كمانش موضعي صفحات ارتوتروپيک برروي انواع تکيه‌گاه داخلي الاستيک به‌روش نوار محدود اسپلاين

ايمان جنتي[i]; مجتبي ازهري[ii]

چكيده

در طراحي سازه‌ها بررسي پايداري ورق‌هاي نازک تحت فشار همواره در از اهميت ويژه‌اي برخوردار بوده‌است. با توجه به مشکلات حاکم بر حل دقيق معادلات ديفرانسيل مربوط به تحليل پايداري ورق‌ها، از روش‌هاي حل عددي استفاده مي‌شود. يکي از روش‌هاي عددي روش نوار محدود اسپلاين مي‌باشد. انواع تکيه‌گاه‌هاي داخلي الاستيک را مي‌توان با استفاده از مدل فنر الاستيک در اين روش اعمال نمود. در اين مقاله با استفاده از روش نوار محدود اسپلاين و همچنين معادلات پايداري صفحات برنامه‌اي کامپيوتري تنظيم شدکه، توانايي مدل‌کردن انواع تکيه‌گاه الاستيک و حل مسأله پايداري اين صفحات را دارد. کمانش موضعي صفحات ارتوتروپيک بر روي انواع تکيه‌گاه‌هاي داخلي الاستيک بررسي و صحت و دقت روش با روش‌هاي ديگر مقايسه مي‌شود. اين روش همانند ساير روش‌هاي نوار محدود، از ميزان هم‌گرايي مطلوبي برخوردار است. تأثير پارامترهاي موثر بر روي ضريب کمانش موضعي ورق مورد بررسي و مطالعه قرارگرفت. با استفاده از نتايج بدست آمده، مي‌توان محل مناسبي را براي قرار دادن نوع خاصي از تکيه‌گاه الاستيک با سختي مشخص، جهت رسيدن به مقادير بالاتري از ضرايب کمانش و افزايش پايداري ورق براي بارگذاري‌هاي داخل صفحه پيشنهاد نمود.

كلمات كليدي

کمانش موضعي، صفحات ارتوتروپيک، تکيه‌گاه الاستيک، روش نوار محدود اسپلاين.

Local Buckling of Orthotropic Plates on Elastic Supports Using Spline Finite Strip Method

I. Jannati; M. Azhari

ABSTRACT

The prediction of local stability of thin plates under compression has become increasingly important in structural design.

Numerical methods are employed to overcome the difficulties of exact solution for partial differential equations of plate’s stability. Spline Finite Strip Method is one of these numerical methods and different elastic supports attached to the plate may be handled using this method. In the present paper, local buckling of orthotropic plates resting on elastic supports are studied and results are compared with known solutions. It is shown that rapid convergence of the solution is obtained.

Local buckling coefficients of plates are calculated for various effective parameters. The optimum position of the elastic supports with specific stiffness is proposed in order to maximize the local buckling coefficients for plates subjected to in-plane loading.

KEYWORDS

Local Buckling, Orthotropic Plates, Elastic supports, Spline Finite Strip Method.

[i] كارشناسي‌ارشد مهندسي عمران - سازه; دانشگاه صنعتي اصفهان: Email: iman_jannati@yahoo.com
[ii] استاد دانشكده مهندسي عمران; دانشگاه صنعتي اصفهان: Email: .mojtaba@cc.iut.ac.ir

۱- مقدمه

براي ورق‌هايي كه بر روي انواع تكيه‌گاه‌هاي الاستيک قرار گرفته‌اند كاربردهاي بسياري مي‌توان يافت. بطور مثال مي‌توان به پايداري ورق روي فونداسيون ساختمان‌ها، بتن مسلح سنگفرش بزرگ‌راه‌ها و باند فرودگاه‌ها، همچنين ورق فلزي متكي بر پانل‌هاي ساندويچي اشاره كرد. در آناليز عرشه‌هاي پل بزرگ‌راه‌ها, ورقه‌هاي بدنه هواپيماها وكشتي‌ها و ورق‌هاي تقويت روي تيرها و ستون‌ها نيز مسأله كمانش ورق‌هاي نازک بر روي تكيه‌گاه‌هاي الاستيک مطرح است. كمانش بيشتر در اعضايي رخ مي‌دهد كه ابعاد آن در جهات مختلف تفاوت زيادي با يكديگر دارند. از اين رو، مقاومت سازه‌اي ورق‌ها كه ضخامتشان نسبت به ابعاد طولي و عرضي آنها بسيار كمتر است به شدت تحت بار گذاري‌هاي داخل صفحه آسيب پذيرند.

در تحليل صفحات برروي تكيه‌گاه الاستيک بسياري از محققان از مدل تكيه‌گاه وينكلر و به صورت الاستيک قائم و تكيه‌گاه دو پارامتري (داراي مقادير مساوي سختي تكيه‌گاهي قائم و دوراني) استفاده كرده و روش‌هاي عددي متفاوتي از قبيل روش‌هاي المان محدود و روش‌هاي المان مرزي را بكار گرفته‌اند. از انواع تكيه‌گاه مياني ورق مي‌توان به تكيه‌گاه الاستيک گسترده و ناحيه‌اي، تكيه‌گاه الاستيک خطي و تكيه‌گاه الاستيک نقطه‌اي اشاره نمود.

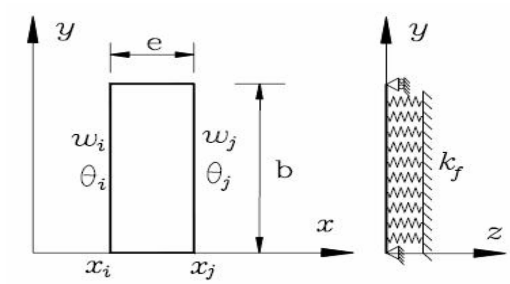
يكي از انواع روش‌هاي حل عددي معادلات ديفرانسيل ورق‌ها روش نوارهاي محدود[1] است كه خود انواع متفاوتي دارد. روش نوارهاي محدود معمولي در سال ۱۹۷۶ توسط چونگ [۱] براي بررسي رفتار ورق‌ها به‌طور كامل ارائه شد. در اين روش از توابع سينوسي شكل در طول نوار استفاده مي‌گردد. اين روش براي حل ورق‌هاي با شرايط انتهايي مفصلي به‌دليل انتخاب تابع شكل مناسب، بسيار ساده و سريع مي‌باشد. در صورتي‌كه براي ساير شرايط مرزي حل مسأله پيچيده‌تر و نيازمند صرف وقت بيشتري مي‌باشد. برادفورد و ازهري [۲] در سال ۱۹۹۵ با استفاده از توابع شكل غيرسينوسي، شرايط مرزي مختلف را مدل نمودند. علاوه بر اين، در حضور نيروي برشي، به دليل اختلاف فاز بين مودها، اين روش داراي همگرايي مناسب نبوده كه محدوديت بزرگي در حل مسايل كمانش تلقي مي‌گردد. براي غلبه بر اين محدوديت روش نوارهاي محدود مختلط ارائه گرديد.

روش نوارهاي محدود مختلط[2] خود به دو دسته نوارهاي محدود مختلط دقيق و نوارهاي محدود مختلط نيمه تحليلي تقسيم مي‌شود. روش نوارهاي محدود مختلط نيمه تحليلي در سال ۱۹۷۴ توسط پلانک و ويتريک معرفي‌گرديد[۳]. در اين روش تغيير مكان جانبي نوار در حين كمانش در جهت عرضي به صورت يک چند جمله اي از درجه ۳ و در جهت طولي به صورت نمايي مختلط فرض مي‌گردد. از مشخصات اين روش آن است‌كه فرض مي‌كند، خطوط اتصال اجزا مسطح پس از كمانش نيز مستقيم باقي مي‌مانند كه در مورد كماش كلي فرضي نادرست مي‌باشد. بنابراين روش ياد شده براي بررسي كمانش كلي مناسب نمي‌باشد.

