مروری بر روش های هدف گذاری در تحلیل پوششی داده ها

غلامرضا جهانشاهلو[۱] فرهاد حسین زاده لطفی[۲*] رضا فلاح نژاد[۳]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه تربیت معلم، تهران - ایران

[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران –ایران

[۳] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خرم آباد - ایران

چکیده

تحلیل پوششی داده ها(DEA) به عنوان یکی از مهم ترین ابزار هدف گذاری مورد استفاده قرار می گیرد. در این مقاله روش های موجود در نوشته ها جمع آوری و مقایسه شده اند.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، هدف گذاری

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها، یک روش غیر پارامتری بر مبنای برنامه ریزی ریاضی است که برای ارزیابی عملکرد DMU ها، تنها به ورودی ها و خروجی ها نیاز دارد. مدل های اساسی DEA، به طرق مختلفی ساخته می شوند که یکی از مهم ترین آنها، روش اصول موضوعه است. پایه ی وجودی این روش، تعریف مجموعه ی امکان تولید توسط فارل(۱۹۵۷) است. مبنای مدل هایی که از این روش به دست می آیند، حرکت به سوی مرز در راستای از پیش تعیین شده است.

در این مقاله، تعدادی از مدل هایی که از آنها برای به دست آوردن اهداف می توان از آنها استفاده کرد، معرفی شده است. همچنین، مسائل مختلفی بیان شده است که به وسیله ی روش های معمولی DEA نمی توان برای آنها اهداف مورد قبول مدیر ارایه داد و برای آنها اهداف خاصی تعریف شده است. در بخش دوم به معرفی کوتاهی از DEA پرداخته شده است. در بخش سوم، در خصوص هدف گذاری و مدل های مختلف هدف گذاری بحث شده است. در پایان نتیجه گیری و پیشنهادات آورده شده است.

۲ تحلیل پوششی داده ها

فرض کنید که n واحد داریم که هر کدام از m ورودی برای تولید s خروجی استفاده می کند. همچنین فرض کنید که X_o و Y_o بردارهای ورودی و خروجی DMU_o باشند که $X_o \geq 0\ ,\ X_o \neq 0$ و $Y_o \geq 0\ ,\ Y_o \neq 0$. کارآیی DMU_o بوسیله ی مدل CCR/ε به صورت زیر ارزیابی می شود:

* عهده دار مکاتبات: hosseinzadeh_lotfi@yahoo.com

$$\begin{aligned} Min \quad & \theta - \varepsilon(1^T S^- + 1^T S^+) \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j + S^- = \theta X_o \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j - S^+ = Y_o \\ & \lambda_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \ , \ S^- \geq 0 \ , \ S^+ \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

که در آن $\varepsilon > 0$ یک عدد غیر ارشمیدسی است که به صورت کوچکتر از هر عدد حقیقی مثبت تعریف می شود. این بدان معنی است که ε یک عدد حقیقی نیست. دوآل مسأله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Max \quad & U^T Y_o \\ s.t. \quad & U^T Y_j - V^T Y_j \leq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n \\ & V^T X_o = 1 \\ & V \geq 1\varepsilon \ , \quad U \geq 1\varepsilon \end{aligned} \qquad (۲-۲)$$

که مدل CCR در ماهیت خروجی نامیده می شود.

۳. مروری بر روش های هدف گذاری در تحلیل پوششی داده ها

۳-۱هدف از نوع تصویر معمولی

نقاط روی مرز کارآیی، کاندیدایی برای الگو یا هدف شدن می باشند. معمولی ترین هدف بوسیله ی جواب های حاصل از مدل CCR در بررسی DMU مورد ارزیابی حاصل می شود. بدین ترتیب که مدل CCR دو فازی را برای ارزیابی DMU_o در نظر می گیریم. فرض θ^*، λ^*، S^{-^*} و S^{+^*} مقادیر بهین مدل CCR باشند، و همچنین فرض کنید که $E_o = \{j : \lambda_j^* > 0\}, \ (j = 1,\ldots,n)$، در این صورت هدف متناظر با DMU_o به شکل زیر بیان می گردد:

$$\hat{X}_o = \theta^* X_o - S^{-^*} = \sum_{j \in E_o} \lambda_j^* X_j \leq X_o \quad , \quad \hat{Y}_o = Y_o + S^{+^*} = \sum_{j \in E_o} \lambda_j^* X_j \geq Y_o$$

این روابط پیشنهاد می کنند که اگر مقادیر ورودی به طور شعاعی به نسبت θ^* کاهش یابند و مقدار اضافی ورودی مصرف شده S^{-^*} کم شود، و همچنین مقادیر خروجی به اندازهٔ S^{+^*} افزایش یابند،کارآیی DMU_o می تواند بهبود یابد.

۳-۲ اهداف کراندار

در عمل، ممکن است ورودی ها/خروجی های نقطه ی تصویر کارآ به بازه های کراندار محدود شود. برای مثال، در محاسبهٔ کارآیی بانک ها، ممکن است که میانگین سن کارمندان(i –امین اندیس ورودی) با مقدار ۳۰ باشد و برای بانک تحت بررسی، مقدار کارآیی اش در ماهیت ورودی ۰/۱ باشد. بنابراین، نقطه ی تصویر واحد تحت بررسی دارای مقدار ۳ در i –امین اندیس ورودی اش می باشد که غیر منطقی است. به منظور رفع مشکل فوق، نیاز به اضافه کردن دو مجموعه از قیود زیر به مدل CCR/ε داریم:

$$a^i \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le b^i \qquad i=1,\dots,m$$

$$c^r \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \le d^r \qquad r=1,\dots,s$$

