

## روش زیرفضای یک‌بعدی اصلاح شده در تحلیل دینامیکی غیرخطی

رضا عطارنژاد<sup>۱\*</sup> و زهرا پاچناری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>۲</sup>دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۶/۴/۳۰، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۸/۸/۲۲، تاریخ تصویب ۸۸/۱۲/۱۹)

### چکیده

روش اجزای محدود سیستم‌های با درجات آزادی نامحدود را به مدلی با تعداد درجات آزادی محدود که رفتار فیزیکی مشابهی دارند، تبدیل می‌کند. روش‌های تغییر مینا این تعداد درجه آزادی را به تعداد محدودتری در مختصات جدید تبدیل می‌کند. یکی از روش‌های تغییر مینا با استفاده از بردارهای ریتز-ویلسون حاصل می‌شود که به دلیل ساده‌تر بودن استخراج و وابستگی به بار دینامیکی در بسیاری موارد بر روش مرسوم تغییر مینا با استفاده از بردارهای ویژه برتری دارد. همچنین از معایب بردارهای ویژه می‌توان به هزینه بالای محاسباتی در سیستم‌های بزرگ و در نظر نگرفتن عامل بارگذاری اشاره کرد. تعداد کم بردارهای ریتز لازم در مقایسه با بردارهای ویژه و در نظر گرفتن توزیع مکانی بارگذاری خارجی و محتوای فرکانسی غالب بارگذاری، پژوهشگران را به طرف استفاده از بردارهای ریتز سوق داده است. روش‌های تغییر مینا در مسایل غیرخطی به دلیل تغییرات پیاپی ماتریس‌های سیستم اغلب کارایی زیادی ندارند. روش زیرفضای یک‌بعدی تعمیم‌یافته راه حل مناسبی برای تحلیل مسایل غیرخطی هندسی دینامیکی با تکنیک ریتز-ویلسون ارائه می‌کند. در این مقاله روش زیر فضای یک‌بعدی تعمیم یافته در ترکیب آن با تکنیک مود-شتاب برای تحلیل مسایل دینامیکی غیرخطی به کار گرفته شده است. با تکیه بر مؤلفه خطای داخلی و روش زیر فضای یک‌بعدی تعمیم‌یافته معیاری اصلاحی با استفاده از تکنیک مود-شتاب برای به هنگام کردن بردارهای پایه مورد نیاز در تغییرات سختی در آنالیز دینامیکی غیرخطی پیشنهاد شده است. نتایج نشان دهنده دقت و سرعت مناسب روش اصلاح شده است.

**واژه‌های کلیدی:** روش اجزای محدود، تحلیل دینامیکی غیرخطی، روش ریتز اصلاح شده، کاهش ابعاد فضا، آنالیز عددی

### مقدمه

در نتیجه با پیش ضرب  $\Psi^T$  در رابطه (۱) و استفاده از رابطه (۲) در آن خواهیم داشت:

$$\Psi^T M \Psi \ddot{Y}(t) + \Psi^T C \Psi \dot{Y}(t) + \Psi^T K \Psi Y(t) = \Psi^T F(t) \quad (3)$$

که شرایط اولیه تغییر مکان و سرعت با فرض تعامد بردار

$\Psi$  نسبت به ماتریس جرم عبارتند از:

$$Y(0) = \Psi^T M U_0; \dot{Y}(0) = \Psi^T M \dot{U}_0 \quad (4)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$M^* \ddot{Y}(t) + C^* \dot{Y}(t) + K^* Y(t) = F^*(t) \quad (5)$$

که ماتریس‌های تغییر یافته (کاهش) جرم، میرایی و سختی عبارتند از:

$$M^* = \Psi^T M \Psi, C^* = \Psi^T C \Psi, K^* = \Psi^T K \Psi \quad (6)$$

انتخاب بردارهای پایه  $\Psi$  مناسب به معنای حدس و تخمین مناسب پاسخ مورد انتظار سیستم است. بردارهای ویژه و بردارهای ریتز-ویلسون دو دسته اصلی بردارهای پایه هستند. در روش بردارهای ویژه ماتریس‌های میرایی و سختی کاهش یافته  $C^*$  و  $K^*$  قطری هستند و ماتریس جرم کاهش یافته  $M^*$  نیز ماتریس قطری واحد است [۲].

روش‌های کاهش ابعاد فضای تحلیل سیستم برای حل مسایل دینامیکی غیرخطی به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این دسته خاص از مسایل به شکل دستگاه معادلات همزمان حرکت بیان می‌شوند که در حالت دینامیکی غیرخطی و با در نظر گرفتن اثر میرایی چنین بیان می‌شود [۳، ۲۰، ۱]:

$$M_{n \times n} \ddot{U}_{n \times 1}(t) + C_{n \times n} \dot{U}_{n \times 1}(t) + K_{n \times n} U_{n \times 1}(t) = F_{n \times 1}(t) \quad (1)$$

که ماتریس‌های  $M$ ،  $C$ ،  $K$  به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی و  $F(t)$  بردار بارگذاری،  $U$ ،  $\dot{U}$ ،  $\ddot{U}$  به ترتیب بردار تغییر مکان، سرعت و شتاب سیستم هستند. برای اعمال روش کاهش از تبدیل مختصات معادلات حرکت سیستم استفاده می‌شود. مزیت این روش در این است که تعداد معادلات از  $n$  معادله به  $m$  معادله کاهش یافته که باعث سرعت بیشتر تحلیل و صرفه‌جویی در زمان تحلیل می‌شود. بدین منظور از تبدیل بردار تغییر مکان  $U_{n \times 1}(t)$ ، به شکل ترکیب خطی از تغییر مکان‌های تعمیم یافته  $Y_{m \times 1}(t)$  بهره می‌گیریم:

$$U_{n \times 1}(t) = \Psi_{n \times m} Y_{m \times 1}(t) \quad (2)$$

که  $\bar{C}^* = X^T C^* X$  ماتریس میرایی و  $\bar{K}^* = X^T K^* X$  ماتریس سختی و  $\bar{F}_i(t) = X_i^T F^*(t)$  بردار بارگذاری است.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} X_i y_i(t); \ell < m \quad (9)$$

در روش مود-شتاب با فرض میرایی متناسب (از رابطه (۱۰)) از رابطه (۸) مقدار  $y_i(t)$  حساب می‌شود.

$$\Psi_i^T C \Psi_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (10)$$

$$(11)$$

$$y_i(t) = \frac{X_i^T F(t)}{\omega_i^2} - \left( \frac{2\xi_i}{\omega_i} \right) \dot{y}_i(t) - \left( \frac{1}{\omega_i^2} \right) \ddot{y}_i(t)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۹)،  $Y(t)$  چنین به دست می‌آید:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} X_i \left[ \frac{1}{\omega_i^2} \bar{F}_i(t) - \left( \frac{2\xi_i}{\omega_i} \right) \dot{y}_i(t) - \left( \frac{1}{\omega_i^2} \right) \ddot{y}_i(t) \right] \quad (12)$$