روش ديگر ارائه شده براي تحليل رفتار ورق‌ها، روش نوار محدود اسپلاين[3] است. توابع اسپلاين در ابتدا توسط شونبرگ [۴] براي مسائل توزيع داده‌ها استفاده شد. به‌دليل سهولت استفاده از اين توابع در روند مشتق‌گيري و انتگرال‌گيري (چند جمله‌اي بودن) از اين توابع در روش‌هاي عددي نيز استفاده شد و توسط بسياري از محققان علوم سازه‌اي از جمله پرنتر [۵] كه براي درون‌يابي تغييرات طولي جابجايي مورد استفاده قرار گرفت. روش نوارهاي محدود اسپلاين در سال ۱۹۸۲ توسط فن [۶] براي استفاده در تحليل صفحات به صورت جامعي بسط داده شد. در اين روش از گره‌هاي متفاوتي در طول هر نوار استفاده مي‌شود و از اين جهت به روش اجزا محدود نزديک‌تر است. از مشخصات اين روش، قابليت مدل‌كردن شرايط مرزي مختلف و بارگذاري‌هاي پيچيده‌تر نسبت به ساير روش‌هاي نوار محدود مي‌باشد. ولي به‌واسطه وجود گره هاي طولي، تعداد درجات آزادي بيشتر بوده و بنابراين به زمان و حافظه كامپيوتري بيشتري احتياج است.

حل پايداري صفحات برروي تكيه‌گاه وينكلر و به صورت گسترده يكنواخت اولين بار در سال ۱۹۸۹ توسط كندي و ويليامز [۷] به روش تحليلي مورد استفاده قرارگرفت و توانستند حل صريحي براي كمانش و ارتعاش ورق‌هايي بر روي تكيه‌گاه يكنواخت ارائه دهند. كرسترن و همكارانش [۸] نيز اثر تكيه‌گاه‌هاي نقطه‌اي مياني را بر روي مسأله ارتعاش صفحات بررسي كردند. امورتاگ و آكوز [۹] با استفاده از نوعي روش تركيبي اجزا محدود ارتعاش آزاد صفحات را بر روي تكيه‌گاه گسترده الاستيک بررسي نمودند. رائو و راجو [۱۰] نيز به بررسي اثر شكل مودها در كمانش ورق‌هاي مستطيلي ارتوتروپيک مفصلي پرداختند. ماداسامي [۱۱] در سال ۱۹۹۴ براي اولين بار با استفاده از روش نوار محدود اسپلاين توانست ورق‌هاي سوراخ‌دار را كه بر روي تكيه‌گاه داخلي نقطه‌اي قرار دارند آناليز استاتيكي نمايد. ساها و گاتا [۱۲] در سال ۱۹۹۷ پايداري ديناميكي ورق‌ها را بر روي تكيه‌گاه وينكلر مورد بررسي قرار دادند. سعادت‌پور و همكاران

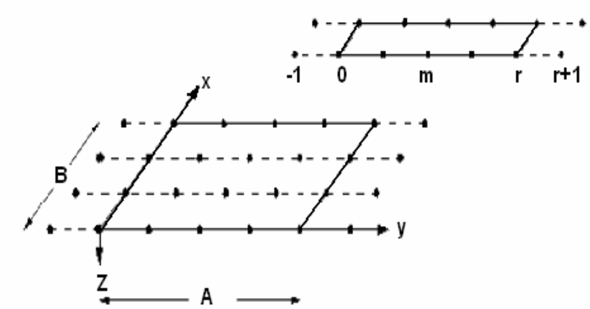
[۱۳] نیز با استفاده از روش گالرکین در سال ۱۹۹۸ توانستند، کمانش ورق را برروي تکیه‌گاه میاني بررسي کنند. برادفورد [۱۴] تحقیقات گسترده‌اي بر روي کمانش یک طرفه ورق‌ها انجام داده است که تحقیقات ایشان به نتایج قابل توجهي رسیده است در سال ۲۰۰۰ نیز حل مشابهي توسط ماتسوناگا [۱۵] براي مسأله پایداري ورق‌هاي ضخیم برروي این تکیه‌گاه‌ها ارائه گردید. درهمان سال هانگ [۱۶] توانست از روش نوار محدود معمولي براي تحلیل حالات خاصي از قرارگیري ورق‌هاي مستطیلي بر روي تکیه‌گاه الاستیک استفاده کند (شکل ۱). ازهري و عبدالهیان دهکردي [۱۷] نیز توانستند، با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین به بررسي پایداري ورق‌هاي ارتوتروپیک بپردازند در این مقاله نیز، از روش نوار محدود اسپلاین براي تحلیل پایداري ورق‌هاي متکي بر انواع تکیه‌گاه‌هاي الاستیک استفاده خواهد شد و نحوه‌ي استخراج ماتریس‌هاي سختي و هندسي و همچنین حل مسأله کمانش مربوط به این ورق‌ها توضیح داده خواهد شد.



شکل ۱: مدل فنرارائه شده براي تحلیل ورق متکي بر تکیه گاه الاستیک یکنواخت در روش نوار محدود

۲- روش نوار محدود اسپلاین و تعیین ماتریس‌هـاي سختي و هندسي

در روش نوارمحدود اسپلاین بر خلاف دو روش دیگر نوار محدود (نوار محدود عادي و مختلط)، در راستاي طولي نوارها گره‌هایي در نظر گرفته مي‌شود. در شکل ۲ چگونگي تقسیم بندي ورق به نوارهاي طولي و قرار گیري گره‌ها بر روي آن مشاهده مي‌شود. در شکل ۲ نوار ورق بوسیله‌ي r گره قسمت بندي شده است. براي اعمال شرایط مرزي دو لبه ابتدایي و انتهایي ورق، ۲ گره کمکي (در دو انتهاي نوار) نیز لازمند. پس در کل روي هر خط گره، $r+3$ گره مقطعي نیاز است. هر گره مقطعي نشان داده شده در شکل نیز داراي ۴ درجه آزادي (۳ درجه آزادي جابجایي و یک درجه آزادي دوراني حول لبه کناري نوار) مي‌باشد. از چهار درجه آزادي یاد شده دو درجه آزادي w و θ درجات آزادي خمشي و دو درجه آزادي u و v درجات آزادي غشایي مي‌باشد. در این مقاله درجات آزادي خمشي مورد بررسي قرار گرفته است.



شکل ۲: تقسیم بندي کل ورق به نوارهاي طولي در راستاي y با نمایش خطوط گرهي در روش نوار محدود اسپلاین

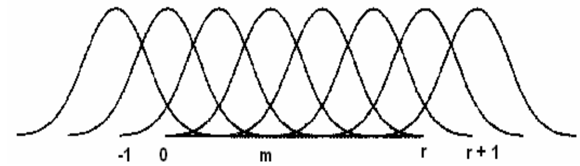
در روش نوار محدود اسپلاین براي درون‌یابي یک تابع اختیاري درفاصله $a \le y \le b$، ابتدا این فاصله بوسیله‌ي گره‌ها به تعداد r قسمت مساوي تقسیم مي‌شود.

$$\left(0 \le m \le r\,, y_0 = a\,, y_r = b\,, y_m = y_0 + m(b-a)/r\right)$$

از آنجا که این تابع در ناحیه‌ي خاصي مقدار دارد، قطعه‌اي [٤]نامیده مي‌شود. $\Phi_m(y)$ براي توابع اسپلاین مرتبه سوم B_3 (شکل ۳) با فواصل یکسان و مرکز $y = y_m$ به صورت رابطه ۱ تعریف مي‌شود.

$$\Phi_m(y) = \frac{1}{6h^3}\begin{cases} (y-y_{m-2})^3 & y_{m-2} \le y \le y_{m-1} \\ h^3 + 3h^2(y-y_{m-1}) + 3h(y-y_{m-1})^2 - 3(y-y_{m-1})^3 & y_{m-1} \le y \le y_m \\ h^3 + 3h^2(y_{m+1}-y) + 3h(y_{m+1}-y)^2 - 3(y_{m+1}-y)^3 & y_m \le y \le y_{m+1} \\ (y_{m+2}-y)^3 & y_{m+1} \le y \le y_{m+2} \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (۱)$$

در رابطه ۱، $h = \frac{b-a}{r}$ طول هر ناحيه است.