a^i، b^i، c^r و d^r که $r=1,\dots,s$ ، $i=1,\dots,m$ دقیقاً معلوم هستند، که می توانند به وسیله ی مدیر یا کاربران انتخاب شوند. مدلی که در این فرم استفاده می شود به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{lll}
Min & \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) & \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ip} \ , & i=1,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} & r=1,\dots,s \\
 & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - \alpha_i^- = a^i & i=1,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + \beta_i^- = b^i & i=1,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - \gamma_r^+ = c^r & r=1,\dots,s \\
 & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} + \delta_r^+ = d^r & r=1,\dots,s \\
 & \lambda_j \ge 0 & j=1,\dots,n \\
 & \alpha_i^-, \beta_i^-, s_i^- \ge 0 & i=1,\dots,m \\
 & \gamma_r^+, \delta_r^+, s_r^+ \ge 0 & r=1,\dots,s
\end{array}
\qquad (۱-۳)
$$

۳-۳ مدل هایی برای یافتن اهداف از نوع $MPSS$

نقاط $MPSS$ دارای بیشترین اندازه ی بهره وری در تمام نقاط مجموعهٔ امکان تولید می باشند، لذا نقاط مناسبی برای انتخاب الگو یا هدف می باشند. در ادامه، دو دسته از مدل هایی که اهدافی از نوع $MPSS$ را انتخاب می کنند، معرفی می نماییم، یکی مدل بنکر و دیگری مدل هایی برای یافتن بزرگترین و کوچکترین اندازه ی $MPSS$.

۳-۳-۱ مدل بنکر برای یافتن اهداف از نوع $MPSS$

هدف $MPSS$ مبنای بنکر با حرکت هدف معمولی به طرف فصل مشترک مرز CCR و BCC به دست می آید. بنکر، هدف را توسط تقسیم هدف معمولی بر $\sum_{j\in J_{CRS}} \lambda_j^*$ به دست آورد. هدف قرار داده شده در این روش $TRGT_{MPSS} = (X_{MPSS}, Y_{MPSS})$ می باشد که در آن بردارهای X_{MPSS} و Y_{MPSS} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} X_{MPSS} = \dfrac{\theta_{CRS}^{*} . X_o - S_{CRS}^{-\,*}}{\sum\limits_{j \in J_{CRS}} \lambda_j^{*}} \\ Y_{MPSS} = \dfrac{Y_o + S_{CRS}^{+\,*}}{\sum\limits_{j \in J_{CRS}} \lambda_j^{*}} \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

که در آن، $J_{CRS} = \{ j : DMU_j \in E_{CRS} \}$ و E_{CRS} مجموعه ی واحدهای تصمیم گیرنده ی کارآی کلی می باشد.

۳-۳-۲ مدلی برای کارآی کلی ساختن واحدهای ناکارآی قیاسی در بزرگترین اندازه $MPSS$

الف: ماهیت ورودی

فرض کنید DMU_o یک واحد ناکارآی قیاسی با مقادیر ورودی، خروجی (X_o, Y_o) باشد. مدل برنامه ریزی خطی برای قرار دادن هدف متناظر با بزرگترین اندازه $MPSS$، که آن را مدل بهترین بازده به مقیاس[1] می نامند و با P_{BRS} نمایش می دهند به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} Max \quad & \gamma + \varepsilon (1^T S^- + 1^T S^+) \\ s.t. \quad & \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda_j X_j + S^- = (z - \gamma) X_o \\ & \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda_j Y_j - S^+ = z Y_o \\ & \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda_j = 1 \\ & \lambda \geq 0 \ , \ S^- \geq 0 \ , \ S^+ \geq 0 \end{aligned} \qquad (۳-۳)$$

که در آن $\lambda = (\lambda_j ; j \in J_{CRS})$ و J_{CRS} مجموعه ی اندیس واحدهای تصمیم گیرنده ی کارآی کلی می باشد که توسط حل مدل CCR به دست آمده است. مدل P_{BRS} به دنبال بیشترین صرفه جویی در ورودی ها است که به صورت مضرب γ از سطح اولیه ورودی X_o بعد از تغییر مقیاس DMU_o توسط عامل z اندازه گیری شده است، به طوری که در داخل مجموعۀ امکان تولید T_V تعریف شده توسط همه ی واحدهای تصمیم گیرنده کارآی کلی (یعنی مجموعۀ E_{CRS}) باقی بماند.

هدف قرار داده شده در این روش $TRGT_{BRS} = (X_{BRS}, Y_{BRS})$ می باشد که در آن بردارهای X_{BRS} و Y_{BRS} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} X_{BRS} = (z^* - \gamma^*) X_o - S_{BRS}^{-\,*} \\ Y_{BRS} = z^* Y_o + S_{BRS}^{+\,*} \end{cases} \qquad (۴-۳)$$

[1] Best Return to Scale

ب: ماهیت خروجی

با جایگزینی $z' = z - \gamma$ ، $\gamma' = \gamma$ ، $\lambda' = \lambda$ ، $S^{+'} = S^{+}$ و $S^{-'} = S^{-}$ می توان فرمول بندی P'_{BRS} را از P_{BRS} به دست آورد که در آن هدف بیشینه سازی در خروجی ها می باشد و فرمول بندی آن به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \gamma' + \varepsilon(1^T S^{-'} + 1^T S^{+'}) \\
s.t. \quad & \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda'_j X_j + S^{-'} = z' X_o \\
& \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda'_j Y_j - S^{+'} = (z' + \gamma') Y_o \\
& \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda'_j = 1 \\
& \lambda'_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,n \ , S^{-'} \geq 0 \ , S^{+'} \geq 0
\end{aligned} \tag{۵-۳}
$$

