راهبرد محاسباتی اندازه ی کارآیی تکنیکی راسل

سهراب کردرستمی[1] علیرضا امیرتیموری[2] مریم سلحشور راد[1]

[1]گروه ریاضی ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

[2] گروه ریاضی ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت

چکیده

مدل های تحلیل پوششی داده ها (DEA) [2] می توانند به دو دسته ی مدل های شعاعی و غیر شعاعی طبقه بندی شوند. اندازه ی کارآیی حاصل از مدل های غیر شعاعی، اندازه گیری راسل (RM) نامیده شد. مشکل اصلی اندازه ی راسل تابع هدف آن می باشد که به صورت یک مساله ی برنامه ریزی غیرخطی فرمول بندی می شود. از این رو یک الگوریتم مبتنی بر برنامه ریزی خطی که برای DEA به کار برده می شود قادر به حل اندازه ی راسل نیست. در این مطالعه راهبردهای محاسباتی اندازه گیری کارآیی تکنیکی راسل توسط دو مدل پیشنهادی ارایه می شود. با استفاده از مدل های پیشنهادی از بار محاسباتی متناظر با اندازه ی راسل کاسته می شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، اندازه گیری راسل، کارآیی تکنیکی

۱ مقدمه

اندازه گیری کارآیی تکنیکی نخستین بار با کارهای دبرو(۱۹۵۱) وکوپمنز(۱۹۵۱) شروع شد. به دنبال آن، فارل(۱۹۵۷) اندازه ی کارآیی تکنیکی را معرفی کرد. فیر و لاول(۱۹۷۸) ایراداتی را بر این اندازه کارآیی مطرح کردند که انگیزه ی توسعه ی اندازه ی جدید کارآیی تکنیکی شد. اندازه ی کارآیی حاصل از مطالعات فیر و لاول، اندازه راسل [9] نامیده می شود. تفاوت اصلی بین اندازه ی فارل و راسل در این است که اندازه ی فارل شعاعی است در حالی که اندازه ی راسل شعاعی نیست. بنابراین طبقه بندی واحدهای تصمیم گیری توسط این دو روش لزوماً یکسان نیست.

تلاش های تحقیقاتی پاستور(۱۹۹۹) و کوپر و پاستور (۲۰۰۳)گویای این مطلب بود که اندازه ی راسل یک مشکل اصلی در اندازه گیری کارآیی دارد و آن این که تابع هدف آن به صورت یک مساله ی برنامه ریزی غیر خطی فرمول بندی شده است. مطالعات اخیرتوسط سیوشی و سکیتانی(۲۰۰۶) منجر به فرمول بندی دوباره ای برای RM به وسیله ی مدل برنامه ریزی مخروطی مرتبه ی دوم ($SOCP$) و الگوریتم درونی پرایمال – دو آل شد. RM برنامه ی دوآل مشخصی ندارد و رسیدن به یک تعبیر اقتصادی برای آن دشوار است. در صورتی که اگر RM توسط $SOCP$ فرمول بندی شود قادر به ساخت دوآل برای آن خواهیم بود و این یافته می تواند مطلب بیان شده ی تون(۲۰۰۱) را که عنوان کرده بود RM برنامه ی دوآل مشخصی ندارد و به این دلیل، رسیدن به یک تعبیر اقتصادی دشوار است را اصلاح کند. در این مطالعه دو مدل برای بهبود اندازه ی راسل مطرح می شود که تابع هدف آن ها بر خلاف تابع هدف RM، خطی است.

به علاوه اندازه ی کارآیی به دست آمده از این دو مدل ناکمتر ازاندازه ی کارآیی $ERGM$ می باشد. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است :

در بخش ۲ مروری بر اندازه ی راسل انجام می گیرد. بخش ۳ دو مدل پیشنهادی برای اندازه ی راسل مطرح می شود. در بخش ۴ یک مثال توصیفی برای مقایسه ی بین اندازه ی بهبودیافته ی راسل و دو مدل پیشنهادی مطرح می شود و در بخش ۵ نتیجه گیری مطرح می شود.

۲ مروری بر اندازه ی راسل (RM)

اندازه ی راسل به طور هم زمان ورودی ها را کاهش و خروجی ها را افزایش می دهد، بنابراین تابع هدف به صورت ترکیب فاکتورهای انقباض ورودی، $\sum_{i=1}^{m}\theta_i$ و فاکتورهای انبساط خروجی، $\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\varphi_r}$ در یک روش جمعی مطرح می شود .