شکل ۳: نمايش چند تابع اسپلاين B_3 در حوالي گره m

با نوشتن توابع اسپلاين بر روي هر گره و استفاده از اصل بر هم نهي مي‌توان هر تابع پيوسته و مشتق‌پذير $f(y)$ را درون‌يابي نمود. اين مجموع توابع که با $s(y)$ نشان داده مي‌شود، به چهار تابع اسپلاين حوالي گره m وابسته است. پس همانطورکه گفته شد، دو گره کمکي y_{-1} و y_{r+1} براي درون‌يابي در قسمت اول و آخر مورد نياز است. سري توابع اسپلاين به صورت رابطه ۲، بيان مي‌شود.

$$s(y) = \sum_{m=-1}^{r+1} \alpha_m \Phi_m(y) \qquad (۲)$$

که در اين رابطه α_m ها ضرايب بدست آمده در حين درون‌يابي مي‌باشند، که از شرايطي نظير شرايط مرزي بدست آمده‌اند.

براي کمانش موضعي (تغيير شکل‌هاي خمشي) درجات آزادي در هر يک از گره‌ها شامل تغيير مکان قائم (w) و دوران حول محور طولي نوارها (θ_y) مي‌باشد که بايد به‌وسيله توابع شکل تخمين زده شود. براي درون‌يابي مقادير گره‌اي (شيب و جابجايي) در راستاي عرضي نوارها، از توابع شکل هرميتي و در راستاي طولي از يک چندجمله‌اي اسپلاين استفاده شده است. بنابراين مي‌توان تغيير مکان خمشي ورق را به صورت رابطه ۳ بيان نمود.

$$w = \sum_{m=-1}^{r+1} [N][\Phi]\{\delta_b\} \qquad (۳)$$

که در رابطه ۴ بصورت باز نشان داده شده است:

$$w = \sum_{m=-1}^{r+1} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} \{\Phi\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{\Phi\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\Phi\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\Phi\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\alpha_i] \\ [\beta_i] \\ [\alpha_j] \\ [\beta_j] \end{bmatrix} \qquad (٤)$$

توابع هرميتي که در راستاي عرضي نوارها قرار دارند، به صورت رابطه ۵ تعريف مي‌شوند. در اين روابط $\bar{x} = \frac{x}{b}$ و b عرض نوار مي‌باشد.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3 \\ N_2 &= x(1 - 2\bar{x} + \bar{x}^2) \\ N_3 &= 3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3 \\ N_4 &= x(\bar{x}^2 - \bar{x}) \end{aligned} \qquad (۵)$$

همچنين $\{\Phi\}$ برداري است، سطري که داراي $r+۳$ عضو که به صورت رابطه ۶ بيان مي‌شود.

$$\{\Phi\} = \{\Phi_{-1} \quad \Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \ldots \quad \Phi_{r+1}\} \qquad (٦)$$

ماتريس ستوني $[\delta_b]$ درجات آزادي ناشي از تغيير مکان‌هاي خمشي مي‌باشد. متغيرهاي اين ماتريس بردارهاي ستوني هستند که هر يک خود داراي $r+۳$ عضو مي‌باشد. اين متغيرها به شرح رابطه ۷ مي‌باشند:

$$\begin{aligned} [\alpha_i] &= [\alpha_{-1} \quad \alpha_0 \quad \ldots \quad \alpha_{r+1}]_i^T \\ [\beta_i] &= [\beta_{-1} \quad \beta_0 \quad \ldots \quad \beta_{r+1}]_i^T \\ [\alpha_j] &= [\alpha_{-1} \quad \alpha_0 \quad \ldots \quad \alpha_{r+1}]_j^T \\ [\beta_j] &= [\beta_{-1} \quad \beta_0 \quad \ldots \quad \beta_{r+1}]_j^T \end{aligned} \qquad (۷)$$

در روابط شماره ۷، مقادير α_i و α_j جابجايي قائم براي گره‌هاي مقطعي روي دو خط گره i و j (دو لبه کناري نوار) مي‌باشد و همچنين β_i و β_j دوران حول گره‌هاي مقطعي در همين خطوط گره‌اي مي‌باشد.

دراين روش هر نوع شرايط تکيه‌گاهي را مي‌توان به آساني مدل نمود. نحوه‌ي برآورده شدن شرايط مرزي در راستاي هر نوار با نوشتن شرط تکيه‌گاهي آن نقطه توسط اصلاح توابع اسپلاين انجام مي‌شود. به عنوان نمونه براي تکيه‌گاه ساده در ابتداي نوار مي‌توان نوشت:

شرط مرزي شماره ۱ : $w(y=0) = 0$ (۸)

شرط مرزي شماره ۲ : $\frac{\partial^2 w(y=0)}{\partial y^2} = 0$ (۹)

اگر براي يک خط گره اين دو شرط را نوشته و در توابع اسپلاين جايگذاري شوند، Φ_0 و Φ_{-1} حذف شده و مي‌توان $\overline{\Phi}_1$ را به صورت رابطه ۱۰ اصلاح نمود.

$$\overline{\Phi}_1(y) = \Phi_1(y) - \Phi_{-1}(y) \qquad (۱۰)$$

به همين صورت براي گره انتهايي نوار مي‌توان نوشت:

$$\overline{\Phi}_{m-1}(y) = \Phi_{m-1}(y) - \Phi_{m+1}(y) \qquad (۱۱)$$

براي شرايط لبه‌اي دو سر گيردار نيز مي‌توان شرايط لبه‌اي مشابه را اعمال نمود و مقادير اصلاحي توابع شکل رابه صورت روابط ۱۲و۱۳ به‌دست آورد.

$$\overline{\Phi}_1(y) = \Phi_{-1}(y) + \frac{1}{2}\Phi_0(y) + \Phi_1(y) \qquad (۱۲)$$

$$\overline{\Phi}_{m-1}(y) = \Phi_{m-1}(y) + \frac{1}{2}\Phi_m(y) + \Phi_{m+1}(y) \qquad (۱۳)$$

اگر U_p نشان‌دهنده انرژي ارتجاعي ورق و U_f، U_x، U_y به

ترتيب انرژي ارتجاعي تکيه‌گاه الاستيک قائم، تکيه‌گاه الاستيک دوراني حول محور x و y و V کار نيروهاي خارجي باشد، پس مي‌توان نوشت:

$$\Pi = \sum \prod_e = \sum (U_p + U_f + U_x + U_y - V) \qquad (١٤)$$

بنابراين با استفاده از اصل حداقل انرژي پتانسيل کل $(\delta \Pi = 0)$ مطابق با توابع تغييرمکان انتخاب شده مي‌توان درايه هاي ماتريس‌هاي سختي وماتريس پايداري هر نوار وتکيه‌گاه الاستيک مربوط به آن را استخراج نمود.

$$\{([K_p]+[K_f]+[K_x]+[K_y]) - \lambda [K_G]\}\{\overline{\delta}\} = \{0\} \qquad (١٥)$$

دررابطه ١۵، $[K_p]$، $[K_f]$، $[K_x]$ و $[K_y]$ به‌ترتيب ماتريس سختي خمشي براي کل ورق و ماتريس‌هاي سختي نظير تکيه‌گاه الاستيک قائم، تکيه‌گاه الاستيک دوراني حول محور x و y بوده که پس از استخراج ماتريس‌هاي سختي براي هرنوار از روابط الاستيسته (١۶) و سرهم نمودن آنها بر اساس درجات آزادي بدست مي‌آيند. در نهايت با حل يک مسأله مقدار ويژه، بار کمانشي صفحات بدست مي‌آيد.

