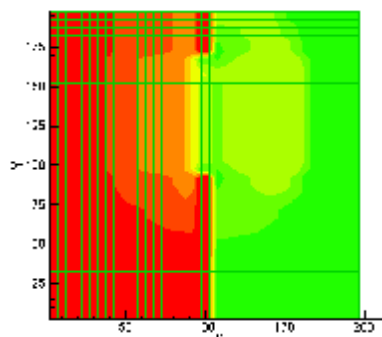
شکل ۱۵: نتایج به دست آمده از مدل عددی حاضر بعد از $30s$.



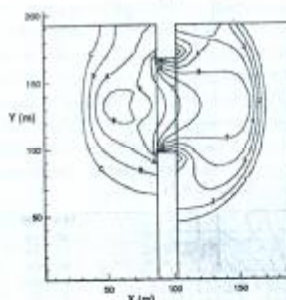
شکل ۱۶: نتایج به دست آمده در مرجع [۱] بعد از $30s$.

برای نمایش نتایج این مدل از نرم افزار TECPLOT استفاده شده است که در آن امکان حذف دیواره میانی وجود ندارد در حالی که در شکل (۱۴)، فقط رقوم سطح آب نشان داده شده است.

شکل (۱۲)، منحنی میزان رقوم سطح آب به دست آمده در مدل حاضر را بعد از $7/2$ ثانیه نشان می‌دهد. شکل (۱۳) نیز نتایج به دست آمده از این آزمون را در مرجع [۳] نشان می‌دهد.



شکل ۱۲: منحنی میزان رقوم سطح آب به دست آمده در مدل حاضر در آزمون شکست جزئی سد بعد از $7/2$ ثانیه.

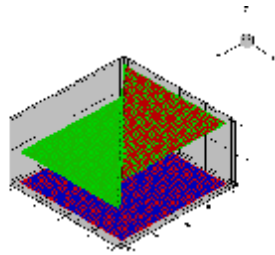


شکل ۱۳: منحنی میزان رقوم سطح آب به دست آمده در مرجع [۳] در آزمون شکست جزئی سد بعد از $7/2$ ثانیه.

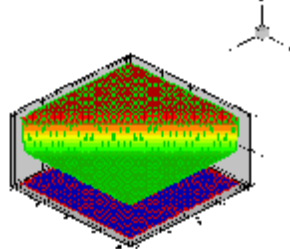
آزمون شکست سد با فرض بستر متحرک

هدف از این آزمون، کنترل و مقایسه نتایج حاصل از مدل عددی حاضر، با نتایج ارائه شده در مرجع [۱] است. در این آزمون تغییر مشخصات هیدرولیکی امواج حاصل از شکست سد در امتداد یک کانال فرسایش پذیر، بررسی شده است.

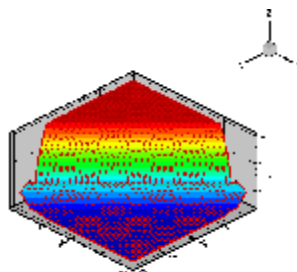
محل سد در وسط کانال در نظر گرفته شده است. عمق اولیه آب در بالادست سد ۴۰ متر و در پایین دست سد ۲



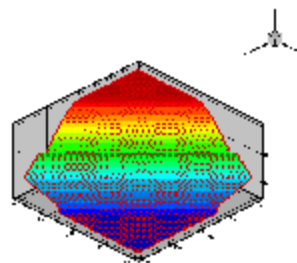
شکل ۲۰: نتیجه مدل سازی بعد از ۰s (شرایط اولیه).



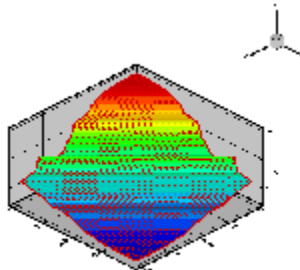
شکل ۲۱: نتیجه مدل سازی بعد از ۰.۳s.



شکل ۲۲: نتیجه مدل سازی بعد از ۱min.



شکل ۲۳: نتیجه مدل سازی بعد از ۳min.



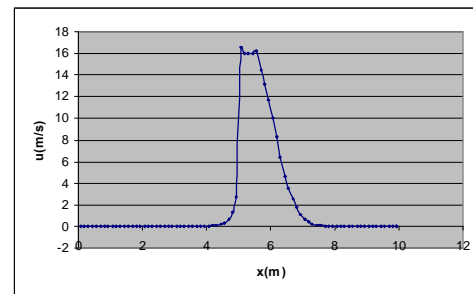
شکل ۲۴: نتیجه مدل سازی بعد از ۵min.