در رابطه بالا جمله اول برای تمام مودها نوشته می‌شود یا به عبارت دیگر اثر مودهای حذف‌شده نیز وارد می‌شود:

$$\sum_{i=1}^m \frac{X_i}{\omega_i^2} X_i^T F(t) = K^{-1} F(t) \quad (13)$$

نهایت با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲) جواب سیستم کاهش یافته به دست می‌آید:

$$\ell < m \ll n \quad (14)$$

$$Y(t) = K^{-1} F(t) - \sum_{i=1}^{\ell} X_i \left[ \left( \frac{2\xi_i}{\omega_i} \right) \dot{y}_i(t) + \frac{1}{\omega_i^2} \ddot{y}_i(t) \right]$$

در این رابطه دیده می‌شود که تأثیر مودهای بالاتر با توجه به رابطه وارون با توان دوم  $\omega_i$  کمتر می‌شود. چون در مودهای بالاتر فرکانس افزایش می‌یابد، پس می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد. ولی در عبارت اول اثر آن مودهای حذف شده نیز در نظر گرفته شده است که این موضوع باعث افزایش دقت حل می‌شود [۱۰]. در نهایت با استفاده از رابطه (۳) جواب اصلی مسئله از رابطه (۲) به دست می‌آید.

## محاسبه خطاهای تحلیل مسایل دینامیکی

### غیرخطی در زیرفضای تعمیم یافته

برای حل رابطه (۱) در یک زیرفضای  $m$  بعدی ( $R^m$ ) از تبدیل مختصات (تصویرسازی) زیر استفاده می‌شود [۷]:

$$U = \bar{U} + e = \Psi_{n \times m} Y_{m \times 1} + e \quad (15)$$

بردارهای ویژه به دلیل هزینه بالای محاسباتی در سیستم‌های بزرگ به خصوص در حالت غیرخطی و در نظر نگرفتن عامل بارگذاری بهترین انتخاب نیستند [۴]. چون گاهی در تحلیل، بردارهای ویژه‌ای دخالت داده می‌شوند که به دلیل تعامد بر بردار بارگذاری در تحلیل نقشی ندارند و با گاهی برخی مودهای ارتعاشی به علت واقع شدن در محدوده قطع مودها، حذف می‌شوند و حال آنکه به دلیل نزدیکی با فرکانس بارگذاری نقش مؤثری در پاسخ سیستم دارند [۵، ۶]. بنابراین از بردارهای ریتز<sup>۱</sup> که ناشی از توزیع مکانی بارگذاری خارجی است و از محتوای فرکانسی غالب بارگذاری تأثیر می‌پذیرد، استفاده می‌شود. در این روش کلیه بردارهای ریتز ایجادشده در پاسخ دخالت دارند و به وسیله سیستم تحریک می‌شوند، همچنین از حذف بردارهایی که فرکانس آنها به فرکانس بارگذاری نزدیک است، جلوگیری می‌شود. در روش ریتز، ماتریس‌های میرایی  $C^*$  و سختی  $K^*$  بر خلاف روش بردار ویژه قطری نیستند، ولی ماتریس جرم  $M^*$  همچنان قطری واحد است. این مسئله جدید شامل  $m$  معادله وابسته است که حل آن در مقایسه با  $n$  معادله نخست حجم عملیاتی بسیار کمتری دارد [۵، ۶].

هنگام تفکیک این معادلات در روش ریتز خطاهایی ایجاد می‌شود که در روش زیرفضای یک‌بعدی تعمیم یافته با الگوریتم نیومارک این خطاها محاسبه شده و در نهایت با افزودن این خطاها به پاسخ سیستم پاسخ دقیق به دست آید [۷]. در این مقاله برای محاسبه خطاها از الگوریتم مود-شتاب به جای الگوریتم نیومارک استفاده می‌شود که مزیت آن بر روش قبل این است که زمان انجام تحلیل کاهش می‌یابد و پاسخ‌ها دقیق‌تر می‌شوند [۸]. در تحلیل سازه تحت باری که فرکانس آن در مقایسه با چند فرکانس طبیعی اول سازه بزرگ است، دیگر بردارهای ویلسون کارایی لازم را ندارند. بنابراین باید از یکسری بردارهای ریتز دیگر همراه آنها استفاده کرد [۴].

### روش مود-شتاب<sup>۲</sup>

اگر از بردارهای ویژه  $X$  برای حل معادله (۵) استفاده شود، به جای حل  $m$  معادله، می‌توان  $1$  معادله را حل کرد و با ترکیب اثر آنها جواب سیستم را به دست آورد [۸، ۹]:

$$Y_{m \times 1}(t) = X_{m \times l} y_{l \times 1}(t) \quad (7)$$

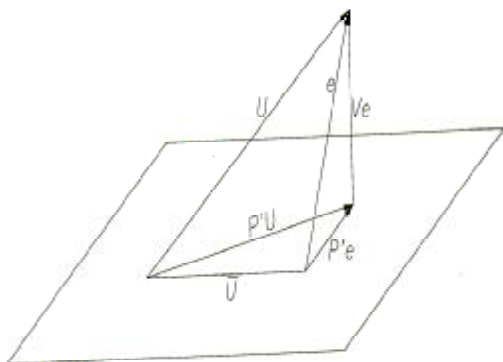
$$\ddot{y}_i(t) + \bar{C}^* \dot{y}_i(t) + \bar{K}^* y_i(t) = \bar{F}_i(t) \quad (8)$$

(۲۲)

$$\dot{e}_i = -\frac{\tau}{2} P K e_{i-1} + \dot{e}_{i-1} + V \Delta \ddot{U}_{i-1} - \frac{\tau}{2} P K e_i$$

مقادیر  $V, P, P'$  در رابطه های بالا عبارتند از :

$$P = \Psi \Psi^T, P' = \Psi \Psi^T M = P M, V = 1 - P' \quad (۲۳)$$



شکل ۱: نمایش بردار خطا و تغییر مکان سیستم در زیر فضای سه بعدی.

بر اساس مبانی ارائه شده و شکل (۱) می توان نوشت [۱۰]:

$$U_i = P' U_i + V U_i \quad (۲۴)$$

$$P' U_i = \bar{U}_i + P' e_i \quad (۲۵)$$

$$e_i = V e_i + P' e_i \quad (۲۶)$$

$$V e_i = V U_i \quad (۲۷)$$

با انجام عملیات ریاضی روی معادلات (۲۱) تا (۲۷) رابطه های زیر حاصل می شود [۷]:  $e_0$  بردار خطای جا به جایی اولیه است.

$$P' e_i = -\frac{\tau^2}{4} P K e_i + \left( P' - \frac{\tau^2}{4} P K \right) e_{i-1} + \tau P' \dot{e}_{i-1} - \frac{\tau^2}{4} P C (\dot{e}_i + \dot{e}_{i-1}) \quad (۲۸)$$

$$P' e_i = -\frac{\tau^2}{4} P K \left[ e_i + 4 \sum_{k=1}^i k e_{i-k} - (2i+1) e_0 \right] \quad (۲۹)$$

دو زیرفضای متعامد  $R_1$  و  $R_2$  که پاسخ سیستم در هر یک از آنها به ترتیب با خطاهای  $e_{i1}$  و  $e_{i2}$  همراه است، در نظر گرفته می شود:

$$e_{i1} = V_1 U_i + P' e_{i1} \quad (۳۰)$$

در این رابطه  $\Psi_{n \times m} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m]_{n \times m}$  ماتریس متشکل از بردارهای پایه تشکیل دهنده زیرفضای  $m$  بعدی است. این بردارها تنها نسبت به بردار جرم متعامد هستند. با توجه به تعامد بردارهای پایه نسبت به ماتریس جرم، معادله حرکت سیستم و شرایط اولیه آن در زیرفضای  $m$  بعدی به صورت رابطه های (۳) و (۴) است.