$$\begin{aligned} [K_p] &= \int_A [B]^T [D][B] dA \\ [K_f] &= \int_A [\Phi]^T [N]^T k_f [N][\Phi] dA \\ [K_x] &= \int_A [G_x]^T k_x [G_x] dA \\ [K_y] &= \int_A [G_y]^T k_y [G_y] dA \end{aligned} \qquad (١٦)$$

که در روابط ١۶

$$[B] = \{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\}^T [N][\Phi] \qquad (١٧)$$

$$\begin{aligned} [G_x] &= \frac{\partial}{\partial x}[N][\Phi] \\ [G_y] &= \frac{\partial}{\partial y}[N][\Phi] \end{aligned} \qquad (١٨)$$

$$[D] = \frac{t^3}{12(1-\upsilon_x \upsilon_y)} \begin{bmatrix} E_x & \upsilon_y E_x & 0 \\ \upsilon_x E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}(1-\upsilon_x \upsilon_y) \end{bmatrix} \qquad (١٩)$$

در رابطه ١٩ نيز $[D]$ ماتريس صلبيت خمشي ورق ارتوتروپيک مي‌باشد. پارامترهاي t ضخامت ورق و E_x، E_y، μ_x، μ_y و G_{xy} ثابت‌هاي الاستيک براي ورق‌هاي ارتوتروپيک مي‌باشند. اگر ورق داراي رفتار ايزوتروپيک باشد، اين ضرايب به صورت رابطه ٢٠ جايگزين مي‌شود:

$$\begin{aligned} E_x &= E_y = E \\ \mu_x &= \mu_y = \mu \\ G_{xy} &= E / 2(1+\mu) \end{aligned} \qquad (٢٠)$$

در روابط(١۶) نيز، k_f ، k_x و k_y پارامترهاي نشان دهنده سختي انواع تکيه‌گاه‌هاي الاستيک مي‌باشند، که بسته به نوع آنها (گسترده، خطي، نقطه‌اي، پاره‌اي و حتي ترکيبي) با يک مدل رياضي مناسب محاسبه مي‌شوند. براي مثال براي تکيه‌گاه خطي در $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0$ و $x_1 \le x \le x_2$ مي‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} k_f(x,y) &= k_f H[(x_2 - x)(x - x_1)]\delta(y - y_0) \\ k_x(x,y) &= k_x H[(x_2 - x)(x - x_1)]\delta(y - y_0) \\ k_y(x,y) &= k_y H[(x_2 - x)(x - x_1)]\delta(y - y_0) \end{aligned} \qquad (٢١)$$

که در روابط ٢١، $\mathrm{H(x)}$ و $\delta(y)$ به ترتيب تابع يکه‌واحد وتابع دلتاي ديراک مي‌باشند. به‌صورت مشابه ماتريس سختي هندسي (پايداري) را نيز مي‌توان براي هر المان محاسبه کرد. براي ماتريس سختي هندسي $[K_G]$ نيز براي هر نوار مي‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} [K_G] &= \int_A [B_G]^T [T][B_G] dA \\ [B_G] &= \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}^T [N] \end{aligned} \qquad (٢٢)$$

در روابط يادشده نيز $[T]$ نيروهاي داخل صفحه اعمالي بر نوار مربوطه به صورت فشار و برش مي‌باشد که به صورت رابطه ٢٣ تعريف مي‌شود.

$$[T] = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} \qquad (٢٣)$$

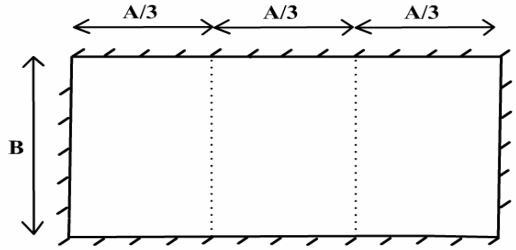
٣- نتايج

با نوشتن يک برنامه‌ي رايانه‌اي ومحاسبه ماتريس‌هاي سختي وپايداري نوارها و در نهايت محاسبه ماتريس سختي و پايداري کل ورق و حل مسأله مقدار ويژه مربوطه مقادير ضرائب کمانش را مي توان بدست آورد. با استفاده از برنامه‌ي مدون، مي‌توان ضرائب کمانش موضعي ورق‌ها با انواع مختلف شرايط مرزي نيرويي و تکيه‌گاهي را تعيين کرد.

٣-١- کنترل همگرايي ورق چهار طرف گيردار با نسبت $A/B=٢$ متکي بر دو تکيه‌گاه خطي قائم

ورق ايزوتروپيک[5] چهار طرف گيردار نيز با نسبت $A/B=٢$ و دو تکيه‌گاه الاستيک خطي قائم با سختي $\mathrm{k_f} = ١٠^٤$ در يک سوم‌هاي مياني آن همانند شکل۴ تحت نيروي فشاري

در راستاي y (طول ورق) مورد بررسي قرار گرفته است.



شكل۴: ورق ايزوتروپيک چهار طرف بر روي دو تکيه‌گاه الاستيک خطي با فواصل مساوي

مقادير ضريب كمانش K_{cr} براي ورق فوق نيز بر حسب تعداد تقسيمات تابع اسپلاين r در جدول ۱ آمده است و با مقدارمحاسبه شده توسط نرم افزار انسيس [۱۸] با همان تقسيم بندي مثال قبل مقايسه شده است.

جدول ۱ : ضريب كمانشي K_{cr} در مقابل r (تعداد تقسيمات تابع اسپلاين) براي ورق شکل۴

r	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	ANSYS [18]
K_{cr}	۱۸/۸۶۲	۸/۳۴۸	۷/۹۶۳	۷/۹۲۱	۷/۹۱۳	۷/۸۹۶	۷/۸۹۹	۷/۸۹۲

۳-۲- کنترل همگرايي ورق ارتوتروپيک چهار طرف مفصل با نسبت $A/B=۵$ تحت برش داخل صفحه

ورق ارتوتروپيک[۶] چهار طرف مفصل با نسبت $A/B=۵$ و مقادير صلبيت خمشي و ضريب پواسون زير نيز براي كنترل همگرايي مورد بررسي قرار گرفت و نتايج در با توجه به مقادير جدول ۲ مي‌توان گفت، براي ورق ارتوتروپيک ٤ طرف مفصل تحت برش نيز با درنظر گرفتن $r=۱۰$ مي‌توان به دقت مطلوب رسيد. پس همگرايي روش اشاره شده در مسائل برش، ضعيف‌تر از ساير مسائل مي‌باشد. بنابراين، روش نوار محدود اسپلاين همگرايي مناسبي براي حل پايداري ورق‌هاي ايزوتروپيک و ارتوتروپيک بر روي تکيه‌گاه‌هاي الاستيک داخلي با شرايط مرزي و نيرويي متفاوت دارد.

جدول ۲ با نتايج مرجع [۱۷] مقايسه شد.

$$E_x = 200\ Gpa \qquad \mu_x = 0.3$$

$$E_y = 20\ Gpa \qquad \mu_y = 0.03$$

$$G_{xy} = 7.06356\ Gpa$$

$$D_x = 16.818\ kN.m \qquad D_y = 1.6818\ kN.m$$

$$D_1 = \mu_y . D_x = 0.50454\ kN.m \qquad D_{xy} = 0.5886\ kN.m$$

$$\frac{D_x}{D_y} = 10 \qquad \frac{D_1 + 2D_{xy}}{D_y} = 1.0$$

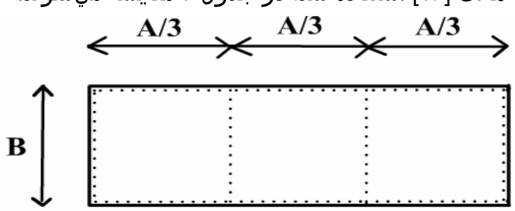
با توجه به مقادير جدول ۲ مي‌توان گفت، براي ورق ارتوتروپيک ٤ طرف مفصل تحت برش نيز با درنظر گرفتن $r=۱۰$ مي‌توان به دقت مطلوب رسيد. پس همگرايي روش اشاره شده در مسائل برش، ضعيف‌تر از ساير مسائل مي‌باشد. بنابراين، روش نوار محدود اسپلاين همگرايي مناسبي براي حل پايداري ورق‌هاي ايزوتروپيک و ارتوتروپيک بر روي تکيه‌گاه‌هاي الاستيک داخلي با شرايط مرزي و نيرويي متفاوت دارد.