برای ارزیابی $DMU_o:(x_o,y_o)$ مقدار این اندازه از فرمول بندی زیر به دست می آید :

$$
\begin{aligned}
&Min \quad R_g(x_o,y_o)=\frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\varphi_r}\right)\\
&s.t.\\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j+\theta_i x_{ik}\ge 0, \qquad i=1,\dots,m\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j-\varphi_r y_{rk}\ge 0, \qquad r=1,\dots,s\\
&\quad \theta_i\le 1, \qquad i=1,\dots,m\\
&\quad 1\le\varphi_r\,, \qquad r=1,\dots,s\\
&\quad 0\le\lambda_j\,, \qquad j=1,\dots,n
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

در فرمول بندی بالا محدودیت های $\theta_i\le 1$ و $\varphi_r\ge 1$ برای چیرگی مورد استفاده قرار می گیرد.

توجه داشته باشید که چند مشکل در رابطه با این اندازه وجود دارد. اول آن که این اندازه از یک مساله ی برنامه ریزی غیر خطی محاسبه می شود که جواب آن به آسانی به دست نمی آید. دوم آن که، تابع هدف آن به صورت ترکیبی از میانگین حسابی و میانگین همسازه است. بنابراین، یک جایگزین برای این اندازه ارایه شد که اگر چه ارتباط نزدیکی با اندازه ی راسل دارد، از مشکلات مذکور جلوگیری به عمل می آورد.

۲-۱ اندازه ی گراف بهبود یافته ی راسل $ERGM$

پاستور(۱۹۹۹) به جای ترکیب شدن فاکتورهای انقباض ورودی و انبساط خروجی اندازه ی راسل در یک روش جمعی، مانند (۱) در اندازه ی جدید رابطه ی بین آن ها را به صورت کسری تعریف نمود. یعنی ابتدا میانگین فاکتورهای انقباض ورودی ها و فاکتورهای انبساط خروجی هارا محاسبه کرده و سپس مولفه های این دو کارآیی در یک فرم کسری با هم ترکیب شدند.

اندازه ی R_e به عنوان اندازه ی کارآیی گراف بهبود یافته ی راسل به صورت زیر می باشد :

$$
\begin{aligned}
& Min \quad R_e(x_o, y_o) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{m}\right)}{\left(\sum_{r=1}^{s} \frac{\varphi_r}{s}\right)} \\
& s.t. \\
& -\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + \theta_i x_{ik} \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\,\lambda_j - \varphi_r\, y_{rk} \geq 0 \qquad r = 1,\dots,s \\
& \theta_i \leq 1, \qquad i = 1,\dots,m \\
& 1 \leq \varphi_r\,, \qquad r = 1,\dots,s \\
& 0 \leq \lambda_j\,, \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned} \tag{۲}
$$

برای خطی سازی مدل فوق از تبدیل چارنز و کوپر ۱۹۶۲ استفاده می کنیم.

قرار می دهیم $\beta = \left(\sum_{r=1}^{s} \frac{\varphi_r}{s}\right)^{-1}$. لذا متغیر جدید در رابطه ی $0 \leq \beta \leq 1$ و $\beta\left(\sum_{r=1}^{s} \frac{\varphi_r}{s}\right) = 1$ صدق می کند. سپس، تمام متغیرهای به کار گرفته شده در (۲) می توانند به صورت زیر تبدیل شوند:

$$
\begin{aligned}
& u_i = \beta\,\theta_i \qquad i = 1,\dots,m \\
& v_r = \beta\,\varphi_r \qquad r = 1,\dots,s \\
& t_j = \beta\,\lambda_j \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

با به کار بردن این متغیرهای تبدیل یافته، فرمول بندی (۲) به صورت زیر بیان می شود:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i}{m} \\
& s.t. \\
& \sum_{r=1}^{s} \frac{v_r}{s} = 1 \\
& -\sum_{j=1}^{n} x_{ij} t_j + u_i\, x_{ik} \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m
\end{aligned} \tag{۳}
$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj} t_j - v_r\, y_{rk} \geq 0 \qquad r = 1,\dots,s$$
$$u_i \leq \beta \qquad i = 1,\dots,m$$
$$\beta \leq v_r \qquad r = 1,\dots,s$$
$$0 \leq t_j \qquad j = 1,\dots,n \quad , \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