رابطه های (۳) و (۴) با روش مود-شتاب که یک روش قابل اعتماد در سیستم های غیر خطی است، حل می شوند. به این ترتیب خطای ناشی از این تغییر مختصات با توجه به رابطه (۳) مطابق رابطه (۱۵) قابل محاسبه خواهد بود. بر اساس الگوریتم عددی مورد استفاده (روش نیومارک)، تغییر مکان و سرعت سیستم در گام  $i$ -ام به شکل زیر بیان می شود [۷]:

$$U_i = U_{i-1} + \tau \dot{U}_{i-1} + \frac{\tau^2}{4} (\ddot{U}_{i-1} + \ddot{U}_i) \quad (۱۶)$$

$$\dot{U}_i = \dot{U}_{i-1} + \frac{\tau}{2} (\ddot{U}_{i-1} + \ddot{U}_i) \quad (۱۷)$$

با پیش ضرب رابطه بالا در ماتریس جرم و به کارگیری رابطه (۱) این رابطه حاصل می شود:

$$M U_i = M U_{i-1} + \tau M \dot{U}_{i-1} + \frac{\tau^2}{4} M \ddot{U}_i + \frac{\tau^2}{4} (-C \dot{U}_{i-1} - K U_{i-1} + F_{i-1}) \quad (۱۸)$$

همچنین، مشابه رابطه (۱۶) تغییر مکان سیستم در فضای  $m$  بعدی عبارت است از:

$$Y_i = Y_{i-1} + \tau \dot{Y}_{i-1} + \frac{\tau^2}{4} \ddot{Y}_i + \frac{\tau^2}{4} (-\tilde{C} \dot{Y}_{i-1} - \tilde{K} Y_{i-1} + \tilde{F}_{i-1}) \quad (۱۹)$$

با استفاده از رابطه (۱۹) عبارت زیر حاصل می شود:

$$M U_i - \Psi Y_i = (M - I) U_i + e_i \quad (۲۰)$$

با پیش ضرب رابطه (۱۹) در  $\Psi$  و کاستن آن از معادله (۱۸) و با استفاده از رابطه (۱۵) پس از انجام عملیات ریاضی بردار خطای جا به جایی و سرعت به دست می آید [۱۰]:

$$\left( I + \frac{\tau^2}{4} P K \right) e_i = V U_i + \left( P' - \frac{\tau^2}{4} P K \right) e_{i-1} - \frac{\tau^2}{4} P C \dot{e}_i + \left( \tau P' - \frac{\tau^2}{4} P C \right) \dot{e}_{i-1} \quad (۲۱)$$

پاسخ واقعی دستگاه به این ترتیب است:

$$U_1 = \bar{u}_1 \psi_1 + \bar{u}_2 \psi_2 + \bar{u}_3 \psi_3 + \dots + \bar{u}_n \psi_n \quad (40)$$

چنانچه تحلیل یک سیستم  $n$  بعدی، در زیرفضای یک بعدی  $R_1$  (ایجاد شده توسط بردار پایه  $\psi_1$ ) در نظر گرفته شود، روابط زیر در پایان گام مورد بررسی برقرار هستند [۷]:

$$U_1 = (\bar{u}_{11} + a_{11})\psi_1 + a_{21}\psi_2 + \dots + a_{n1}\psi_n \quad (41)$$

$$\bar{U}_{11} = \bar{u}_{11}\psi_1 \quad (42)$$

$$(43)$$

$$e_{11} = a_{11}\psi_1 + a_{21}\psi_2 + a_{31}\psi_3 + \dots + a_{n1}\psi_n$$

$$P'e_{11} = a_{11}\psi_1 \quad (44)$$

$$Ve_{11} = a_{21}\psi_2 + a_{31}\psi_3 + \dots + a_{n1}\psi_n \quad (45)$$

در رابطه‌های بالا  $U_1$  پاسخ دقیق سیستم،  $\bar{U}_{11}$  پاسخ سیستم در زیرفضای یک بعدی،  $e_{11}$  بردار خطای تحلیل سیستم در زیرفضای یک بعدی و  $P'e_{11}$  و  $Ve_{11}$  به ترتیب مؤلفه‌های بردار خطای داخل زیرفضا و عمود بر زیرفضای تحلیل بوده و تمام این متغیرها مربوط به تغییر مکان سیستم در پایان گام مورد نظرند. درباره خطای ناشی از تصویرسازی شرایط اولیه گام زمانی در زیرفضای تحلیل، بردار خطا تنها مؤلفه عمود بر زیرفضای تحلیل خواهد داشت [۷]: ( $a_{110} = 0$ )

$$e_{10} = Ve_{10} = a_{210}\psi_2 + a_{310}\psi_3 + \dots + a_{n10}\psi_n \quad (46)$$

با جایگزینی رابطه‌های (۴۳) و (۴۴) در رابطه (۳۹) می‌توان نوشت:

$$a_{11}\psi_1 = -\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T K_1(a_{11}\psi_1 + \dots + a_{n1}\psi_n)$$

$$-\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T K_0(a_{110}\psi_2 + \dots + a_{n10}\psi_n)$$

$$-\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T C(a_{11}\psi_1 + \dots + a_{n1}\psi_n)$$

$$-\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T C(-a_{210}\psi_2 - \dots - a_{n10}\psi_n) \quad (47)$$

با ساده‌سازی و انجام عملیات ریاضی برای تمام زیرفضاها می‌توان نوشت [۷]:

$$e_{i2} = V_2 U_i + P'_2 e_{i2} \quad (31)$$

همچنین پاسخ سیستم در زیرفضای  $R$  حاصل مجموعه بردارهای مولد زیرفضاهای  $R_1$  و  $R_2$  خطای  $e_i$  را به همراه خواهد داشت:

$$e_i = VU + P'e_i \quad (32)$$

با توجه به تعامد زیرفضاهای  $R_1$  و  $R_2$ :

$$P' = P'_1 + P'_2 \quad (33)$$

$$V = V_1 + V_2 - I \quad (34)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۳۳) و (۳۴) در رابطه (۲۶) و استفاده از رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) و انجام عملیات ریاضی می‌توان نوشت [۱۰]:

$$\bar{U}_i = \bar{U}_{i1} + \bar{U}_{i2} - [P'e_i - (P'_1 e_{i1} + P'_2 e_{i2})] \quad (35)$$

در صورتی که در معادله (۳۵) رابطه زیر برقرار باشد، پاسخ سیستم در زیرفضای مادر  $R$  با مجموع پاسخ سیستم در زیرفضاهای جزئی  $R_1$  و  $R_2$  برابر است.