جدول ۲ : ضريب كمانشي K_{cr} در مقابل r براي ورق ارتوتروپيک با $A/B=۵$ تحت برش

R		۴	۶	۸	۱۰
K_{cr}	روش حاضر	۶۹/۳۲۴	۳۷/۲۱۷	۲۷/۰۸۷	۲۴/۹۷۶
	مرجع [۱۷]	۷۰/۳۶۶	۳۷/۷۷۵	۲۸/۴۶۴	۲۴/۹۸۴

۳-۳- بررسي صحت نتايج ورق چهارطرف مفصل با نسبت $A/B=۳$ متكي بر دو تكيه‌گاه خطي قائم

با روش گفته شده، ورق ايزوتروپيک چهار طرف مفصل با نسبت طول به عرض مساوي ۳ كه مطابق شكل ۵ بر روي دو تكيه‌گاه الاستيک خطي در فواصل مساوي قرارگرفته تحليل شده و نتايج حاصل، با نتايج روش نوارمحدود معمولي كه به وسيله هانگ [۱۶] استفاده شد، در جدول ۳ مقايسه مي‌شوند.



شكل ۵ : ورق چهار طرف مفصل بر روي دو تكيه‌گاه خطي

خطي براي مقادير مختلف طول موج λ_i

در اين جدول پارامتر k_f ضريب بدون بعد است كه به صورت لگاريتمي براي ورق ايزوتروپيک اعمال مي‌شود. اين ضريب نشان دهنده مقادير متفاوت سختي قائم تكيه‌گاه الاستيک مي‌باشد. براي نشان دادن اثر آن‌ها اين مقادير به صورت لگاريتمي تغيير مي‌كنند. با دقت در جدول فوق مي‌توان دريافت، از آنجا كه روش هانگ روش نوار محدود

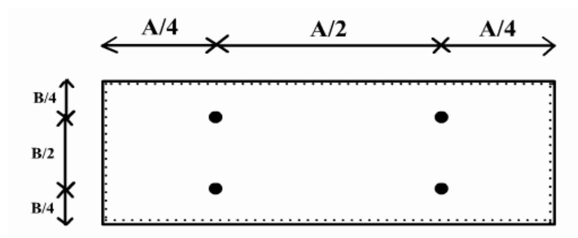
جدول۳: ضرايب کمانش موضعي ورق متکي بر تکيه گاه خطي براي مقادير مختلف طول موج λ_i

k_f	λ_1		λ_2		λ_3		λ_4		λ_5	
	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]
۰	۴/۰۰۱۲	۴/۰۰۰	۴/۳۴۸۴	۴/۳۴۰۳	۴/۶۹۴۶	۴/۶۹۴۶	۵/۱۷۴۸	۵/۱۷۴۸	۶/۳۷۵۱	۶/۲۵۰۸
۱۰۲	۴/۰۱۳	۴/۰۰۰	۴/۳۵۶۶	۴/۴۰۴۳	۴/۷۰۵۲	۴/۷۰۵۲	۵/۱۸۱۱	۵/۱۸۱۱	۶/۳۸۰۵	۷/۲۶۸۹
۱۰۳	۴/۰۵۵	۴/۰۰۰	۴/۴۰۴۸	۴/۴۱	۴/۷۸۷۳	۵/۷۸۷۳	۵/۲۴۷۹	۵/۲۴۷۹	۶/۴۲۵۵	۷/۷۰۰۵
۱۰۴	۴/۱۰۳	۴/۰۰۰	۴/۴۶۳۴	۴/۴۱۰۷	۴/۹۴۲۳	۴/۹۴۲۳	۵/۵۵۸۷	۵/۵۵۸۷	۶/۶۱۷۷	۷/۷۰۲۹
۱۰۵	۴/۱۱۹۲	۴/۰۰۰	۴/۴۷۳۹	۴/۴۱۰۷	۵/۰۲۴۱	۵/۰۲۴۱	۵/۷۵۸۸	۵/۷۵۸۸	۶/۷۴۰۴	۷/۷۰۳۲
۱۰۶	۴/۱۳۹۶	۴/۰۰۰	۴/۴۷۵۱	۴/۴۱۰۷	۵/۱۵۹۲	۵/۱۵۹۲	۶/۱۰۷۹	۶/۱۰۷۹	۶/۷۹۳۵	۷/۷۰۳۲

ساده است، وجود تکيه‌گاه خطي الاستيک را در مقادير طول نيم موج کمانشي (براي ورق چهار طرف مفصل عرض نوار) نـشان نمي‌دهد. ولي روش ارائـه شـده توانـسته اسـت، ايـن ضـعف را قدري مرتفع نمايد.

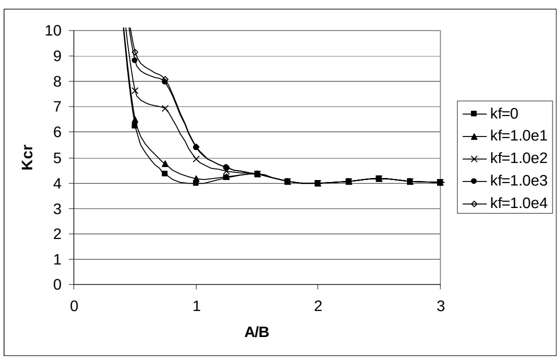
۳-٤- ورق ايزوتروپ چهار طرف مفصل متکي بـر چهـار تکيه‌گاه الاسـتيک نقطـه‌اي در راسـتاهاي قـائم و دوراني

در اين مثال ورق ايزوتروپيک چهار طرف مفصل متکي بر تکيه‌گاه الاستيک نقطه‌اي مطابق شکل ۶ با سختي قائم (k_f) و سختي حول عرض و طول ورق (k_x و k_y) تحت نيروي فشاري در راستاي طولي ورق بررسي مي‌شود.



شکل ۶ : ورق چهار طرف مفصل متکي بر روي چهار تکيه‌گاه نقطه‌اي الاستيک مطابق شکل

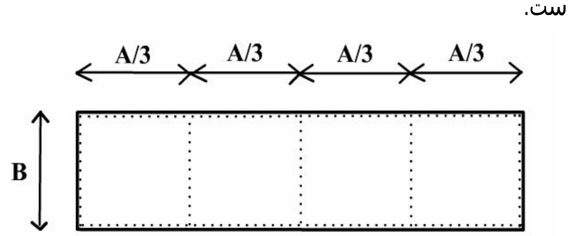
با دقت در نمودارهاي شکل ۷ مشاهده مي‌شود که وجود اين تکيه‌گاه‌ها تنها براي ورقهاي با $A/B < ۱۵$ مي‌توانـد بر ضريب کمانش موضعي تأثيرگذار باشد. براي مثال‌هايي که در آن‌ها سختي تکيه‌گاهي دوراني نيز وجود داشته نمودارهاي مشابهي بدست آمده است. از اينرو وجود تکيه‌گاه‌هاي نقطه‌اي به اين شکل تنها براي ورق‌هاي با اشکال نزديک به مربعي مي‌تواند موثر باشد.