در نتیجه ی این تبدیل، (۳) به صورت یک مساله ی برنامه ریزی خطی فرمول بندی شده است. بنابراین توسط نرم افزارهای برنامه ریزی خطی قابل حل است. نکته ای که باید به آن توجه شود این است که (۲) با (۱)معادل نیست زیرا تابع هدف آن ها متفاوت است. یک سوال اساسی اکنون باقی مانده است و آن این که آیا (۲) به درستی اندازه ی راسل را فراهم می کند؟

به هر حال ذکر چند نکته ضروری است :

(۱) کارآیی $ERGM$ کمتر از یا مساوی کارآیی RM است . (به [8] مراجعه کنید)

(۲) یک (DMU) که توسط RM به عنوان کارآ ارزیابی شود در $ERGM$ نیز کارآ است و برعکس. (به [8] مراجعه کنید)

۳ مدل های پیشنهادی برای اندازه ی راسل

اندازه ی راسل و اندازه ی بهبودیافته ی راسل به طور کامل معرفی شدند. همان طور که دیدید در اندازه ی راسل تابع هدف به فرم $Min \quad \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i + \sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\varphi_r}\right)$ می باشد که در واقع رابطه ی بین شاخص ها ، جمعی در نظر گرفته شده است. در اندازه ی بهبودیافته ی راسل تابع هدف به فرم $Min \quad \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i \Big/ \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r$ می باشد. که رابطه ی بین شاخص ها ضربی در نظر گرفته شده است. در هر دو اندازه ی مطرح شده، تابع هدف غیر خطی است.

در مدلی که پیشنهاد می شود، به طور هم زمان فاکتورهای انقباض ورودی ها را کمینه و فاکتورهای انبساط خروجی ها را بیشینه می کنیم. لذا دو تابع هدف زیر را داریم:

$$Min \quad \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i$$
$$Max \quad \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r$$

که این هدف دوگانه را می توانیم هم ارز با $Min \quad \left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i , -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r\right\}$ قراردهیم. توجه داشته باشید که به جای $Max \quad \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r$ می توانیم $Min \quad -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r$ را قرار دهیم.

با استفاده از روش متغیرهای انحرافی قرار می دهیم:

$$Max \quad \left\{ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i \,, -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r \right\} = \mu$$

بنابراین $\mu \geq -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r$ و $\mu \geq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i$.

در نتیجه ی این تغییرات، اندازه ی راسل بهبودیافته را به کمک مساله ی برنامه ریزی خطی زیر به دست می آوریم:

$$\begin{array}{lll}
Min & \mu & \\
s.t. & & \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{io} & i=1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{ro} & r=1,\dots,s \\
& \theta_i \leq 1, & i=1,\dots,m \\
& \varphi_r \geq 1, & r=1,\dots,s \\
& \mu \geq -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r \quad , \quad \mu \geq -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r & \\
& \lambda_j \geq 0 & j=1,\dots,n
\end{array} \tag{۴}$$

که در واقع مشکل غیر خطی بودن تابع هدف اندازه ی راسل و اندازه ی بهبودیافته ی راسل با این مدل برطرف خواهد شد. در این مدل رابطه ی بین شاخص ها به گونه ای است که روی میانگین عمل نموده و ابتدا ماکزیمم مقدار از بین میانگین کارآیی ورودی ها و میانگین کارآیی خروجی ها انتخاب می شود و مقدار این ماکزیمم را μ می نامیم. سپس $Min \quad \mu$ را به عنوان هدف بر می گزینیم.

قضیه ۱ (x_o, y_o) : DMU_o در مدل (۴) کارآ است اگر و تنها اگر در مدل RM یا $ERGM$ کارآ باشد.

برهان : در بخش ۲ گفته شد (x_o, y_o) : DMU_o که توسط RM کارآ ارزیابی شود در $ERGM$ کارآ است و بالعکس. پس کافی است در این جا مدل پیشنهادی را به دلخواه با RM یا $ERGM$ مقایسه کنیم. فرض می کنیم (x_o, y_o) : DMU_o در (۱۳) کارآست، نشان می دهیم که در $ERGM$ نیز کارآ است. نشان می دهیم اگر (x_o, y_o) : DMU_o در $ERGM$ ناکارآ ارزیابی شود در مدل (۱۳) نیز ناکارآ است .