هدف قرار داده شده در این روش $TRGT'_{BRS} = (X'_{BRS}, Y'_{BRS})$ می باشد که در آن بردارهای X'_{BRS} و Y'_{BRS} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$
\begin{cases}
X'_{BRS} = (z'^* - \gamma'^*) X_o - S^{-'^*}_{BRS} \\
Y'_{BRS} = z'^* Y_o + S^{+'^*}_{BRS}
\end{cases} \tag{۶-۳}
$$

که در آن* نشان دهنده ی جواب بهین است. لازم به ذکر است که هدف به دست آمده در بزرگترین اندازهٔ $MPSS$ مستقل از کمینه سازی ورودی ها یا بیشینه سازی خروجی ها می باشد. زیرا در هر دو مدل P_{BRS} و P'_{BRS} مقدار بهینه برابر می باشد.

۳-۳-۳ مدلی برای کارآی کلی ساختن واحدهای ناکارآی قیاسی در کوچکترین اندازهٔ $MPSS$

الف: ماهیت ورودی

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \gamma - \varepsilon(1^T S^{-} + 1^T S^{+}) \\
s.t. \quad & \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda_j X_j + S^{-} = (z - \gamma) X_o \\
& \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda_j Y_j - S^{+} = z Y_o \\
& \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda_j = 1 \ , \ \gamma = (1 - \theta^*_{CRS}).z \\
& \lambda_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,n \ , S^{-} \geq 0 \ , S^{+} \geq 0
\end{aligned} \tag{۷-۳}
$$

هدف قرار داده شده در این روش $TRGT_{MIN} = (X_{MIN}, Y_{MIN})$ می باشد که در آن بردارهای X_{MIN} و Y_{MIN} بصورت زیر تعریف می شوند:

$$
\begin{cases}
X_{MIN} = (z^*_{MIN} - \gamma^*_{MIN}) X_o - S^{-^*}_{MIN} \\
Y_{MIN} = z^*_{MIN} Y_o + S^{+^*}_{MIN}
\end{cases} \tag{۸-۳}
$$

که در آن* نشان دهندهٔ جواب بهین می باشد. لازم بـه ذکـر اسـت کـه هـدف $TRGT_{MIN}$ متنـاظر کـوچکترین اندازهٔ $MPSS$ از ترکیب ورودی- خروجی (X_o, Y_o) می باشد.

ب: ماهیت خروجی

می توان از مدل P_{MIN}، مدل P'_{MIN} را به دست آورد که در آن هدف بیشینه سازی در خروجی ها می باشـد و به صورت زیر ارایه می گردد:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \gamma' - \varepsilon(1^T S^{-'} + 1^T S^{+'}) \\
s.t. \quad & \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda'_j X_j + S^{-'} = z' X_o \\
& \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda'_j Y_j - S^{+'} = (z' + \gamma') Y_o \\
& \sum_{j \in J_{CRS}} \lambda'_j = 1 \\
& \gamma' = \left(\frac{1}{\theta^*_{CRS}} - 1 \right) . z' \\
& \lambda'_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,n \ , S^{-'} \geq 0 \ , \ S^{+'} \geq 0
\end{aligned} \tag{۹-۳}
$$

صرف نظر از کمینه سازی ورودی ها یا بیشینه سازی خروجـی هـا، مـدلهای P'_{MIN} و P_{MIN} هـدف هـای یکسانی را ارایه می دهند. چون در هر دو مورد P'_{MIN} و P_{MIN} مقدار بهینه برابر است.

۳-۴ مدل نقطهٔ مرجع[1]

کارآیی DMUها را همچنین می توان با استفاده از مدل برنامه ریزی خطی چند هدفی زیر مشخص کرد:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Y.\lambda \\
Min \quad & X.\lambda \\
s.t. \quad & \lambda \in \Lambda
\end{aligned}
$$

که در آن مجموعهٔ Λ می تواند به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$
\Lambda = \begin{cases} \Lambda_1 = \left\{ \lambda \,\middle|\, \lambda \in \Re^n_+ \right\} & CCR \\ \Lambda_2 = \left\{ \lambda \,\middle|\, \lambda \in \Re^n_+ , 1\lambda = 1 \right\} & BCC \end{cases}
$$

در مدل فوق چون توابع هدف در تضاد با هم هستند، پس جواب منحصربه فرد در اغلـب اوقـات بـه دسـت نخواهد داشت. یک راه حل ممکن و مشهور برای یافتن جواب های مربوط به مرز کارآ در $MOLP$ آن اسـت که از تابع عددی ASF که در سال ۱۹۸۰ توسط $Wierzbicki$ ارایه شده است استفاده شود، که استفاده از این تابع به پیدایش مدل نقطه ی مرجع(REF_P)به صورت زیر منتهی خواهد شد.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \sigma+\varepsilon(1^T S^- + 1^T S^+) \\
s.t. \quad & X\lambda+\sigma W^X + S^- = g^X \\
& Y\lambda-\sigma W^Y - S^+ = g^Y \\
& \lambda\in\Lambda\ ,\ \lambda\geq 0\ ,\ S^-\geq 0\ ,\ S^+\geq 0
\end{aligned}
\qquad (۱۰-۳)
$$

که درآن $W=(W^X, W^Y)\geq 0$ بردارهای وزن ورودی ها و خروجی ها می باشد و شامل حداقل یک مؤلفه ی مثبت است. $g=(g^X, g^Y)$ دارای مقدار آرمانی برای ورودی ها و خروجی ها می باشد.