$$P'e_i = P'_1 e_{i1} + P'_2 e_{i2} \quad (36)$$

اگر بحث بالا به زیرفضاهای متعامد یک بعدی تعمیم داده شود، نتیجه زیر به دست می‌آید [۱۰]:

$$\bar{U}_i = \bar{U}_{i1} + \bar{U}_{i2} + \dots + \bar{U}_{im} \quad (37)$$

شرط لازم و کافی برای برقراری رابطه (۳۷) این است که:

$$P'e_i = P'_1 e_{i1} + P'_2 e_{i2} + \dots + P'_m e_{im} \quad (38)$$

این موضوع به معنی جدا سازی<sup>۳</sup> معادلات تعادل دینامیکی همزمان سیستم است؛ بدین مفهوم که اگر سیستم واقعی توسط بردارهای ریتز به یک سیستم تعمیم یافته تبدیل شود، بدون آنکه  $P'e_i = 0$  باشد، معادلات تعادل سیستم از یکدیگر گسسته می‌شوند.

## فرمول بندی روش تحلیل در حالت دینامیکی

### غیر خطی

مؤلفه داخل زیرفضای بردار خطا برای یک گام زمانی دلخواه بر اساس رابطه‌های (۲۸) و (۲۹) نوشته می‌شود [۱۰]: (برای سهولت موقعیت  $i$ ، حالت ۱ و موقعیت  $i-1$  حالت صفر در نظر گرفته شده است.)

$$P'e_i = -\frac{\tau^2}{4}P(K_1 e_i + K_0 e_0) - \frac{\tau}{2}PC(e_i - e_0) \quad (39)$$

بسیاری دارد که به طور مشروح در ادبیات فنی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۱،۲]. در ادامه پایداری و همگرایی روش ریتز اصلاحی به هنگام سازی شده با تکنیک مود-شتاب بررسی می‌شود. برای بررسی وضعیت پایداری و همگرایی روش، بر اساس رابطه‌های رشته هندسی و رابطه  $(\Delta^0)$  و با فرض  $-1 < \Lambda < I$ ، می‌توان نوشت [۷]:

$$(1-\Lambda)\bar{U}_1^{(n)} = \bar{U}_1 + \Lambda\bar{U}_0 \quad (54)$$

بنابراین با توجه به فرض  $-1 < \Lambda < 1$  روش تکرار ارایه‌شده پایدار است؛ اگر و تنها اگر شعاع طیفی ماتریس سختی  $\Lambda$  کوچکتر از یک باشد  $(\rho(\Lambda) < 1)$ :

$$\rho(\Lambda) = \max |\lambda_i|, i=1, 2, \dots, n \quad (55)$$

با توجه به تعریف ماتریس  $\Lambda$  می‌توان نوشت:

$$\Lambda = \tilde{\Phi}^{-1} \Delta \tilde{\Phi} \quad (56)$$

$$\Lambda^n = \tilde{\Phi}^{-1} \Delta^n \tilde{\Phi} \quad (57)$$

در این رابطه  $\tilde{\Phi}$  ماتریس تشکیل شده از بردارهای ویژه یا ریتز و  $\Delta$  ماتریس قطری در بر گیرنده مقادیر ویژه ماتریس سختی  $\Lambda$  است.

$$\rho(\Lambda) < 1: n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta^n \rightarrow 0 \quad (58)$$

معادله (۵۳) در معادله (۵۰) جایگذاری می‌شود و برای برقراری تعادل در دو طرف معادله (۵۰) مقدار خطای برشی  $\sigma_n$  چنین ظاهر می‌شود [۷]:

$$\sigma_n = (I - \Lambda)[(I + \Lambda + \Lambda^2 + \dots + \Lambda^{n-1})(\Lambda\bar{U}_1 + \Lambda\bar{U}_0) + \bar{U}_1] - [\bar{U}_1 + \Lambda\bar{U}_0] \quad (59)$$

با انجام ضرب ماتریسی و جداسازی بخشی از مؤلفه‌های معادله بالا، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma_n = -\Lambda^n (\Lambda\bar{U}_1 + \Lambda\bar{U}_0) \quad (60)$$

با جایگذاری معادله (۵۷) در معادله (۶۰) می‌توان نوشت [۱۰]:

$$\sigma_n = -\tilde{\Phi}^{-1} \Delta^n \tilde{\Phi} (\Lambda\bar{U}_1 + \Lambda\bar{U}_0) \quad (61)$$

با توجه به برقراری شرط پایداری  $(\rho(\Lambda) < 1)$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta^n \rightarrow 0 \quad (62)$$

$$\Rightarrow \sigma_n \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{U}_1^{(n)} \rightarrow \bar{U}_1$$

مرتبه بردار خطا ۲ است [۷]. روشن است هر چه مقدار

$\rho(\Lambda)$  کوچکتر باشد، سرعت همگرایی روش تکرار

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \\ \vdots \\ \bar{u}_{1m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{12}^{nl1} & \kappa_{13}^{nl1} & \dots & \kappa_{1m}^{nl1} \\ \kappa_{21}^{nl2} & 0 & \kappa_{23}^{nl2} & \dots & \kappa_{2m}^{nl2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \kappa_{m1}^{nlm} & \kappa_{m2}^{nlm} & \kappa_{m3}^{nlm} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \bar{\kappa}_{12}^{nl1} & \bar{\kappa}_{13}^{nl1} & \dots & \bar{\kappa}_{1m}^{nl1} \\ \bar{\kappa}_{21}^{nl2} & 0 & \bar{\kappa}_{23}^{nl2} & \dots & \bar{\kappa}_{2m}^{nl2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{\kappa}_{m1}^{nlm} & \bar{\kappa}_{m2}^{nlm} & \bar{\kappa}_{m3}^{nlm} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{01} \\ \bar{u}_{02} \\ \vdots \\ \bar{u}_{0m} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

پس از بازنویسی رابطه (۴۸)، این رابطه‌ها به دست

می‌آید:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_1 + \Lambda_{nl} \bar{U}_1 + \bar{\Lambda}_{nl} \bar{U}_0 \quad (49)$$

$$(1 - \Lambda_{nl}) \bar{U}_1 = \bar{U}_1 + \bar{\Lambda}_{nl} \bar{U}_0 \quad (50)$$

ماتریس سختی  $\Lambda_{nl}$  و  $\bar{\Lambda}_{nl}$  رابطه‌های بالا به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$\kappa_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j - \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \quad i \neq j$$

$$\kappa_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j \quad (51)$$

$$\bar{\kappa}_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \quad i \neq j$$

$$\bar{\kappa}_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j \quad (52)$$

در اینجا  $\bar{U}_1$ ، حاوی پاسخ‌های سیستم کاهش‌یافته با صرف نظر کردن از عناصر غیرقطری ماتریس‌های سختی و میرایی است و  $\bar{U}_1$  پاسخ سیستم کاهش‌یافته با در نظر گرفتن تأثیر عنصرهای غیرقطری ماتریس‌های سختی و میرایی است.