ناکارآیی توسط $ERGM$ برای یک جواب بهینه ی داده شده ی $(\theta^*, \varphi^*, \lambda^*)$ نشان می دهد که:

$$\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^* \Big/ \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^* \right) < 1$$

چون $(i=1,...,m)$ $\theta_i^* \le 1$ و $(r=1,...,s)$ $1 \le \varphi_r^*$ حداقل یکی از حالت های زیر روی یک اندیس از ورودی ها یا خروجی ها رخ می دهد:

(a) یک اندیس $\hat{i} \in \{1,...,m\}$ وجود دارد به طوری که $\theta_{\hat{i}}^* < 1$ و (یا)

(b) یک اندیس $\hat{r} \in \{1,...,s\}$ وجود دارد به طوری که $\varphi_{\hat{r}}^* > 1$.

چون جواب بهینه ی $(\theta^*, \varphi^*, \lambda^*)$ یک جواب شدنی در مدل پیشنهادی است، جواب بهینه ی $\mu = Max\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*, -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^*\right)$ با توجه به دو حالت بیان شده در شرایط زیر صدق می کند:

$$(a)\quad \mu = Max\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*, -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^*\right) = Max\left(\frac{1}{m}\left(\sum_{i\neq\hat{i}}\theta_i^* + \theta_{\hat{i}}^*\right), -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^*\right)$$
$$< Max\left(\frac{1}{m}\left(\sum_{i\neq\hat{i}}\theta_i^* + 1\right), -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^*\right) \le 1$$

$$(b)\quad \mu = Max\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*, -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^*\right) = Max\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*, -\frac{1}{s}\left(\sum_{r\neq\hat{r}}\varphi_r^* + \varphi_{\hat{r}}^*\right)\right)$$
$$< Max\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*, -\frac{1}{s}\left(\sum_{r\neq\hat{r}}\varphi_r^* + 1\right)\right) \le 1$$

$$(a)\&(b) \;\Rightarrow\; \mu < 1$$

بنابراین، جواب بهینه ی مدل پیشنهادی در هر دو حالت،کمتر از واحد است. عکس نقیض از عبارت بالا ثابت می کند $DMU_o:\ (x_o, y_o)$ که توسط مدل پیشنهادی اول کارآ ارزیابی شود، در $ERGM$ نیز کارآ است. □

در این قسمت مدل دیگری را برای اندازه ی راسل معرفی می کنیم که در آن همانند مدل پیشنهادی اول تابع هدف دوگانه را به صورت زیر به کار می بریم:

$$Min\quad \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m\}$$
$$Max\quad \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s\}$$

که این تابع هدف دوگانه را می توانیم هم ارز با $Min\quad \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m, -\varphi_1, -\varphi_2, ..., -\varphi_s\}$ قرار دهیم. توجه داشته باشید که به جای $Max\quad \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s\}$ می توانیم $Min\quad \{-\varphi_1, -\varphi_2, ..., -\varphi_s\}$ را قرار دهیم. سپس با استفاده از روش متغیرهای انحرافی، متغیری مانند h را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Max\quad \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m, -\varphi_1, -\varphi_2, ..., -\varphi_s\} = h$$

بنابراین:

$$h \ge \theta_i \qquad i = 1, ..., m$$

$$h \ge -\varphi_r \qquad r = 1, ..., s$$

در نتیجه ی این تغییرات، مدل پیشنهادی دوم به صورت زیر بیان می شود:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad h \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ \le \ \theta_i \, x_{io} \qquad i = 1,\dots,m \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \varphi_r y_{ro} \qquad r = 1,\dots,s \\
& \qquad \theta_i \le 1 \qquad i = 1,\dots,m \\
& \qquad \varphi_r \ge 1 \qquad r = 1,\dots,s \\
& \qquad h \ge \theta_i \qquad i = 1,\dots,m \\
& \qquad h \ge -\varphi_r \qquad r = 1,\dots,s \\
& \qquad \lambda_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

توجه داشته باشید که در مدل پیشنهادی دوم از میانگین استفاده نمی شود. بلکه رابطه ی بین شاخص ها به این صورت است که ابتدا ماکزیمم مقدار، از بین کارآیی ورودی ها یعنی $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ و کارآیی خروجی ها یعنی $\{-\varphi_1, -\varphi_2, \dots, -\varphi_s\}$ انتخاب می شود و مقدار این ماکزیمم را h می نامیم و سپس $Min \quad h$ را به عنوان هدف برمی گزینیم.