از شکل های بالا نکات زیر مشاهده می شود:

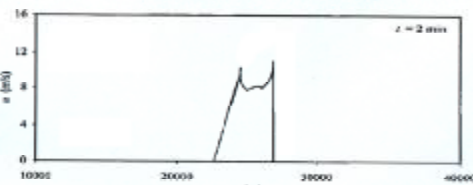
حرکت بستر به طور زیادی بر پروفیل های سطح آزاد در مقایسه با بستر، تاثیر می گذارد. این می تواند برای پیش بینی سیل مهم باشد.

یک پرش هیدرولیکی در پروفیل سطح آزاد برای بستر متحرک وجود دارد که ابتدا دور سد اصلی واقع شده است و به تدریج با حرکت به سمت بالادست، گسترش می یابد و بالاخره ناپدید می شود.

اشکال زیر پروفیل سرعت جریان را روی بستر فرسایش پذیر نشان می دهد. مشاهده می شود که پروفیل سرعت در محل پیشانی موج مثبت پایین دست دارای پیک و افزایش شدیدی می باشد. این امر نشان دهنده ظرفیت فرسایش بسیار زیاد جریان در این منطقه است.



شکل ۱۸: پروفیل سرعت به دست آمده توسط مدل عددی.



شکل ۱۹: پروفیل سرعت به دست آمده در مرجع [۱].

آزمون شکست سد با فرض بستر فرسایش پذیر در حالت دو بعدی

آزمون شکست سد هنگامی که سد روی قطر قرار دارد در این آزمون، همانند آزمون بستر صلب فرض می شود که تعداد سلولها در جهت x و y برابر باشد و سد روی قطر قرار گرفته باشد.

ابعاد محیط، ۲۰۰*۲۰۰ متر، تعداد سلولهای شبکه ۴۰*۴۰، عمق در یک طرف سد ۱۰ متر و در طرف دیگر ۵ متر است. شرایط رسوب همانند حالت یک بعدی در نظر گرفته شده است.

نتایج حاصل از مدل سازی در اشکال زیر آمده است.

نتیجه گیری

در این مقاله، یک مدل عددی توسعه یافته در چارچوب روش حجم محدود و با استفاده از شمای صریح مک کورمک همراه با تکنیک تسخیر شوک component-wise TVD ارائه گردید. نشان داده شد که می توان علاوه بر هیدرولیک جریان نسبت به شبیه سازی بستر متحرک نیز

اقدام نمود. مدل حاضر به کمک آزمون های گوناگونی که توسط محققان مختلف ارائه شده بود، مورد ارزیابی قرار گرفت. همان طوری که نتایج نشان می دهند، در هیچ کدام از آزمون ها، خطای پراکنش عددی در مجاورت گرادیان های تیز مشاهده نمی شود. این یکی از توانایی های روش TVD در مدل سازی شکست سد می باشد.

مراجع

- 1 - Cao, Z., Pender, G., Wallis, S. and Carling, P. (2004). "Computational Dam-Break Hydraulics Over Erodible Bed." *ASCE, Journal of Hydraulic Eng.*, Vol. 130, No.7, PP. 689-702.
- 2 - Alcrodu, F. and Garcia-Navarro, P. (1992). "A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, Issue 6, PP. 489-505.
- 3 - Tseng, M. H. and Chu, C. R. (2000). "Two-Dimensional Shallow Water Flows Simulation Using TVD-Mac Cormack Scheme." *IAHR, Journal of Hydraulic Research*, Vol. 38, No.2, PP.123-131.
- 4 - Lin, G. F., Lai, J. S. and Guo, W. D. (2003), "Finite volume Component-wise TVD Schemes for 2D Shallow Water Equations." *Advances in Water Resources*, No. 26, PP. 861-873.
- 5 - Pitchard, D. and Hogg, A. J. (2002). "On sediment transport under dam-break flow.", *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 473, PP. 265-274.
- 6 - Valiani, A. and Caleffi, V. (2001), "Dam break modeling for sediment laden flow." *Proc., Int. Symposium on Environmental Hydraulics*. IAHR, Arizona, USA.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Scheme
- 2 - Upwind
- 3 - Uncoupled
- 4 - Coupled
- 5 - Local Entrainment
- 6 - Sediment Transport Capacity
- 7 - Non-Capacity
- 8 - Source
- 9 - Sink
- 10 - Prediction
- 11 - Correction
- 12 - Courant- Friedrichs- Lewy
- 13 - Land Boundary
- 14 - Open Boundary