(۵۳)

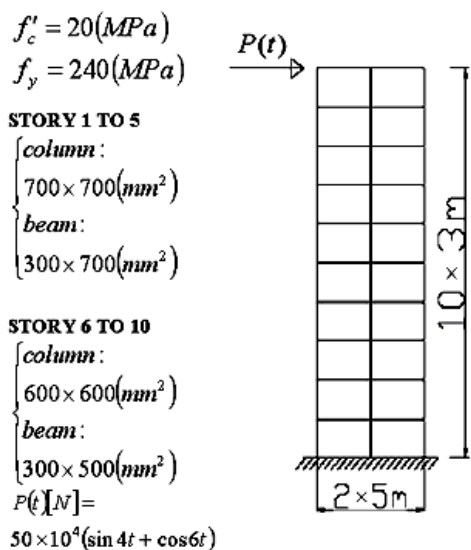
$$\bar{U}_1^{(n)} = \bar{U}_1 + (1 + \Lambda + \Lambda^2 + \dots + \Lambda^{n-1})(\Lambda\bar{U}_1 + \Lambda\bar{U}_0)$$

## پایداری و همگرایی روش<sup>۴</sup>

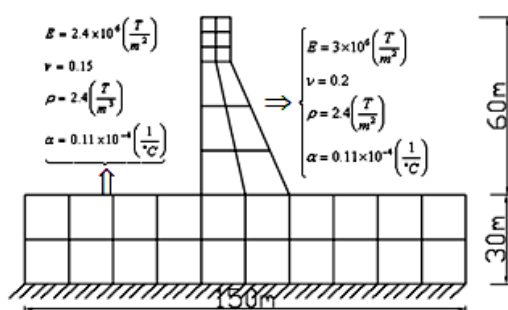
پایداری و همگرایی در روش‌های دینامیکی اهمیت

بالتر خواهد بود.

زبان‌های برنامه‌نویسی پر کاربرد در مهندسی است، نوشته شده است و مثال‌هایی با آن اجرا شده است. در مثال اول قاب دو دهانه ۱۰ طبقه با بارگذاری سینوسی در طبقه آخر و در مثال دوم سدی بتنی با بار ناشی از ثقل، هیدرو استاتیک و هیدرو دینامیک قرار گرفته است. در این مثال‌ها تغییرشکل‌ها بزرگ (هندسه غیر خطی) فرض شده و رفتار مصالح ارتجاعی در نظر گرفته شده است. میرایی نیز ۵ درصد فرض می‌شود.



شکل ۲: مشخصات قاب دو دهانه.



شکل ۳: مشخصات سد و پیرامون آن.

برای به دست آوردن جواب مبنا در یکی از نقاط بحرانی (درمثال اول نقطه اعمال بار و در مثال دوم محل تاج سد)، از روش نیومارک با شتاب میانگین استفاده شده است. خطاهای حاصل از نتایج تحلیل مسئله در روش ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی شده با تکنیک مود-شتاب با ابعاد زیرفضای متفاوت در جدول (۱) و شکل (۴) خلاصه شده است. مقادیر خطای مربوط به معیار بارگذاری و معیار جرم برای قطع بردارهای ریتز طبق رابطه‌های (۶۶) و (۶۷) و

## به‌هنگام‌سازی زیرفضای تعمیم یافته

ضرورت تغییر زیرفضای تحلیل با توجه به میزان تغییرات ماتریس سختی می‌تواند حتی در هر گام زمانی تحلیل اجتناب‌ناپذیر شود، بنابراین هزینه محاسباتی ناشی از این موضوع کارآیی روش تحلیل دینامیکی در زیرفضای تعمیم یافته را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد [۸، ۱۲]. همچنین عامل جدید خطا، ناشی از تغییر بردارهای پایه و ناسازگاری<sup>۵</sup> بین بردارهای مولد زیرفضای قبلی و جدید برای تصویرسازی تغییر مکان، سرعت و شتاب اولیه در شروع گام زمانی جدید، به طور پیوسته باعث افزایش و رشد خطای ناشی از نبود تعادل سیستم شده و حتی می‌تواند باعث ناپایداری شود. سختی سیستم و پاسخ (تغییر مکان) سیستم، دو عامل اساسی مؤثر بر به‌هنگام‌سازی هستند که این دو عامل می‌توانند در عامل انرژی تجلی کنند [۷]:

$$\tilde{\Pi}_0 = \frac{1}{2} \bar{Y}_i^T \tilde{K}_0 \bar{Y}_i \quad (۶۳)$$

$$\tilde{\Pi}_i = \frac{1}{2} \bar{Y}_i^T \tilde{K}_i \bar{Y}_i \quad (۶۴)$$

که  $\tilde{\Pi}_0$  انرژی پتانسیل داخلی تعمیم‌یافته سیستم در موقعیت تولید بردارهای پایه مولد زیرفضای تعمیم‌یافته و  $\tilde{\Pi}_i$  انرژی پتانسیل داخلی تعمیم‌یافته سیستم در موقعیت کنونی تحلیل (گام  $i$ -ام)،  $\tilde{K}_0$  ماتریس سختی تعمیم‌یافته سیستم در موقعیت تولید بردارهای پایه مولد زیرفضای تعمیم‌یافته و  $\tilde{K}_i$  ماتریس سختی تعمیم‌یافته سیستم در موقعیت فعلی (گام  $i$ -ام)،  $\bar{Y}_i$  بردار پاسخ تعمیم یافته سیستم در موقعیت فعلی (گام  $i$ -ام) هستند.

$$Abs \left( 1 - \frac{\tilde{\Pi}_0}{\tilde{\Pi}_i} \right) = \varepsilon_i \quad (۶۵)$$

در صورتی که  $\varepsilon_i$  از مقدار مجاز تعیین شده بیشتر شود، به‌هنگام‌سازی زیرفضا ضروری می‌شود و بردارهای پایه مولد زیرفضا باید دوباره محاسبه شوند (مقدار مجاز حدود ۰/۰۵ است).

## مثال‌ها

مطابق الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله که در پیوست آمده است، برنامه‌ای به زبان FORTRAN که یکی از

خطای تغییرمکان در روش‌های ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی‌شده با تکنیک مود-شتاب و ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی‌نشده با تکنیک مود-شتاب و ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی‌شده با تکنیک نیومارک بر حسب ابعاد زیر فضا در جدول (۲) و شکل (۵) نشان داده شده است. کارآیی الگوریتم تحلیل در زیرفضاهای یک‌بعدی تعمیم‌یافته به‌هنگام‌سازی‌شده در روش مود-شتاب بر حسب تعداد بردارهای ریتز مولد زیرفضای تحلیل در شکل (۶) ارایه شده است که کاهش زمان انجام محاسبات مشهود است. در این شکل نسبت مدت زمان تحلیل روش ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی‌شده با تکنیک مود-شتاب به مدت زمان تحلیل در روش نیومارک بر حسب ابعاد زیر فضا نشان داده شده است. در این مثال‌ها اثر پدیده تشدید برای محاسبه بردارهای ریتز لازم در نظر گرفته شده است.

