پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده با استفاده از مرزهای لایه ای

علیرضا امیرتیموری[1] سهراب کردرستمی[2] عاطفه معصوم زاده[2]
[1]گروه ریاضی کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی رشت
[2]گروه ریاضی کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی لاهیجان

چکیده

این مقاله به تعیین میزان پیشرفت و یا پسرفت یک واحد تصمیم گیرنده در یک دوره زمانی می پردازد. برای این منظور از مرزهای لایه ای استفاده خواهد شد، به این ترتیب که ابتدا واحدها در زمان نخست در چندین سطح کارآیی تقسیم بندی می شوند. سپس هر واحد پس از گذشت یک دوره زمانی با شاخص های جدید و با لایه کارآیی متناظر آن در زمان نخست مقایسه می شود و میزان پیشرفت یا پسرفت آن مشخص خواهد شد. برای این منظور از دو مدل شعاعی (CCR) و غیر شعاعی (SBM) که مبتنی بر متغیرهای کمکی نا صفر است استفاده خواهد شد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، پیشرفت و پسرفت، کارآیی.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها (DEA) یک روش برنامه ریزی ریاضی برای ارزیابی مجموعه ای از واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های چند گانه است. روش های مختلفی برای اندازه گیری کارآیی واحدهای تصمیم گیرنده ارایه شده است. چارنز، کوپر و رودز (۱۹۷۸) مدل CCR را مطرح نمودند [1]. دراین مدل، واحدهای با اندازه کارآیی یک، کارآ نامیده می شوند. مجموعه تمام واحدهای کارآ مرزکارآیی راتشکیل می دهد. واضح است که حذف یا اضافه نمودن یک واحد نا کارآ، میزان کارآیی سایر واحدها و همچنین مرز کارآیی را تغییر نمی دهد. واحدهای کارآ در مدل CCR ممکن است متغیرهای کمکی مخالف صفر داشته باشند. بر این اساس تون(۲۰۰۱) مدل SBM را مطرح نمود [2-3]. این اندازه کارآیی غیر شعاعی است و مستقیما با متغیرهای کمکی سرو کار دارد و مقیاسی بین صفر و یک فراهم می کند که با ساختار DEA همخوانی دارد. همچنین این روش برای واحدهای کارآی ضعیف مقداری کمتر از یک را اختصاص می دهد و در شناسایی واحدهای با کارآیی ضعیف موثر است. سیفورد و زو [4] مرزهای لایه ای را برای افزایش گام به گام کارآیی واحدهای تحت ارزیابی مطرح نمودند، که اساس کار آن مدل شعاعی CCR بود. موریتا، هیروکاوا و زو [5] مرزهای لایه ای را بر اساس مدل غیر شعاعی SBM تشکیل دادند.

همچنین سیفورد و زو (۲۰۰۳) اندازه پیشروی و پسروی واحدها را نسبت به سطوح مختلف کارآیی از طریق مدل شعاعی CCR مطرح نمودند که در آن وقتی واحدها را با سطوح پایین تر کارآیی مقایسه می کنیم، میزان پسروی نسبی و وقتی واحدها را با سطوح بالاتر کارآیی مقایسه می نماییم، میزان پیشروی واحدها را در یک سطح کارآیی به دست می آوریم. به این ترتیب می توانیم واحدها را در یک سطح کارآیی رتبه بندی نماییم. در این مقاله واحدهای تصمیم گیری از طریق مدل غیر شعاعی SBM که مبتنی بر متغیرهای کمکی است، در چندین سطح کارآیی تقسیم بندی می شوند. سپس میزان پیشرفت ویا پسرفت واحدها در یک دوره زمانی نسبت به سطوح کارآیی متناظرشان در مرحله قبل از طریق مدل غیر شعاعی محاسبه خواهد شد. سازماندهی بخشهای بعدی این مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم مرزهای لایه ای با هر دو مدل شعاعی و غیر شعاعی معرفی خواهند شد. پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده از یک دوره به دوره ی بعد در بخش سوم معرفی خواهد شد. یک مثال شامل پانزده واحد تصمیم گیری جهت توصیف نحوه عملکرد روش ارایه شده در مقاله، در بخش چهارم ارایه می شود. نتیجه گیری در بخش پنجم آمده است.

۲ لایه ای کردن مرز های کارآیی

n واحد تصمیم گیرنده به صورت $DMU_j : j=1,\dots,n$ را در نظر بگیرید که در آنها $x_j=(x_{1j},\dots,x_{mj})$ بردار ورودی واحد j ام و $y_j=(y_{1j},\dots,y_{sj})$ بردار خروجی واحد j ام هستند. فرض کنید $J^1=\{DMU_j : j=1,\dots,n\}$ مجموعه همه واحدها در مرحله نخست باشد. زیر مجموعه J^{l+1} را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$J^{l+1}=J^l-E^l$$

که در آن

$$E^l=\{DMU_0\in J^l : \quad DMU_0 \text{ کاراست}\}$$

مجموعه E^l متشکل از تمام واحد هایی است که در مساله برنامه ریزی خطی زیر دارای $\phi_o^l=1$ می باشند.

$$\begin{aligned}
&Max \quad \phi_o^l=\phi\\
&s.t.\\
&\sum_{j\in J^l}\lambda_j x_{ij}\le x_{io}\ , \qquad i=1,\dots,m\\
&\sum_{j\in J^l}\lambda_j y_{rj}\ge \phi\ y_{ro}\ , \qquad r=1,\dots,s\\
&\lambda_j\ge 0\ , \qquad j\in J^l
\end{aligned} \tag{۱}$$