۳-۵ مدل مبتنی بر وزن *Thanassoulis* و *Dyson* برای یافتن هدف[2]

در این مدل، عوامل (ورودی ها و خروجی ها) به دو بخش عمده عوامل قابل کنترل و عوامل غیر قابل کنترل تقسیم می شوند. بنابراین ماتریس های X و Y که اطلاعات ورودی ها و خروجی های DMU های مختلف را دربردارند نیز هر کدام به دو ماتریس به صورت زیر تقسیم می شوند: ماتریس های X_I و Y_I که اطلاعات مربوط به ورودی ها و خروجی هایی را دربردارند که قرار است مقدار آنها تغییر یابد و ماتریس های X_C و Y_C نیز اطلاعات ورودی ها و خروجی هایی را دربردارند که مقدار آنها در سطح فعلی شان ثابت باقی می ماند. بردارهای X_{OI}، Y_{OI}، X_{OC} و Y_{OC} نیز اطلاعات متناظر DMU_o را نشان می دهند. $W^X\geq 0$ و $W^Y\geq 0$ (که حداقل دارای یک مؤلفهٔ مثبت هستند)، بردارهای وزن مشخص شده توسط مدیر هستند که با ضرایب P و Z به همدیگر متصل می شوند. P بیانگر بردار نسبت هایی است که بوسیله ی آنها ورودی های مختلف کاهش می یابند و Z بیانگر بردار نسبت هایی است که بوسیله ی آنها خروجی های مختلف افزایش می یابند. با تغییر ضرایب W^X و W^Y (یعنی P و Z)، DMU تصویرهای مختلفی روی رویه ی کارآ در فضای ورودی- خروجی به دست می آید و درنتیجه DMU می تواند به بردارهای ضریب P و Z ای دست پیدا کند که این بردارها هدف متناظر با مقادیر وزنی استفاده شده را دربردارند. با ضرب مؤلفه های ورودی ها و خروجی های DMU درمؤلفه های بردارهای Pو Z، DMU به یک هدف شدنی خواهد رسید. فرمول بندی این روش به صورت زیر می باشد:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & {W^Y}^T Z - {W^X}^T P + \varepsilon\left(1^T S^- + 1^T S^+\right) \\
s.t. \quad & \overline{X}_{OI}P - X_I\lambda = 0 \\
& X_C\lambda + S^- = X_{OC} \\
& \overline{Y}_{OI}Z - Y_I\lambda = 0 \\
& Y_C\lambda - S^+ = Y_{OC} \\
& Z\geq 1\ ,\ P\leq 1\ ,\ \lambda\geq 0\ ,\ S^-\geq 0\ ,\ S^+\geq 0
\end{aligned}
\qquad (۱۱-۳)
$$

ε یک عدد غیر ارشمیدسی و $\overline{X}_{OI}=diag\left(X_{OI}\right)$ و $\overline{Y}_{OI}=diag\left(Y_{OI}\right)$ می باشد. $diag$ یک بردار، برابر ماتریسی است که عناصر روی قطر این ماتریس، مؤلفه های آن بردار می باشد.

در دسته قیود اول و سوم متغیرهای کمکی موجود نمی باشند، زیرا P و Z باعث می شود که واحد تحت بررسی مستقیماً روی مرز کارآ تصویر شود؛ یعنی روی مرز ضعیف نمی باشند، بنابراین متغیرهای کمکی همچنان صفر خواهند بود.

۳-۶ مدل آرمانی *Thanassoulis* و *Dyson* برای یافتن هدف

در این مدل DMU تحت بررسی نخست نقطه ی هدف آرمانی خود یعنی $g=(g^X,g^Y)$ را مشخص می کند که ضرورتاً نقطه ی شدنی نمی باشد. سپس DMU، بردارهای وزن $W_O^X \geq 0$ و $W_U^X \geq 0$ را که حداقل دارای یک مؤلفه ی مثبت می باشند برای بردارهای انحراف S_O^X و S_U^X (انحراف ورودی ها از چپ و راست) و S_O^Y و S_U^Y (انحراف خروجی ها از چپ و راست) مشخص می کند و بالاخره، این مدل مجموع وزنی انحرافات را به حداقل می رساند. به کمک بردارهای انحراف ورودی ها و خروجی ها از چپ و راست می توان نقطه ی شدنی را تا حد ممکن نزدیک به نقطه ی هدف آرمانی انتخاب نمود. فرمول بندی این مدل به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
Min \quad & {W_U^X}^T S_U^X + {W_O^X}^T S_O^X + {W_U^Y}^T S_U^Y + {W_O^Y}^T S_O^Y \\
s.t. \quad & X\lambda + S_U^X - S_O^X = g^X \\
& Y\lambda + S_U^Y - S_O^Y = g^Y \\
& \lambda \geq 0\,,\ \ S_U^X \geq 0\,, S_O^X \geq 0\,, S_U^Y \geq 0\,, S_O^Y \geq 0
\end{aligned} \tag{۱۲-۳}$$

اولین مرحله ی دست یافتن به هدف به کمک هدف آرمانی یعنی مساله (۳-۱۲)، نقطه ی آرمانی $(g^X,g^Y)\geq 0$ را به نقطه ی شدنی $(g^{X.f},g^{Y.f})$ تصویر می کند که در آن:

$$\begin{cases} g^{X.f} = g^X + S_O^{X^*} - S_U^{X^*} \\ g^{Y.f} = g^Y + S_O^{Y^*} - S_U^{Y^*} \end{cases} \tag{۱۳-۳}$$