قضیه ۲ کارآیی $ERGM$ نابیشتر از کارآیی مدل های پیشنهادی اول و دوم است.

برهان: ابتدا نشان می دهیم که مقدار کارآیی $ERGM$ کمتر از مدل پیشنهادی اول است. برای این کار کافی است نشان دهیم:

$$\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r} \le Max\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i, -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r\right\}$$

از طرفی با فرض $\mu = Max \quad \left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i, -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r\right\}$ داریم:

$$\mu \ge \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i \quad \text{و} \quad \mu \ge -\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r$$

در بخش ۲ گفته شد کارآیی $ERGM$ کمتر از یا مساوی کارآیی RM است. با استفاده از این مطلب داریم:

$$\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r} \le \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\varphi_r}\right)=\frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i-\sum_{r=1}^{s}\varphi_r\right)\le\frac{1}{m+s}\left(m\,\mu+s\,\mu\right)=\frac{(m+s)\,\mu}{m+s}=\mu$$

ثابت کردیم کارآیی $ERGM$ کمتر از یا مساوی مدل پیشنهادی اول است.

برای اثبات این که کارآیی $ERGM$ کمتر از یا مساوی مدل پیشنهادی دوم است کافی است نشان دهیم:

$$\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r}\le Max\left\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_m,-\varphi_1,-\varphi_2,...,-\varphi_s\right\}$$

که در آن $h=Max\ \left\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_m,-\varphi_1,-\varphi_2,...,-\varphi_s\right\}$ تابع هدف مدل پیشنهادی دوم است. بنابراین داریم: $i=1,...,m$ $\quad h\ge\theta_i$ و $r=1,...,s$ $\quad h\ge-\varphi_r$.

از دو رابطه ی بالا نتیجه می شود که:

$$m\,h\ge\sum_{i=1}^{m}\theta_i \tag{۶}$$

$$s\,h\ge-\sum_{r=1}^{s}\varphi_r \tag{۷}$$

با جمع طرفین رابطه های(۶) و (۷) خواهیم داشت:

$$(m+s)\,h\ \ge\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i-\sum_{r=1}^{s}\varphi_r\right)\ \Rightarrow\ h\ \ge\frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i+\frac{1}{\sum_{r=1}^{s}\varphi_r}\right)\ \ge\ \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r}$$

بنابراین ثابت کردیم که کارآیی $ERGM$ نابیشتر از مدل پیشنهادی دوم است. □

قضیه ۳ اندازه ی کارآیی RM نابیشتر از مدل پیشنهادی دوم است.

برهان: برای اثبات کافی است نشان دهیم:

$$\frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\varphi_r}\right)\le Max\left\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_m,-\varphi_1,-\varphi_2...,-\varphi_s\right\}$$

با استفاده از اثبات قسمت دوم قضیه ی بالا و رابطه های (۶) و (۷) داریم:

$$(m+s)\,h \ge \left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i-\sum_{r=1}^{s}\varphi_r\right) \;\;\Rightarrow\;\; h \ge \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i+\frac{1}{\sum_{r=1}^{s}\varphi_r}\right)$$

برای توصیف اندازه ی راسل و اندازه ی بهبودیافته ی راسل و مدل های پیشنهادی، آن ها را روی یک مجموعه از داده ها به کار می بریم.

۴ یک مثال توصیفی

داده های جدول ۱ مربوط به ۴۱ شعبه ی بانک با سه ورودی و چهار خروجی می باشد. ورودی ها شامل کامپیوتر، پرسنل و هزینه ی شعبه و خروجی ها شامل منابع، مصارف، اسناد و سود کل می باشد. مدل $ERGM$، مدل پیشنهادی اول و دوم را روی این مجموعه از داده ها به کار می بریم. مقادیر کمی شاخص ها و اندازه ی کارآیی این شعبه ها تحت هر سه مدل به ترتیب درجداول ۱و ۲ خلاصه شده است.