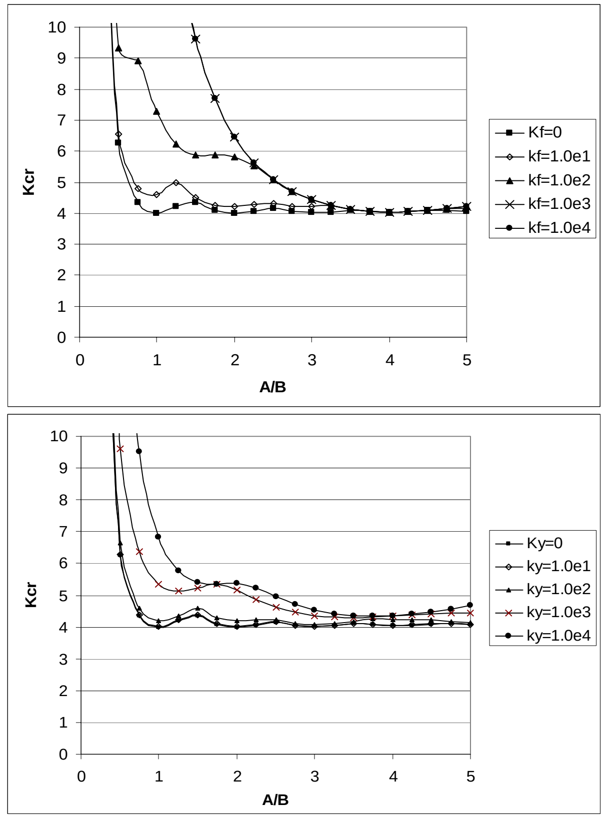
شکل ۷ : ضرايب کمانش ورق شکل ۶ براي مقادير مختلف طول به عرض ورق سختي تکيه‌گاه الاستيک قائم k_f

۳-۵- ورق ايزوتروپ چهار طرف مفـصل بـر روي سـه تکيه‌گاه الاستيک خطي با سختي در راستاهاي قائم و دوراني

اين بار نيز ورق چهار طرف مفصل بر روي سه تکيه‌گاه خطي الاستيک مطابق شکل ۸ با فواصل مساوي بررسي شده است.



شکل ۸ : ورق چهار طرف مفصل بر روي ۳ تکيه‌گاه خطي الاستيک

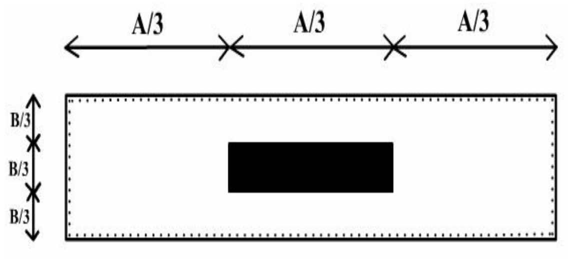


شکل۹ - ضرایب کمانش ورق شکل۸ براي مقادیر مختلف و سختي تکیه‌گاه الاستیک k_f و k_y

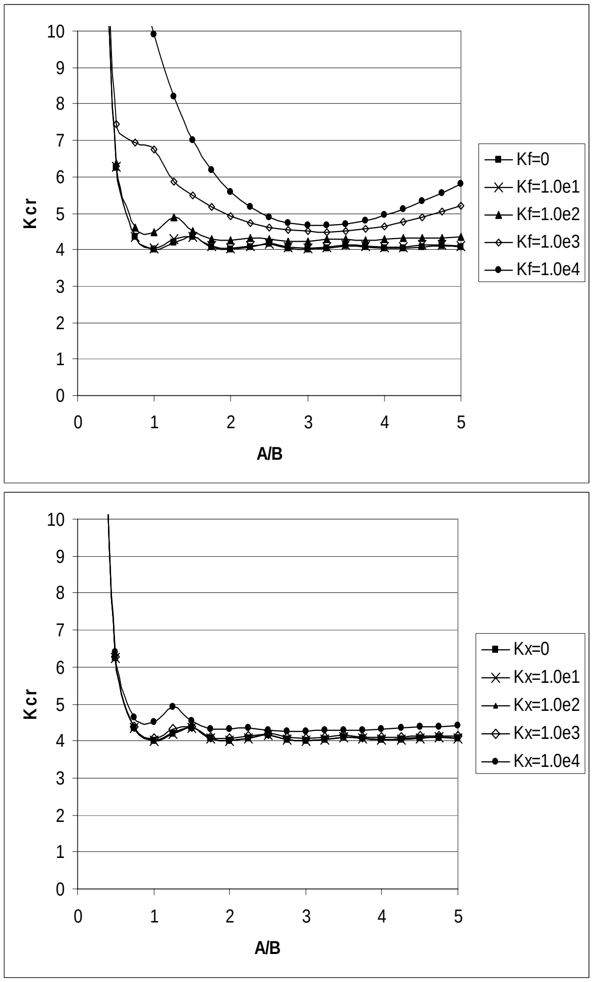
با دقت در شکل۹ مي‌توان دریافت که تمام نمودارهاي مربوط به سختي تکیه‌گاهي k_f در$A/B=4$ به هم رسیده‌اند. دلیل این امر یکي بودن طول نیم موج کمانشي با فاصله بین تکیه‌گاه‌هاي الاستیک است. همچنین اگر نسبت طول به عرض ورق نزدیک به ٤ یا بیشتر باشد، وجود تکیه‌گاه الاستیک خطي تاثیر چنداني نخواهد داشت. براي سختي تکیه‌گاهي دوراني k_x هم نمودارهاي مشابهي بدست آمده است. اما براي شکل مربوط به سختي تکیه‌گاهي دوراني k_y وجود این تکیه‌گاه الاستیک باعث افزایش ضریب بار کمانشي در بیشتر نقاط به خصوص حوالي $A/B=2$ شده است.

۳-۶- ورق ایزوتروپ چهار طرف مفصل روي تکیـه‌گـاه الاستیک ناحیه‌اي براي سختي در راستاهاي قـائم و دوراني

در این مثال یک تکیه‌گاه الاستیک ناحیه‌اي مطابق در زیر ورق ایزوتروپیک چهار طرف مفصل قرار گرفته است. پایداري این ورق برحسب بار اعمالي در راستاي طول ورق بررسي شده است. (در ناحیه تیره رنگ ورق بر روي تکیه‌گاه گسترده الاستیک با سختي یکنواخت قرار دارد.)



شکل ۱۰: ورق چهار طرف مفصل بر روي تکیه‌گاه ناحیه‌اي الاستیک

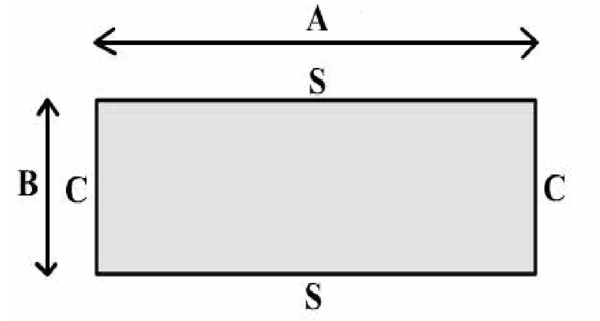


شکل۱۱ : ضرایب کمانش ورق شکل ۱۰ براي مقادیر مختلف A/B و سختي تکیه‌گاه الاستیک k_f و k_x

با توجه به شکل ۱۰ مي‌توان گفت افزایش سختي تکیه‌گاهي k_f توانسته درهمه جا افزایش ضریب بار کمانشي را نتیجه دهد. اما این افزایش در حوالي $A/B=3$ مقدار کمتري است. ولي براي افزایش سختي تکیه‌گاهي k_x ، وجود تکیه‌گاه الاستیک دوراني به شکل فوق نتوانسته است، آن‌چنان که انتظار مي‌رفت، باعث افزایش ضریب کمانش شود. براي سختي تکیه‌گاهي k_y هم نتایج مشابه به‌دست آمد.