به طوری که $S_O^{X^*}$، $S_U^{X^*}$، $S_O^{Y^*}$ و $S_U^{Y^*}$ جواب بهین مساله (۳-۱۲) می باشند. در دومین مرحله، نقطه ی شدنی $(g^{X.f},g^{Y.f})$ را که ممکن است نقطه ی ناکارآیی باشد، به یک نقطه ی کارآ تصویر می کند که فرمول بندی متناظر مرحله ی دوم به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
Min \quad & 1^T S^- + 1^T S^+ \\
s.t. \quad & X\lambda + S^- = g^{X.f} \\
& Y\lambda + S^+ = g^{Y.f} \\
& \lambda \geq 0\,,\ \ S^- \geq 0\,, S^+ \geq 0
\end{aligned} \tag{۱۴-۳}$$

در مسأله ی (۳-۱۴) در صورتی که مقدار S^- و S^+ برابر صفر باشند آنگاه نقطهٔ $(g^{X.f},g^{Y.f})$ کارآ بوده و در غیر این صورت هدف نهایی $(g^{X.e},g^{Y.e})$ کارآ خواهد بود که در آن:

$$\begin{cases} g^{X.e} = g^{X.f} + S^{-^*} \\ g^{Y.e} = g^{Y.f} + S^{+^*} \end{cases}$$

به طوریکه S^{-^*} و S^{+^*} جواب بهین مسألهٔ (۳-۱۴) می باشند.

۳-۷ مدل مبتنی بر وزن *Zhu* برای یافتن هدف[3]

در این مدل ابتدا بردارهای وزنی $W^X \geq 0$ و $W^Y \geq 0$ که بیانگر درجه ی مطلوبیت نسبی سطوح ورودی ها و خروجی ها می باشد توسط مدیر مشخص می شود. با تغییر ضرایب این بردارها، واحد تحت بررسی می تواند مرز کارآ را بیابد. این مدل همانند مدل مبتنی بر وزن *Thanassoulis* و *Dyson* به بردارهای ضریب g و hای می رسد که این بردارها هدف متناظر با وزن های استفاده شده را به عنوان نتیجه و حاصل این مدل تعریف می کند. با ضرب کردن ورودی ها و خروجی های موجود در بردارهای h و g، DMU به هدف شدنی خواهد رسید. فرمول بندی این مدل به صورت زیر می باشد:

$$\begin{array}{ll} Min & W^{Y^T}.g + W^{X^T}.h + \varepsilon\left(1^T.S^- + 1^T.S^+\right) \\ s.t. & X.\lambda + S^- = \overline{X}_O.h \\ & Y.\lambda - S^+ = \overline{Y}_O.g \\ & g \geq 1\,, \quad h \leq 1\,,\ \lambda \geq 0\,,\ S^- \geq 0\,,\ S^+ \geq 0 \end{array}$$

که ε یک عدد غیر ارشمیدسی و $\overline{X}_O = diag(X_O)$ و $\overline{Y}_O = diag(Y_O)$ می باشد و عبارت ثابت $1^T W^X - 1^T W^Y$ از تابع هدف حذف شده است. در مدل اصلی که توسط *Zhu* ارایه شده است عبارت $1^T W^X - 1^T W^Y$ با علامت منفی در تابع هدف موجود می باشد زیرا که اگر $g^* = 1$، $h^* = 1$، $S^{+^*} = 0$ و $S^{-^*} = 0$ آنگاه (X_o, Y_o) کارآ خواهد بود، بنابراین مقدار بهین باید صفر باشد.

۳-۸ مدل های *Zhu* و *Seiford* برای یافتن هدف[4]

Zhu دو مدل الگویابی را بر مبنای *DEA* ارایه نمود که در آن مرز کارآیی معرفی شده (مرز الگو) در طول فرآیند الگویابی ثابت باقی می ماند. یکی مدل الگوی متغیر و دیگری مدل الگوی ثابت.

۳-۸-۱ مدل الگوی متغیر

فرض E^* نمایانگر واحد های کارآ باشد که توسط *DEA* معرفی شده اند. برنامه ریزی خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{lll} Min & \delta_o^{CRS} & \\ s.t. & \sum_{j\in E^*} \lambda_j x_{ij} \leq \delta_o^{CRS} x_{io}^{new} & i = 1,..,m \\ & \sum_{j\in E^*} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}^{new} & r = 1,..,s \\ & \lambda_j \geq 0 & j \in E^* \end{array} \qquad (۳-۱۵)$$

کــه مــشاهده جدیــد بــه وســیلهٔ DMU_O^{new} بــا ورودی هــای $x_{io}^{new}\ (i=1,..,m)$ و خروجــی های $y_{ro}^{new}\ (r=1,..,s)$ بیان شده است. مدل (۳-۱۵) عملکرد DMU_O^{new} را نسبت به DMUهـای الگـو، در مجموعه ی E^* اندازه گیری می کند، درحالی که خروجی ها در سطح فعلی خودشان ثابت مانده اند. در مـدل (۳-۱۵)، مجموعه ی مرجع برای هر واحد تحت بررسی ای بدون تغییـر بـاقی مـی مانـد، درحـالی کـه در مـدل تصویر معمولی، مجموعه ی مرجع برای هر ارزیابی عوض می شود. به طور مـشابه، مـی تـوانیم یـک مـدل کـه عملکرد DMU_O^{new} را بر حسب خروجی ها، زمانی که ورودی ها در سطح فعلی شان ثابت نگه داشته شده اند، بررسی می کند را ارایه دهیم.

$$\begin{aligned} & Max \quad \tau_o^{CRS} \\ & s.t. \quad \sum_{j\in E^*}\lambda_j x_{ij} \le x_{io}^{new} && i=1,..,m \\ & \qquad \sum_{j\in E^*}\lambda_j y_{rj} \ge \tau_o^{CRS} y_{ro}^{new} && r=1,..,s \\ & \qquad \lambda_j \ge 0 && j\in E^* \end{aligned} \tag{۳-۱۶}$$