	ورودی ها			خروجی ها			
DMU	کامپیوترها	پرسنل	هزینه ی شعبه	منابع	مصارف	اسناد	سود کل
1	20	116	1687	1143440	927393	1273290	22283
2	14	73	840	260224	276576	502487	4536
3	12	86	843	284797	427502	642326	6568
4	8	51	445	14811	218716	274611	4512
5	13	59	802	204851	200640	434902	4299
6	22	83	818	128101	644366	382404	11465
7	11	51	681	163382	244395	610643	3090
8	7	61	431	72050	117047	245173	2033
9	12	54	655	158773	160406	469921	3349
10	12	61	607	115073	235390	348136	4365
11	9	67	489	120358	243320	367525	3867
12	8	61	568	73459	108106	301889	2320
13	15	82	878	246015	478544	633594	6704
14	8	41	381	57251	137885	633624	2448
15	9	61	523	132066	291898	431847	4868
16	9	47	375	200508	646144	222796	2958
17	7	42	318	43255	116376	132626	2791
18	8	53	378	77784	121590	204909	2379
19	8	47	357	344139	3135465	252683	8944
20	7	43	300	50447	73944	157224	1514
21	7	33	393	155364	182506	231973	3974
22	7	85	420	121011	176369	353242	2771
23	8	47	378	95655	1033765	252945	1973
24	8	41	391	76971	203167	286235	4257
25	7	33	407	88119	129276	301871	2975
26	7	36	280	56292	93593	235890	1794
27	8	37	381	75253	91534	286032	1769
28	7	31	350	66161	78816	228172	1547
29	6	25	201	48954	71411	131801	1689
30	6	36	291	82715	188460	241402	2318

جدول ۱: داده های ۴۱ شعبه بانک

	ورودی ها				خروجی ها		
DMU	کامپیوترها	پرسنل	هزینه ی شعبه	منابع	مصارف	اسناد	سود کل
31	13	24	539	136595	128798	393560	2605
32	5	19	285	43472	69439	202375	1315
33	7	41	382	60196	95845	238793	1697
34	8	30	396	195733	68665	302710	1343
35	8	31	323	68237	96823	195937	2038
36	8	30	354	69226	85963	336286	1603
37	7	31	374	60226	107317	117793	1822
38	8	36	393	93953	143798	313726	1883
39	6	26	259	86977	84583	108209	1857
40	7	32	296	79921	96816	132794	1491
41	8	49	418	179432	216111	257312	5164

ادامه ی جدول ۱

DMU	*ERGM*	مدل پیشنهادی اول	مدل پیشنهادی دوم
	Eficiency	*Eficiency*	*Eficiency*
1	1	1	1
2	0.4405	0.5575	0.5829
3	0.5818	0.7251	0.8074
4	0.1255	0.6137	0.6617
5	0.3889	0.5147	0.5590
6	0.3910	0.6791	0.8220
7	0.4944	0.7732	0.8581
8	0.2845	0.4283	0.4933
9	0.3674	0.5851	0.6243
10	0.3738	0.5178	0.5473
11	0.4375	0.6062	0.6740
12	0.2588	0.4311	0.5090
13	0.5223	0.6844	0.6958
14	1	1	1
15	0.5364	0.7252	0.7848
16	0.7313	0.8957	0.9300
17	0.2802	0.4259	0.4443
18	0.3142	0.4182	0.4536
19	1	1	1
20	0.2459	0.3591	0.4002
21	0.6015	0.6529	0.7123
22	0.4358	0.5826	0.7156
23	1	1	1
24	0.4418	0.6836	0.7290
25	0.4402	0.6609	0.6955
26	0.3456	0.5398	0.5980
27	0.3138	0.5288	0.5608
28	0.3006	0.4900	0.5218
29	0.3495	0.4867	0.5500

جدول۲: اندازه ی کارآیی داده های بانکی

DMU	$ERGM$	مدل پیشنهادی اول	مدل پیشنهادی دوم
	Eficiency	*Eficiency*	*Eficiency*
30	0.5122	0.6708	0.7032
31	1	1	1
32	0.3397	0.6075	0.7290
33	0.2811	0.4604	0.4772
34	0.3397	0.7450	0.8396
35	0.3441	0.4743	0.5326
36	0.3869	0.6619	0.7468
37	0.2924	0.3458	0.3792
38	0.4547	0.6422	0.6863
39	0.3738	0.4022	0.4777
40	0.3296	0.3818	0.4449
41	0.5883	0.6566	0.6924