مقدار خطای تغییرمکان در نقطه اعمال بار در مثال اول و تاج سد در مثال دوم بر حسب رابطه (۶۸) به دست می‌آید که در این رابطه  $N$  تعداد گام‌های زمانی تحلیل است.

$$\varepsilon_f = \frac{|f^T e_f|}{f^T f_m} \quad (۶۶-الف)$$

$$f_m = \sum_{i=1}^m (f^T M \psi_i) \psi_i \quad (۶۶-ب)$$

$$e_f = f - f_m \quad (۶۶-ج)$$

$$\varepsilon_M = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{M}^T \psi_i)^2}{\sum_{i=1}^n \bar{M}_i} \quad (۶۷-الف)$$

$$\bar{M}_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \quad (۶۷-ب)$$

$$\varepsilon_{disp} = \left[ \left( \sum_{i=1}^N \left| \frac{U_i - \bar{U}_i}{U_i} \right| \right) / N \right] \times 100 \quad (۶۸)$$

جدول ۱: مقایسه خطاهای مختلف بر حسب ابعاد زیر فضا در روش ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی‌شده (مود-شتاب).

ابعاد زیر فضا	خطای معیار تغییر مکان %	خطای معیار بارگذاری %	خطای معیار جرم %
۵	۱۰.۲۱	۱۴.۲۱	۷.۵۹
۶	۷.۲۸	۱۰.۴۵	۵.۳۳
۷	۶.۷۳	۷.۱۲	۳.۲۴
۸	۲.۷۱	۴.۶۴	۱.۴۹
۹	۰.۹۴	۲.۳۵	۰.۸۵
۱۰	۰.۴۱	۰.۴۷	۰.۴۹
۱۱	۰.۱۹	۰.۰۹	۰.۲۳
۱۲	۰.۱	۰.۰۳	۰.۱۳
۱۳	۰.۰۸	۰	۰.۱
۱۴	۰.۰۶	۰	۰.۰۸
۱۵	۰.۰۴	۰	۰.۰۷
۱۶	۰.۰۴	۰	۰.۰۷

ب-مثال ۲

ابعاد زیر فضا	خطای معیار تغییر مکان %	خطای معیار بارگذاری %	خطای معیار جرم %
۸	۹.۲۳	۱۵.۶۱	۷.۸۸
۹	۳.۷۸	۹.۱۷	۵.۹۷
۱۰	۱.۷۸	۵.۲۹	۴.۳۳
۱۱	۰.۲۹	۱.۲۷	۲.۷۸
۱۲	۰.۰۷	۰.۲۷	۲.۱۴
۱۳	۰.۰۳	۰.۱۱	۱.۸۵
۱۴	۰.۰۱	۰.۰۵	۱.۴۱
۱۵	۰.۰۰۴	۰	۱.۱۷
۱۶	۰.۰۰۳	۰	۰.۹۷
۱۸	۰.۰۰۲	۰	۰.۸۲
۲۰	۰.۰۰۲	۰	۰.۷
۲۲	۰.۰۰۲	۰	۰.۷

الف-مثال ۱

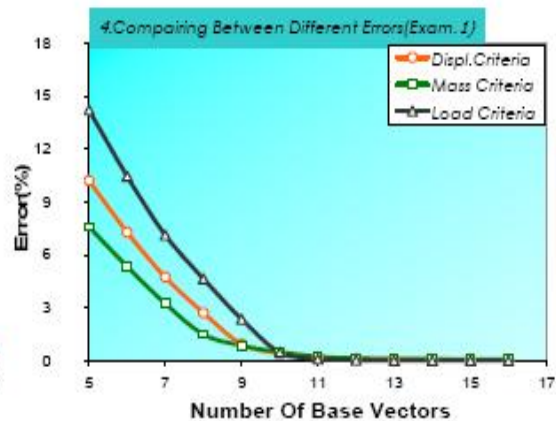
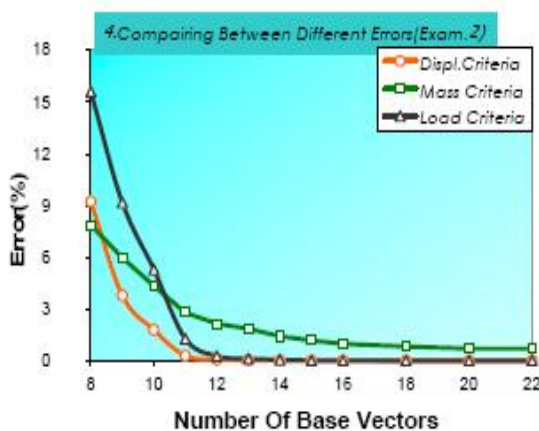
جدول ۲: میزان خطای تغییرمکان در روش ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی شده با تکنیک مود-شتاب و روش ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی نشده با تکنیک مود-شتاب و روش ریتز به‌هنگام‌سازی شده با تکنیک نیومارک ( روش پیشنهادی مرجع [۷] ) بر حسب ابعاد زیر فضا.

ابعاد زیرفضا	روش پیشنهادی مرجع ۷	روش پیشنهادی به‌هنگام‌سازی نشده	روش پیشنهادی به‌هنگام‌سازی شده
۵	۲۱.۴۵	۱۷.۳۶	۱۰.۳۱
۶	۱۸.۶۵	۱۴.۶۲	۷.۲۸
۷	۱۴.۸	۱۰.۸۹	۴.۷۳
۸	۱۲.۷۳	۸.۸۵	۲.۷۱
۹	۱۰.۵۶	۶.۷۴	۰.۹۴
۱۰	۹.۱۲	۵.۳۳	۰.۴۱
۱۱	۷.۴۲	۳.۶۴	۰.۱۹
۱۲	۶.۲۸	۲.۵۲	۰.۱
۱۳	۵.۱۷	۱.۴۸	۰.۰۸
۱۴	۴.۱۵	۰.۷۴	۰.۰۶
۱۵	۳.۵۵	۰.۲۵	۰.۰۴
۱۶	۳.۰۱	۰.۱۷	۰.۰۴
۱۷	۲.۶۵	۰.۰۹	۰.۰۲
۱۸	۲.۱۲	۰.۰۷	۰.۰۱
۱۹	۱.۶۹	۰.۰۵	-
۲۰	۱.۲۵	۰.۰۳	-
۲۱	۰.۹۴	۰.۰۱	-
۲۲	۰.۷۶	-	-