مدل (۳-۱۵) یا (۳-۱۶) منجر به یک الگو برای DMU_O^{new} می شوند. $i-$امین ورودی و $r-$امین خروجـی الگو به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} & \sum_{j\in E^*}\lambda^*{}_j x_{ij} \quad (i-\text{امین ورودی}) \\ & \sum_{j\in E^*}\lambda^*{}_j y_{rj} \quad (r-\text{امین خروجی}) \end{aligned} \tag{۳-۱۷}$$

توجه کنید که اگرچه DMU های متناظر با مجموعه ی E^* نـشان داده شـده انـد، الگـوی حاصـل ممکـن است برای هر DMU تحت بررسی متفاوت باشد. زیرا برای هر DMU جدید تحت بررسی، (۳-۱۷) ممکن است یک نمایش متفاوت از DMU های متناظر با مجموعـه ی E^* نمـایش دهـد. بنـابراین مـدلهای (۳-۱۵) و (۳-۱۶) یک فرآیند الگوی متغیر را نمایش می دهند. بر مبنای مدل های (۳-۱۵) و (۳-۱۶) داریم:

۱. $\delta_o^{CRS^*} < 1$ یا $\tau_o^{CRS^*} > 1$ بیانگر این مطلب هستندکه عملکرد DMU_O^{new} توسط الگـوی بیـان شـده در (۳-۱۷) مغلوب شده است؛

۲. $\delta_o^{CRS^*} = 1$ یا $\tau_o^{CRS^*} = 1$ بیانگر این مطلب هستند که DMU_O^{new} دارای سطح کـارآیی مـشابهی بـا الگـوی ارایه شده در (۳-۱۷) می باشد؛

۳. $\delta_o^{CRS^*} > 1$ یا $\tau_o^{CRS^*} < 1$ بیانگر این مطلـب هـستند کـه در DMU_O^{new} کمبـود ورودی و اضـافی خروجـی نسبت به الگوی ارایه شده در (۳-۱۷) وجود دارد.

۴. $\delta_o^{CRS^*} > 1$ بیان می کند که DMU_O^{new} باید بردار ورودی خودش را برای رسیدن به الگو افزایش دهد. ایـن مطلب اشاره می کند که ذخیره ورودی DMU_O^{new} برابر $\delta_o^{CRS^*} - 1$ می باشد. به طور مشابه، $\tau_o^{CRS^*} < 1$ بیانگر این مطلب است که DMU_O^{new} می تواند بردار خروجی اش را برای رسیدن به الگو کاهش دهد.

۳-۸-۲ مدل الگوی ثابت

فرض کنید که مدیر DMUهای خاصی از واحدهای کارآ معین کند که باید به عنوان الگوی ثابت بکار برده شوند. به عبارت دیگر برخی از DMUهای کارآ، نباید در ساختن الگو مورد توجه قرار گیرد. فرض کنیم مجموعه ی $B = \{DMU_j : j \in I_B\}$ زیر مجموعه ی انتخاب شده از مجموعه ی الگوهای E^* باشد، به عبارت دیگر $I_B \subset E^*$. مدل (۲-۲) را بصورت مسأله ی برنامه ریزی خطی زیر اصلاح می کنیم:

$$
\begin{aligned}
\sigma_0^{CRS^*} = Max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^{new} \\
s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} - \sum_{r=1}^{s} v_i x_{ij} = 0, \qquad j \in I_B \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} - \sum_{r=1}^{s} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j \notin I_B \,,\, j \in E^* \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^{nem} = 1 \\
& u_r ,\, r = 1,\dots,s \qquad v_i \ge 0,\, i = 1,\dots,m
\end{aligned}
\tag{۳-۱۸}
$$

به وسیله ی بکارگیری تساوی های موجود در قیود متناظر با DMU های الگو، مدل (۳-۱۸) عملکرد DMU_O^{new} را در مقابل الگوهای ساخته شده توسط مجموعه ی B اندازه گیری می کند.

به وسیله ی بکارگیری تساوی های موجود در قیود متناظر با DMU های الگو، مدل (۳-۱۸) عملکرد DMU_O^{new} را در مقابل الگوهای ساخته شده توسط مجموعه ی B اندازه گیری می کند. سه حالت ممکن متناظر با مدل (۳-۱۸) موجود است. حالت اول، $\delta_o^{CRS^*} > 1$ که بیانگر این مطلب است که DMU_O^{new} نقطهٔ الگو را مغلوب می کند. حالت دوم، $\delta_o^{CRS^*} = 1$ بیانگر این مطلب است که DMU_O^{new} دارای سطح عملکرد مشابه با نقطه ی الگو می باشد. حالت سوم، $\delta_o^{CRS^*} < 1$ بیانگر این مطلب است که نقطهٔ الگو DMU_O^{new} را مغلوب می کند.