ادامه ی جدول ۲

همان طور که در جدول مشاهده می کنید شعبه های اول، چهاردهم، نوزرهم، بیست و سوم و سی و یکم کارآ ارزیابی شده اند. یکی از شعبه های ناکارآ به عنوان مثال شعبه ی سی و هفتم را در نظر بگیرید. اندازه ی کارآیی این شعبه تحت مدل $ERGM$، مدل پیشنهادی اول و مدل پیشنهادی دوم به ترتیب عبارت است از: 0.2924، 0.3458 و 0.3792. از مقایسه ی نتایج شعبه های ناکارآ روشن است که اندازه ی کارآیی مدل $ERGM$ از دو مدل دیگر کمتراست و همچنین اندازه ی کارآیی مدل پیشنهادی دوم از بقیه ی مدل ها بیشتر است.

۵ نتیجه گیری

در این مطالعه دو مدل برای بهبود RM پیشنهاد شده است که بار محاسبه ای متناظر با RM را کاهش داده و به علاوه چون تابع هدف آن خطی است به راحتی توسط یک الگوریتم برنامه ریزی خطی قابل حل است. با مشاهده ی نتایج حاصل از مثال توصیفی در می یابیم که کارآیی $ERGM$ کمتر از کارآیی RM و مدل های پیشنهادی است و همچنین اندازه ی کارآیی مدل پیشنهادی دوم از بقیه ی مدل ها بیشتر است. بر اساس این یافته ها، نمی توانیم فوراً تشخیص دهیم که این ویژگی بهتر است یا خیر. به هر حال، $ERGM$، $SOCP$ و مدل های پیشنهادی نوع جدیدی از اندازه گیری کارآیی را ارایه می دهند.

هیچ کس بهترین ملاک برای مقایسه ی RM، $ERGM$، $SOCP$ و مدل های پیشنهادی را نمی داند. آیا RM بهترین (یا دست کم مناسب ترین) اندازه ی کارآیی را دارد؟ یک مشکل این است که مدل های متفاوت DEA نتایج متفاوتی تولید می کنند. بنابراین، این باور به وجود می آید که مدل های DEA کامل نیستند. از این رو، پیوسته در تلاش برای توسعه ی یک مدل جدید DEA هستیم. چنان که در جستجو روی RM توانستیم $ERGM$، $SOCP$ و مدل های پیشنهادی را بیابیم و به طور هم زمان، باید یک اساس کلی را مورد مطالعه قرار دهیم به طوری که برای ما یک راهنمایی تحلیلی روی انتخاب مدل ارایه دهد.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W.W., 1962. Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly 9, 181-186.

[2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1978. Measuring the effiency of decision making units. European Journal of Operational Research 2, 429-444.

[3] Cooper, W.W., Pastor, J.T., 2003. Efficiency aggregation with enhanced Russell measures in DEA Working Paper . University of Texas at Austin, Austin, TX 78712-1174, USA.

[4] Debreu, G., 1951. The Coefficient of resource utilization. Econometrica 19, 273-292.

[5] Fare, R., Lovell, C.A.K., 1978. Measuring the technical efficiency of production. Journal of Economic Theory 19, 150-162.

[6] Farrel, M.J., 1957. The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society, Series A 120,253-281.

[7] Koopmans, T.C., 1951. An analysis of production as an efficient combination of activities. In: Koopmans, T.C. (Eds), Activity Analysis of Production and Allocation. Wiley, New York.

[8] Pastor, J.T., Ruiz, J.L., Sirvent, I. 1999. An enhanced Russell graph efficiency measure. European Journal of Operational Research 115, 596-607.

[9] Russell, R.R., 1985. Measures of technical efficiency. Journal of Economic Theory 35,109-126.

[10] Russell, R.R., 1990. Continuity of measures of technical efficiency. Journal of Economic Theory 51, 255-267.

[11] Sueyoshi, T., Sekitani, K., 2006. Computational Strategy for Russell measure in DEA Second-order Cone Programming. European Journal of Operational Research, Article in Press.

[12] Tone, K., 2001. A slack based measure of efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research 130, 498-509.