ب-مثال ۲

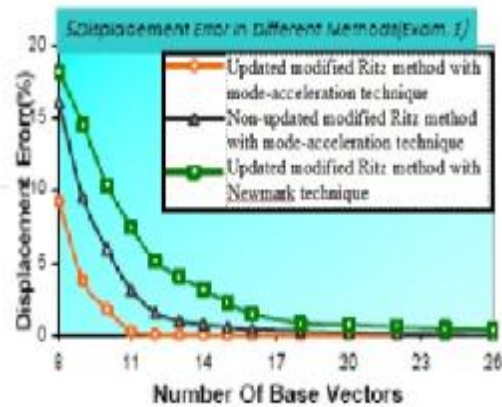
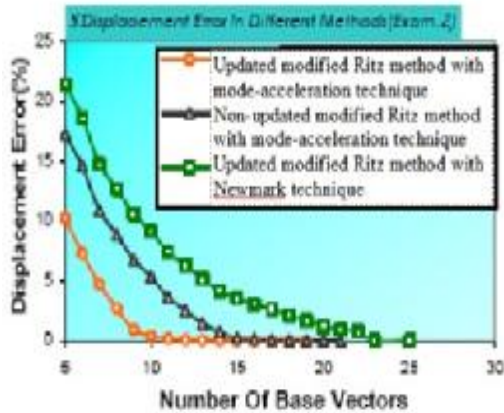
ابعاد زیرفضا	روش پیشنهادی مرجع ۷	روش پیشنهادی به‌هنگام‌سازی نشده	روش پیشنهادی به‌هنگام‌سازی شده
۸	۱۸.۲۳	۱۶.۱۱	۹.۲۳
۹	۱۴.۵۶	۹.۵۲	۳.۷۸
۱۰	۱۰.۴۱	۵.۹۳	۱.۷۸
۱۱	۷.۴۵	۳.۱۲	۰.۴۹
۱۲	۵.۱۱	۱.۵۶	۰.۰۷
۱۳	۴.۰۴	۰.۹۷	۰.۰۳
۱۴	۳.۱۷	۰.۷۵	۰.۰۱
۱۵	۲.۲۵	۰.۵۷	۰.۰۰۴
۱۶	۱.۴۶	۰.۴۲	۰.۰۰۳
۱۸	۰.۸۴	۰.۲۹	۰.۰۰۲
۲۰	۰.۷۱	۰.۱۹	۰.۰۰۲
۲۲	۰.۵۹	۰.۱۳	۰.۰۰۲
۲۴	۰.۴۸	۰.۰۷	-
۲۶	۰.۳۹	۰.۰۳	-

الف-مثال ۱

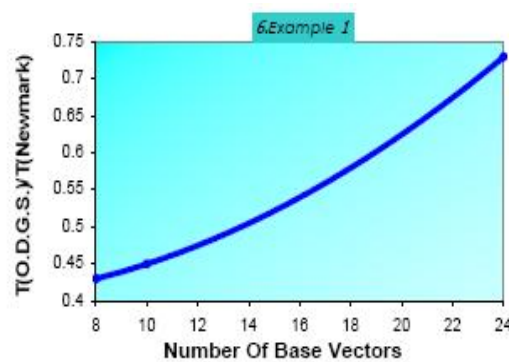
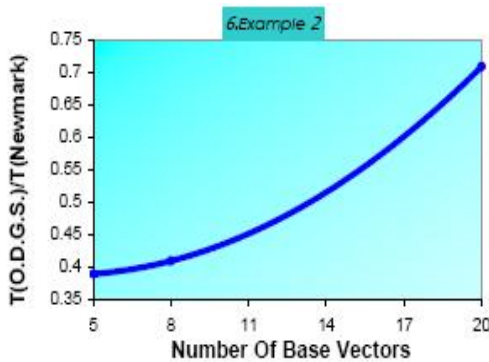


شکل ۴: میزان انواع خطاها برحسب ابعاد زیرفضا در روش ریتز اصلاحی به‌هنگام‌سازی شده با تکنیک مود-شتاب.





شکل ۵: میزان خطای تغییرمکان بر حسب ابعاد زیرفضا.



شکل ۶: نسبت مدت زمان تحلیل روش ریتز اصلاحی به هنگام شده با تکنیک مود-شتاب به مدت زمان تحلیل روش ریتز اصلاحی به هنگام شده با تکنیک نیومارک بر حسب ابعاد زیرفضا.

## نتایج

۱- با روش ارایه شده در این مقاله، در تحلیل مسایل بزرگ با استفاده از تحلیل دینامیکی غیرخطی در زیرفضای یک بعدی تعمیم یافته با تکنیک مود-شتاب، علاوه بر اینکه میزان محاسبات کاهش یافته و اثر مودهای بالاتر هم ملحوظ شده با تعداد بردارهای پایه کمتری نسبت به روش زیرفضای یک بعدی تعمیم یافته با تکنیک نیومارک به جوابهای یکسان دست یافته ایم. با استفاده از این روش، زمان انجام محاسبات به طور فاحش کم می شود (شکل ۶)، که این موضوع در مسایل بزرگ تر منجر به کاهش چشمگیر هزینه های محاسباتی می شود.

۲- خطای حاصل از تحلیل سیستم به روش زیرفضاهای تعمیم یافته یک بعدی به هنگام سازی شده و روش به هنگام نشده با تکنیک مود-شتاب با افزایش ابعاد زیرفضا کاهش می یابد (اشکال ۴ و ۵ و جداول ۱ و ۲).

۳- کارایی روش تحلیل در زیرفضاهای تعمیم یافته یک بعدی به هنگام شده نسبت به روش به هنگام نشده با تکنیک مود-شتاب، با افزایش ابعاد سیستم افزایش می یابد. افزایش کارایی در مورد سیستم های غیرخطی به علت ضرورت استفاده از روش تکرار و به هنگام سازی زیرفضاهای تعمیم یافته بسیار محسوس تر است. در مواردی که انجام تحلیل غیرخطی با روش به هنگام سازی نشده به یکی از دلیل های بالا توجیه ناپذیر و غیرعملی می شود، استفاده از روش به هنگام سازی شده باعث کاهش زمان تحلیل مسایل غیرخطی می شود و استفاده از روش کاهش ابعاد را توجیه می کند.

۴- به علت کاهش مدت زمان تحلیل در مسایل غیرخطی، دقت تحلیل سیستم های غیرخطی را با افزایش ابعاد زیرفضای تحلیل در روش زیرفضای تعمیم یافته می توان افزایش داد؛ به طوری که همچنان استفاده از روش

- زیرفضای تعمیم یافته قابل توجیه است (شکل ۴ و جدول ۱).  
 ۵- معیار خطای جرم نسبت به معیار خطای بارگذاری برای قطع تولید بردارهای پایه مناسب تر است.  
 ۶- تحقیقات برای بهبود الگوریتم و افزایش دقت جوابها در بارگذاری با محتوای فرکانسی در دست انجام است و به زودی نسبت به انتشار آن اقدام خواهد شد.