۳-۹ مدل *Athanassopoulos* برای یافتن هدف[5]

n واحد تصمیم گیرنده که هر کدام از ورودی $X \in \Re_+^m$ برای تولید خروجی $Y \in \Re_+^s$ استفاده می کنند را در نظر بگیرید. همچنین مجموعه ی اندیس ورودی ها، $I = 1,\dots,m$ و خروجی ها، $O = 1,\dots,s$ و زیر مجموعه ی آنها $I \equiv I_K \cup \overline{I_K}$ و $O \equiv O_K \cup \overline{O_K}$ را در نظر داشته باشید، که در آن I_K و O_K اندیس هایی از ورودی ها و خروجی ها می باشند که در اهداف حاصل از مدل زیر دارای کران می باشند:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\lambda_j, z_r, \theta_i}{Max} && \sum_{r\in O} P_r^{+} Z_r - \sum_{i\in I} P_i^{-}\theta_i \\
&s.t. && \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{ij_o} && i \in I \\
& && \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = Z_r y_{rj_o} && r \in O && (1a) \\
& && \theta_i x_{ij_o} \geq K_i && i \in I_k \\
& && Z_r y_{rj_o} \leq K_r && r \in O_k && (1b) \\
& && A_i \leq \theta_i \leq 1/B_i \ \ , \ \ A_i, B_i \in [0,1] \ , && \forall i \in I \\
& && \Gamma_r \leq 1/Z_r \leq 1/\Delta_r \ \ , \ \ \Gamma_r, \Delta_r \in [0,1] \ , && \forall r \in O && (1c) \\
& && \lambda_j \geq 0 && j = 1,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (۱۹-۳)
$$

در مدل فوق، x_{ij} مقدار ورودی i-ام از واحد j-ام، y_{rj} خروجی r-ام از واحد j-ام، P_r^{+}, P_i^{-} ثابتهای مشخص شده توسط کاربر هستند که منعکس کننده ی ترجیحات تصمیم گیرنده در رابطه با بهبود مؤلفه های ورودی/خروجی می باشند؛ θ_i و z_r میزان انقباض ورودی i و انبساط خروجی r؛ K_i و K_r کران هایی برای ورودی i و خروجی r اهداف برآورد شده؛ A_i و B_i کران های پایین و بالای ورودی i، Γ_r و Δ_r کران های پایین و بالای خروجی r می باشند. مقادیر P_r^{+}, P_i^{-} روی ورودی ها/خروجی ها، نقش قیمت ها و هزینه های هر واحد ورودی و خروجی DMU را بازی می کند. مقادیر کارآیی θ_i و z_r، سرعت کاهش ورودی i و سرعت گسترش خروجی r، به طوری که یک واحد ناکارآ روی مرز کارآیی تصویر شود را نشان می دهند. این تصویر بر اساس ترجیحات تصمیم گیرنده صورت می گیرد. برخی از خصوصیات مدل $DESA$ در زیر آورده شده اند:

۱. دوگانگی بین ورودی ها و خروجی ها می تواند کمتر شود.

۲. کران های بالا و پایین (K_i, K_r) به هدف های ارزیابی شده ورودی ها/خروجی ها تحمیل شده است.

۳. تصمیم گیرنده ها (DM) به طور فعال در فرآیند هدف گذاری شرکت دارند.

۴. می توان قیود اضافی را به منظور ارتباط تصاویر ورودی/خروجی روی مرز بکار برد: فرمولابندی مدل $DESA$ در (۳-۱۹) می تواند به منظور ارتباط هدف های به دست آمده از متغیرهای ورودی/خروجی خاص گسترش یابد. برای مثال، کاهش یک ورودی (ورودی های) خاص باید با کاهش در خروجی (خروجی های) خاص همراه باشد یا یک افزایش از ورودی خاص باید با افزایش یک خروجی خاص صورت گیرد. این اغلب زمانی پیش می آید که یک ارتباط ساختاری بین ورودی ها و خروجی ها وجود دارد. قیودی مانند قیودی که در معادلات (۳-۲۰) آمده است می توانند به منظور آسان کردن فرمول بندی از این نوع در خلال فرمول بندی مدل $DESA$ در (۱) به کار گرفته شوند:

$$
\begin{aligned}
&-(z_r-\theta_i)\le M\delta,\\
&(-z_r+1)\le M(1-\delta),\\
&-(z_r-\theta_i)\le M\phi,\\
&(\theta_i-1)\le M(1-\phi),\\
&\delta\in\{0,1\}\ ,\ \phi\in\{0,1\}
\end{aligned}
\qquad (۲۰-۳)
$$

که M یک عدد مثبت بسیار بزرگی است. ترکیب مقادیر متغیرهای کنترل $\{0,1\}$ مانند δ و ϕ می تواند به منظور تولید کردن الگوهای هدف گذاری، که در آن بهبودهای ورودی و خروجی به هم متصل هستند، بکار گرفته شود. برای مثال، مقدار $\delta=0$ نتیجه می دهد $z_r<1$ و $z_r>\theta_i$ که اشاره به این مطلب دارد که اگر خروجی r با سرعت z_r^* کاهش یابد، دراین صورت ورودی i باید با سرعت بیشتر $z_r^*>\theta_i^*$ کاهش یابد.

۳-۱۰ اهداف با مؤلفه های صحیح

مدل های معمولی DEA بر پایهٔ برنامه ریزی خطی هستند و به ورودی ها و خروجی های با مقادیر پیوسته توجه می کنند، در حالی که حالت های زیادی وجود دارد که تعدادی از ورودی ها و/یا خروجی ها می توانند مقادیر صحیح بگیرند. در این قسمت، برخی مفاهیم جدید DEA و مدل هایی که دقیقاً مقادیر صحیح به ورودی ها و خروجی ها اختصاص می دهند، معرفی شده است، که این امر به شدنی بودن مساله کمک می کند.