۳-۷- ورق ارتوتروپ دوطرف مفصل- دو طرف گیردار روي تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت براي سختي در راستاهاي قائم و دوراني

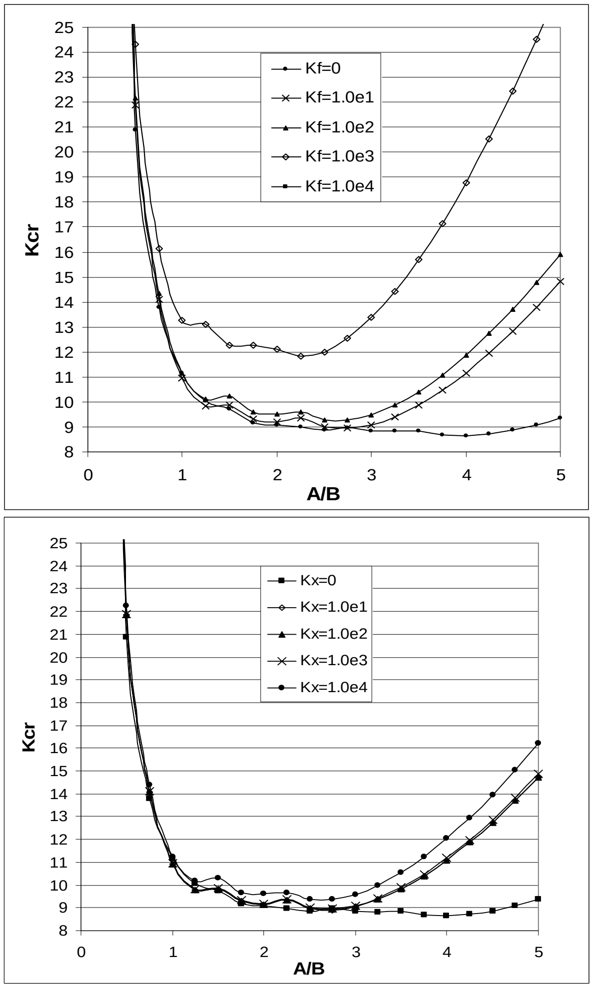
در این مثال یک تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت مطابق شکل۱۲ در زیر کل ورق ارتوتروپیک دوطرف مفصل–دوطرف گیردار قرار گرفته است. خصوصیات مکانیکي ورق ارتوتروپیک همان خصوصیات ورق مثال دوم مي‌باشد. پایداري این ورق برحسب بار اعمالي در راستاي طول ورق مورد بررسي قرار گرفته است.(S لبه‌ي مفصلي و C لبه‌ي گیردار است.)



شکل۱۲ : ورق دو طرف گیردار- دو طرف مفصل بر روي تکیه‌گاه یکنواخت الاستیک

در این‌جا نیز مقادیر مختلف سختي براي تکیه‌گاه قائم و تکیه‌گاه دوراني الاستیک بررسي شده و ضرایب کمانش بر حسب مقادیر مختلف طول به عرض ورق محاسبه شده اند. از آن‌جا که این تکیه‌گاه در زیر کل ورق گسترده است، به نظر مي‌رسد نسبت به سایر انواع تکیه‌گاه تأثیر بیشتري در ضریب کمانش داشته باشد.

با توجه به نمودارهاي شکل ۱۳ مي‌توان گفت براي سختي‌هاي حدود $k_f = 10^2$ و کمتر وجود تکیه‌گاه الاستیک در۳ $\geq A/B$ نتوانسته است، تأثیر چنداني بر ضریب کمانش ورق ارتوتروپیک بگذارد. اما براي۳ $< A/B$ افزایش سختي تکیه‌گاه الاستیک قائم توانسته است، به مقدار قابل ملاحظه‌اي باعث افزایش سختي تکیه‌گاه الاستیک شود.

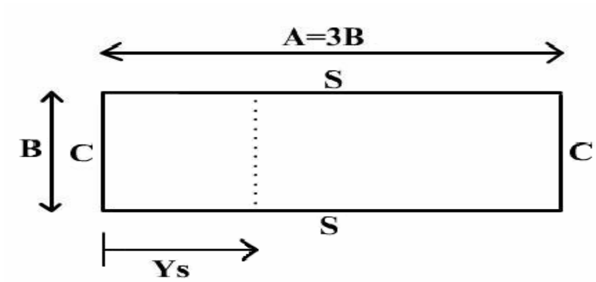


شکل ۱۳ : ضرایب کمانش ورق شکل ۱۲ براي مقادیر مختلف A/B و سختي تکیه‌گاه الاستیک k_f و k_x

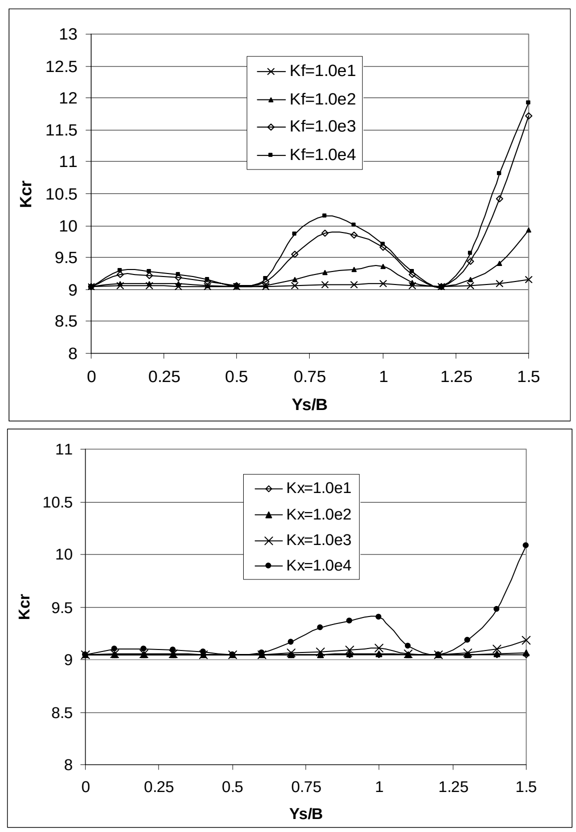
براي سختي‌هاي قائم بسیار بزرگتر از $k_f = 10^2$ وجود تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت توانسته است، در همه‌ي مقادیر طول به عرض ورق باعث افزایش ضریب کمانش ورق شود. در نمودارهاي مربوط به سختي دوراني k_x نیز براي سختي‌هاي حدود $k_f = 10^3$ و کمتر وجود تکیه‌گاه الاستیک در۳ $\geq A/B$ نتوانسته است، تأثیر چنداني بر ضریب کمانش ورق ارتوتروپیک بگذارد. اما براي ۳< A/B افزایش سختي تکیه‌گاه الاستیک قائم توانسته است، به مقدار قابل ملاحظه‌اي باعث افزایش سختي تکیه‌گاه الاستیک شود. براي سختي‌هاي بسیار بزرگ‌تر از $k_f = 10^3$ وجود تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت توانسته است در بیشتر مقادیر از نسبت A/B ورق باعث افزایش ضریب کمانش ورق شود. در این جا نیز وجود سختي تکیه‌گاهي k_y نتایجي مشابه سختي k_x مي‌دهد.

۳-۸- کنترل تأثير محل قرارگيـري تکيـه‌گـاه خطـي بـا فاصله متغير در طول ورق برضريب کمـانش ورق ارتوتروپيک

در اين مثال ورق ارتوتروپيک دو طرف مفصل– دو طرف گيردار روي يک تکيه‌گاه الاستيک خطي مطابق شکل ۱۴ قرار گرفته که محل آن در راستاي طول ورق متغير است. خصوصيات مکانيکي ورق ارتوتروپيک همان خصوصيات ورق مثال دوم مي‌باشد. پايداري اين ورق برحسب بار اعمالي در راستاي طول ورق مورد بررسي قرار گرفته است.