## مراجع

- 1 - Bathe, K. J. and Gracewcki, S. (1981), "On non-linear dynamic analysis using sub-structuring and mode superposition", Computers and Structure, Vol. 13, PP. 699-707.
- 2 - Bathe, K.J. (1996), Finite element procedures in engineering analysis, Printice-Hall Inc.
- 3 - Leger, P. and Dussanlt, S. (1992), "Non-linear seismic response analysis using vector superposition methods", Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 21, PP. 163-176.
- 4 - Xia, H. and Humar, J. L. (1992), "Frequency dependent Ritz vectors", Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 21, pp. 215-231.
- 5 - Joo, K.J. and Wilson, E.L. (1989), "Ritz vectors and generation criteria for mode superposition analysis", Erthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 18, pp. 149- 167.
- 6 - Wilson, E.L., Dikens, Y., "Dynamic analysis by direct superposition analysis of Ritz vectors", Erthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 10, pp. 813-821.
- 7 - Heravi, Gh. And Attarnejgad, R. (2004), "Non-linear dynamic analysis by updated subspaces method", Engineering Computation, Vol. 21, No. 8.
- 8 - Owen, D. R. J. and Hinton, E. (1986), Finite element in plasticity: Theory and practice, 2<sup>nd</sup> Ed.
- 9 - Owen, D.R.J. and Hinton, E. (1999), an introduction to finite element computations.
- 10 - Pachenari, Z. (200۷), "Non-linear dynamic analysis by modified one dimension generalized subspaces method", Msc. Thesis, School Of Civil Eng. University Of Tehran.
- 11 - Bathe, K. J. and Wilson, E. L. (1973), "Stability and accuracy analysis of direct integration methods", Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 1, PP. 283-, 291.
- 12 - Noor, A. k. (1994), "Recent advances and applications of reduction methods", Applied Mechanics Reviews, Vol. 7, pp. 65-72.
- 13 - Vtku, S., Clemente, J. L. M. and Salama, M. (1985), "Errors in reduction methods", Computers and Structure, Vol. 21, pp. 1153-7.

## پیوست

الگوریتم روش تحلیل در روش زیرفضای یک بعدی با استفاده از به هنگام سازی

۱- کاهش ابعاد فضای اولیه

الف - تولید بردارهای ریتز

$$\psi_1 = \psi_1^* / \|\psi_1^*\|_M$$

$$\|\psi_1^*\|_M = (\psi_1^{*T} M \psi_1^*)^{1/2}$$

محاسبه بردارهای ریتز بعدی: (i=2, ..., m)

$$a_{i-1} = \psi_{i-1}^T M U_{i-1}$$

$$U_i = U_{i-1} - a_{i-1} \psi_{i-1}$$

$$K \psi_i^* = M U_i$$

متعامد نمودن بردار ریتز تولید شده نسبت به بردارهای

ریتز قبلی (نسبت به ماتریس جرم): (j=1, ..., i-1)

$$C_j = \psi_j^T M \psi_i^{*(j)}$$

$$K U_1 = f(s)$$

$$K \psi_1^* = M U_1$$

نرمالیزه نمودن بردار ریتز اول نسبت به ماتریس جرم:

د - محاسبه شعاع طیفی  $\Lambda_{nl0}$  ( حداکثر مقدار ویژه

ماتریس  $\Lambda_{nl0}$  )  $\rho(\Lambda_{nl0}) = |\lambda_n|$  اگر  $\rho \geq 1$  باشد، آنگاه  $\tau = \tau / \rho$  قرار داده شده و از گام ج محاسبات تکرار می شود.

۲- حل معادلات حرکت یک بعدی به روش مود-

شتاب ( مطابق رابطه های (۸) تا (۱۴) )

۳- محاسبه ماتریس های  $\Lambda_{nl}$  و  $\bar{\Lambda}_{nl}$

$$\kappa_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j - \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \quad i \neq j$$

$$\kappa_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j$$

$$\bar{\kappa}_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \quad i \neq j$$

$$\bar{\kappa}_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j$$

۴- اصلاح بردارهای تغییر مکان و سرعت و شتاب

$$Y_1^{(0)} = \bar{Y}_1$$

$$Y_1^{(i+1)} = \bar{Y}_1 + \Lambda_{nl} Y_1^{(i)} + \bar{\Lambda}_{nl} Y_0$$

$$\Delta Y_1 = Y_1 - Y_0$$

$$\Delta \dot{Y}_1 = \frac{2}{\tau} \Delta Y_1 - 2 \dot{Y}_0$$

$$\ddot{Y}_1 = \tilde{F}_1 - \tilde{C}_v (\dot{Y}_0 + \Delta \dot{Y}_1) - \tilde{K}_v Y_1$$

۵- انتقال پاسخها به فضای اصلی

$$U_1 = U_0 + \Psi \Delta Y_1$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_0 + \Psi \Delta \dot{Y}_1$$

$$\ddot{U}_1 = \Psi \ddot{Y}_1$$

۶- کنترل معیار به هنگام سازی

$$\tilde{\Pi}_0 = \frac{1}{2} Y_1^T {}^0 \tilde{K} Y_1$$

$$\tilde{\Pi}_i = \frac{1}{2} Y_1^T {}^1 \tilde{K} Y_1$$

$$\psi_i^{*(j+1)} = \psi_i^{*(j)} - C_j \psi_j$$

نرمالیزه نمودن بردارهای ریتز نسبت به ماتریس جرم:

$$\psi_i = \psi_i^* / \|\psi_i^*\|_M$$

$$\|\psi_i^*\|_M = (\psi_i^{*T} M \psi_i^*)^{1/2}$$

- معیارهای قطع تولید بردارهای ریتز:

○ براساس بردار بارگذاری خارجی

$$\varepsilon_f = \frac{|f^T e_f|}{f^T f_m}$$

$$e_f = f - f_m$$

$$f_m = \sum_{i=1}^m (f^T M \psi_i) \psi_i$$

○ براساس ماتریس جرم

$$\varepsilon_M = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{M}^T \psi_i)^2}{\sum_{i=1}^n \bar{M}_i}$$

$$\bar{M}_i = \sum_{i=1}^n M_{ij}$$

ب - محاسبه مشخصه های سیستم در زیرفضای

تعمیم یافته

$$\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_m]_{n \times m}$$

$$\tilde{M} = \Psi^T M \Psi = I$$

$$\tilde{C}_v(i) = \psi_i^T C \psi_i \quad i = 1 \text{ to } m$$

$$\tilde{K}_{0v}(i) = \psi_i^T K_0 \psi_i \quad i = 1 \text{ to } m$$

$${}^0 \tilde{K} = \Psi^T K_0 \Psi$$

$$\tilde{F}_0 = \Psi^T F_0, \quad \tilde{F}_1 = \Psi^T F_1$$

$$Y_0 = \Psi^T M U_0$$

$$\dot{Y}_0 = \Psi^T M \dot{U}_0$$

$$\ddot{Y}_0 = \tilde{F}_0 - \tilde{C}_v \dot{Y}_0 - \tilde{K}_v Y_0$$

ج- محاسبه ماتریس  $\Lambda_{nl0}$

$$\kappa_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j - \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \quad i \neq j$$

$$\kappa_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j$$

**۷- تکرار مراحل تحلیل جهت گامهای زمانی بعد**

- در صورت ضرورت به هنگام سازی، تکرار آنالیز از گام (۱- الف)

- در صورت عدم ضرورت به هنگام سازی، تکرار آنالیز از گام (۲)

اگر  $\left| 1 - \frac{\tilde{\Pi}_0}{\tilde{\Pi}_i} \right| > \varepsilon$  به هنگام سازی بردارهای پایه ضروری می باشد (  $\varepsilon$  حدود ۰.۰۵ مناسب است ).

**واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن**

- 1- Ritz Vectors
- 2 - Mode-Acceleration Method
- 3 - Decoupling
- 4 - Stability and convergence of method
- 5 - Incompatibility