فرض کنید x_{ij} و y_{kj} مقادیر ورودی i ام و خروجی k ام DMU_j برای $i=1,\ldots,m$، $k=1,\ldots,p$ و $j=1,\ldots,n$ باشند. فرض کنید $\bar{x}_j$ و $\bar{y}_j$ بردار ستونی متناظر DMU_j باشد و همچنین $X=(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ و $Y=(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n)$ ماتریس های تمام ورودی ها و تمام خروجی ها باشند. فرض کنید $I=\{1,\ldots,m\}$ و $O=\{1,\ldots,p\}$ به ترتیب مجموعه اندیس های ورودی و خروجی باشد و $I'\subseteq I$ و $O'\subseteq O$ زیر مجموعه هایی باشند که بایستی مقادیر صحیح داشته باشند. طبیعتاً، تمام مشاهدات x_{ij} و y_{kj} برای تمام $i\in I'$ و $k\in O'$ صحیح می باشند. مجموعه ی امکان تولید CRS با مقادیر صحیح را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T'_{CRS}=\left\{(\hat{x},\hat{y}):\exists\,\bar{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\lambda_j\ge 0\ \forall j\ ,\hat{x}_i\ge\sum_j\lambda_j x_{ij},\hat{y}_k\le\sum_j\lambda_j\hat{y}_{ij}\quad {\scriptstyle \begin{array}{l}\hat{x}_i \text{ integer } \forall i\in I'\\ \hat{y}_k \text{ integer } \forall k\in O'\end{array}}\right\}$$

تعریف: DMU_j به صورت CRS کارآی صحیح است اگر هیچ امکان تولید با مقدار صحیحی آن را مغلوب نکند، به عبارت دیگر:

$$\forall(\hat{x},\hat{y})\ \left((\hat{x},\hat{y})\in T'_{CRS}\Rightarrow\left((\hat{x}\le\bar{x}_j)\,\&\,(\hat{y}\ge\bar{y}_j)\right)\right)\Leftrightarrow(\hat{x},\hat{y})=(\bar{x}_j,\bar{y}_j)$$

تعریف: مرز کارآیی صحیح CRS یک مجموعه از نقاط عملکردی با مقدار صحیح مغلوب نشده است. به عبارت دیگر:

$$(T'_{CRS})^{eff}=\{(\bar{x},\bar{y})\in T'_{CRS}:\forall(\bar{x},\bar{y})\in T'_{CRS};((\bar{x}\le\hat{x})\cap(\bar{y}\ge\hat{y}))\Leftrightarrow(\bar{x},\bar{y})=(\hat{x},\hat{y})\}\subset T'_{CRS}$$

قضیه: اگر DMU_j کارآی CRS باشد، در این صورت کارآی صحیح CRS نیز می باشد، به عبارت دیگر:

$$\left(\bar{x}_j, \bar{y}_j\right) \in T_{CRS}^{eff} \Rightarrow \left(\bar{x}_j, \bar{y}_j\right) \in \left(T'_{CRS}\right)^{eff}$$

توجه کنید که گرچه طبق این قضیه، یک DMU کارآی CRS، همچنین کارآی صحیح CRS می باشد، ولی عکس آن لزوماً درست نیست. به عبارت دیگر، ممکن است که یک DMU، کارآی صحیح موجود باشد به طوری که زمانی قیود صحیح بودن را کنار بگذاریم، به وسیلهٔ نقاط عملکردی دیگری مغلوب شود و بنابراین کارآی CRS نباشد.به منظور ارزیابی عملکرد نسبی DMUهای موجود با مقدار صحیح، و با فرض گرفتن ماهیت ورودی، مدل $MILP\ DEA$ به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$\begin{aligned}
Min \quad & \theta_j - \varepsilon\left(\sum_i s_i^- + \sum_k s_k^+\right) \\
s.t. \quad & \sum_j \lambda_j x_{ij} = x_i \ , \ x_i = \theta_j x_{ij} - s_i^- \quad \forall i, \\
& \sum_j \lambda_j y_{kj} = y_k \ , \ y_k = y_{kj} + s_k^- \quad \forall k, \\
& \lambda_j \geq 0 \ \ \forall j \ , \ s_i^- \geq 0, x_i \geq 0 \ \ \forall i \ , \ s_k^+ \geq 0, y_k \geq 0 \ \forall k, \\
& x_i \ \text{int}eger \quad \forall i \in I', \ y_k \ \text{int}eger \ \ \forall k \in O'
\end{aligned} \qquad (۲۱-۳)$$

باحل مدل فوق برای هر DMU_j یک هدف با مقادیر صحیح به صورت $\left(x_1^*,...,x_m^*, y_1^*,...,y_p^*\right)$ حاصل خواهد شد.

۴ نتیجه گیری

در این مقاله به معرفی برخی از مدل های یافتن هدف پرداخته شد. همان طور که در خصوص مدل اهداف با مؤلفه های صحیح دیده شد، برای مسائل و شرایط مختلف حاکم بر واحدهای تصمیم گیرنده، اهداف متفاوتی حاصل می شود. مسلما مدل های بیان شده پاسخگوی موارد مختلف نیست، ولی برای یافتن اهداف دستهٔ بزرگی از مسائل مشابه می توانند مورد استفاده قرار گیرند.

منابع

[1] Joro, T. (1998),"Models for Identifying Target Units in Data Envelopment Analysis: Comparison and Extention ", IIASA Interim Reports IR-98-055/August.
[2] Thanassoulis E. and Dyson R.G.(1992),"Estimating Preferred Target Input-Output Levels Using Data envelopment Analysis",European Journal of Operational Research.
[3] Zhu, J. (1996)," Data Envelopment Analysis with Preference Structure", Journal of Operation Research Society.
[4] Seiford L, Zhu J,"Models for Performance benchmarking: measuring the effect of e-business activities on banking performance".International Journal of Management Scienve.
[5] Seiford L,Athanassopoulos A, "Data envelopment scenario analysis for setting target to electricity generating plants", European Journal of Operational Research.