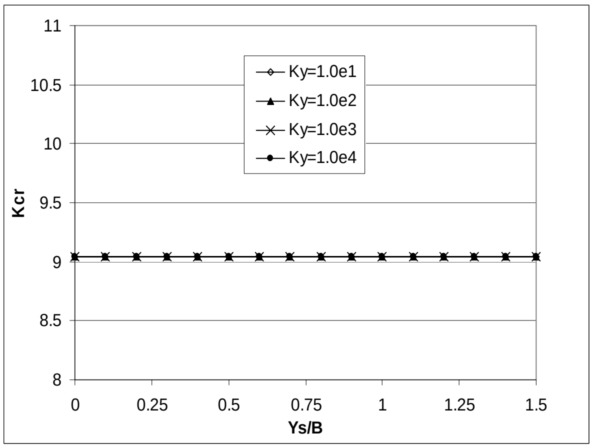


شکل ۱۴ : ورق دو طرف مفصل– دو طرف گيردار ارتوتروپيک بر روي تکيه‌گاه الاستيک خطي با فواصل متغير



شکل ۱۵: ضرايب کمانش ورق شکل ۱۳ براي مقادير Y_S / B و سختي تکيه‌گاه الاستيک k_f و k_x

با توجه به شکل ۱۵ نيز مشاهده مي‌شود که، نمودارهاي مربوط به k_f و k_x داراي شباهت‌هاي زيادي با هم هستند. در اين دو شکل قرار گرفتن تکيه‌گاه خطي الاستيک در $Y_s = ۰/۵B$ و $Y_s = ۱/۲B$ تأثيري در ضريب کمانش ورق ارتوتروپيک ندارد. بيشترين تأثير را مي‌توان به‌ترتيب در مقادير $Y_s /B=۱/۲$ و $Y_s /B=۰/۸$ دانست. همچنين افزايش ضرايب سختي k_f و k_x باعث بالا رفتن ضريب کمانش ورق مي‌شود.



شکل ۱۶ : ضرايب کمانش ورق شکل ۱٤ براي مقادير Y_S / B و سختي تکيه‌گاه الاستيک k_y

از شکل ۱۶ مشاهده مي‌شود که قرار دادن تکيه‌گاه الاستيک خطي با سختي k_y درتمام ورق ارتوتروپيک نتوانسته است، اثري بر ضريب بار کمانشي داشته باشد. دليل اين امر را شايد تفاوت صلبيت بالاي ورق ارتوتروپيک در دو راستا دانست. در حقيقت وجود تکيه‌گاه الاستيک خطي با سختي ياد شده نتوانسته اثر آنچناني بر اين مقادير داشته باشد.

۴- نتيجه

همانطورکه ديده شد روش نوار محدود اسپلاين توانايي بالا در مدل‌کردن صفحات متکي بر انواع تکيه‌گاه‌هاي الاستيک دارد و در مقايسه با ساير روش‌هاي موجود جواب‌هايي با دقت مطلوب ارائه مي‌دهد. با اين روش مي‌توان انواع شرايط مرزي جابجايي و نيرويي را مدل‌کرد. براي ورق‌هايي با $A/B> ۱/۵$ متکي بر تکيه‌گاه نقطه‌اي مي‌توان گفت وجود اين تکيه‌گاه‌هاي الاستيک اثر چنداني بر ضريب کمانش موضعي ندارد. در ورق‌هاي چهار طرف مفصل طول نيم موج کمانشي براي مود اول کمانش برابر عرض ورق مي‌باشد و قرار دادن تکيه گاه‌هاي الاستيک با سختي قائم و دوراني در راستاي x در اين نقاط اثر چنداني در ضريب کمانش ندارد. البته در محل ياد شده،

وجود تکيه‌گاه‌هايي با سختي دوراني در راستاي y با توجه به دليل ذکر شده باعث افزايش قابل ملاحظه‌اي در ضريب کمانش مي‌شود. همچنين در ورق‌هاي ايزوتروپيک از سختي تکيه‌گاهي $k_s=10^4$ به بالا مي‌توان تکيه‌گاه الاستيک را صلب فرض نمود. در ورق‌هاي ارتوتروپيک با تکيه‌گاه الاستيک يکنواخت و سختي‌هاي تکيه‌گاهي در حد $k_s=10^2$ و کمتر وجود اين تکيه‌گاه در $A/B \le 3$ نتوانسته است، تأثير چنداني بر ضريب کمانش بگذارد. اما براي $A/B > 3$ افزايش سختي تکيه‌گاه الاستيک قائم توانسته است، به مقدار قابل ملاحظه‌اي باعث افزايش سختي تکيه‌گاه الاستيک شود.

۵- مراجع

[۱] Cheung, Y.K., Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergoman Press, Oxford, U. K., 1976.

[۲] Bradford, M.A., Azhari, M., Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method, Computers & Structures, Vol. 56, No. 1-3, pp. 75-83, 1995.

[۳] Plank, R.J., Wittrick, W.H., Buckling under combined loading of thin flat-walled structures by a complex finite strip method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8, pp. 323-339, 1974.

[۴] Kress, R., Numerical Analysis, Springer, 1998

[۵] Prenter, P.M., Spline and Variation Methods, Wiley, New York, 1975.

[۶] Fan, S.C., Spline finite strip in structural analysis, PhD Thesis, University of Hong Kong, 1982.

[۷] Kennedy, D., Williams, F.W., Vibration and buckling of anisotropic plate assemble with Winkler foundation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 138, pp. 501-510, 1990.

[۸] Kerstern, J.G.M. , Laura, P.A.A. , Grossi, R.O. , Ercoli, L. , Vibration of rectangular plates with point support, Journal of Sound and Vibration, Vol. 89, No. 2, pp. 291-293, 1983.

[۹] Omurtag, M.H., Akuz, A.Y., Free vibration of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential, Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 40,pp. 295-317, 1997.

[۱۰] Raju, K.K., Rao, G.V., Mode shape change in the stability problem and it's effect on the vibration behavior of simply-supported orthotropic rectangular plates on elastic foundation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 175, No.5, pp. 693-699, 1994.

[۱۱] Madasamy, C.M., Kalyanaraman, V., Analysis of plate structures with rectangular cutouts and internal supports using the Spline finite strip method, Computers & Structures, Vol. 52, No.2, pp. 277-284, 1994.

[۱۲] Saha, K.N., Kar, R.C., Gatta, P.K., Dynamic stability of rectangular plate on non-homogeneous Winkler foundation, Computers and Structures, Vol. 63, No. 6, pp. 1213-1222, 1997.

[۱۳] Saadatpour, M.M., Azhari, M., Bradford, M.A., Buckling of arbitrary quadrilateral plates with intermediate supports using the Galerkin method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 164, Issue 3-4, pp. 297-306, 1998.

[۱۴] Bradford, M.A., Smith, S.T., Oehlers, D.J., Elastic buckling of unilaterally Constrained Rectangular in Pure Shear, Engineering Structures, Vol. 21, pp. 443-453, 1997.

[۱۵] Matsunaga, H., Vibration and stability of thick plates on elastic foundation, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 126, No. 1, pp. 27-34, 2000.

[۱۶] Huang, M.H., Thambiratnam, D.P., Analysis of plate resting on elastic supports and elastic foundation by finite strip method, Computers and Structures, Vol. 79, pp. 2547-2557, 2001

[۱۷] Azhari, M., Abdollahian, M., Bradford, M.A., Local buckling of composite laminated plates assemblies using the Spline finite strip method, Advances in Structural Engineering, Vol. 3, No.2, pp. 173-178, 2000.

[۱۸] ANSYS(R) Release 8.1 Build: 2004.0329 .Copyright 1994-2004 by SAS IP

۶- زيرنويس ها

[1] Finite Strip Method
[2] Complex F.S.M.
[3] Spline F.S.M.
[4] Piece-wise
[5] Isotropic
[6] Orthotropic