وقتی $l=1$ است آنگاه مدل (۱) مدل CCR در ماهیت خروجی است و E^1 شامل همه واحدهایی است که کارآی شعاعی هستند. واحدهای در E^1 مرز کارآیی سطح اول راتعریف می کنند. وقتی $l=2$ است مدل(۱) که درآن واحدهای کارآی سطح اول نادیده گرفته شده اند، مرز کارآیی سطح دوم را مشخص می کند. به این ترتیب چندین سطح کارآیی به دست می آوریم ودرحالت کلی واحد های در E^l مرز کارآیی سطح l ام را تعریف می کنند. این مجموعه ها دارای خواص زیر هستند:

$i)$ $J^1 = \cup E^l \quad , \quad E^l \cap E^{l'} = \phi \quad , \quad l \neq l'$

$ii)$ برای $l' > l$ ، DMU های در E^l غالب بر DMU ها در $E^{l'}$ هستند .

$iii)$ هر واحد در مجموعه E^l نسبت به تمام واحد ها در مجموعه $J^{l'}$ برای $l' > l$ کارآیی بیشتری دارد.

با استفاده از الگوریتم زیر مرز های لایه ای به کمک مدل شعاعی (۱) تشکیل می شوند:

گام۱. قرار دهید $l=1$ و توسط مدل(۱) DMU های در J^1 را برای به دست آوردن مجموعه E^1 (سطح اول کارآیی) ارزیابی کنید.

گام۲. واحد های کارآ را از مجموعه J^l کنار گذاشته و J^{l+1} را به صورت زیر تعریف کنید:

$$J^{l+1} = J^l - E^l$$

اگر $J^{l+1} = \phi$ آنگاه توقف کنید. در غیر اینصورت قرار دهید $l = l+1$ و گام دو را تکرار کنید.

گام ۳. توسط مدل (۱) مجموعه واحدهای در J^{l+1} را برای یافتن مرز کارآیی جدید ارزیابی کنید و مجموعه E^{l+1} را به دست آورید. این مجموعه مرز کارآیی سطح $l+1$ ام را تعریف می کند.

شرط پایانی. اگر $J^{l+1} = \phi$ آنگاه الگوریتم متوقف می شود.

همان طوری که قبلا ذکر شد، یک واحد کارآی شعاعی ممکن است متغیر های کمکی مخالف صفر داشته باشد. این واحدها تحت عنوان واحدهای کارآی ضعیف نامگذاری می شوند. تون [2] مدل غیر شعاعی SBM را جهت ارزیابی واحدهای تصمیم گیرنده معرفی کرد. این مدل واحدهای کارآی ضعیف را ناکارآ نشان می دهد. شاخص کارآیی SBM به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_{ro}}}$$

شاخص ρ بر حسب مقادیر متغیرهای کمکی تعریف می شود و همواره $0 < \rho \leq 1$. میزان کارآیی غیر شعاعی از طریق مساله برنامه ریزی کسری زیر به دست می آید.

$$
\begin{aligned}
& s.t. \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}, \quad i = 1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1,\dots,s \\
& \lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \\
& s_i^- \ge 0, \quad i = 1,\dots,m \\
& s_r^+ \ge 0, \quad r = 1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

یک واحد در مدل SBM کارآ است اگر وفقط اگر $\rho^* = 1$ باشد. $\rho^* = 1$ به این معنی است که تمام متغیرهای کمکی متناظر با واحد تحت ارزیابی صفر هستند، لذا واحد تحت ارزیابی روی مرز کارآیی قرار می گیرد.

اکنون به کمک مدل SBM یک فرآیند لایه ای مشابه روش قبل را توسعه می دهیم. در این روش E^l مجموعه تمام واحدهای در J^l است که در مساله زیر میزان کارآیی یک دارند.

$$
\begin{aligned}
& Min \qquad \rho_o = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_{ro}}} \\
& s.t. \\
& \sum_{j \in J^l} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}, \quad i = 1,\dots,m \\
& \sum_{j \in J^l} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1,\dots,s \\
& \lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \\
& s_i^- \ge 0, \quad i = 1,\dots,m \\
& s_r^+ \ge 0, \quad r = 1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

مساله بالا یک مساله برنامه ریزی کسری است که می توان آن را با به کار بردن تبدیل چارنز و کوپر[6] به یک مساله برنامه ریزی خطی به صورت زیر تبدیل نمود.

$$
\begin{aligned}
& Min \qquad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_{io}} \\
& s.t: \\
& t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_{ro}} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{j \in J^l} \Lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1,\dots,s
\tag{۴}
$$

$$\Lambda_j \geq 0\,, \quad j \in J^l$$
$$s_i^- \geq 0\,, \quad i = 1,\dots,m$$
$$s_r^+ \geq 0\,, \quad r = 1,\dots,s\,.$$

حال با جایگزینی مساله (۴) به جای مساله (۱) در الگوریتم قبل واحدهای تصمیم گیرنده از طریق مدل غیرشعاعی در چندین سطح کارآیی تقسیم بندی می شوند.

۳. اندازه پیشرفت و پسرفت واحدها در یک دوره زمانی

پس از این که در دوره نخست مرزهای لایه ای بر اساس مدل شعاعی (۱) مشخص شدند، می توان میزان پیشرفت و یا پسرفت هر واحد را پس از گذشت یک دوره زمانی با مولفه های ورودی وخروجی جدیدش نسبت به لایه کارآیی متناظرش در زمان نخست محاسبه کرد. واحد DMU_o را پس از گذشت یک دوره زمانی با بردار ورودی $x_o^{(2)} = (x_{1o}^{(2)},\dots,x_{mo}^{(2)})$ و بردار خروجی $y_o^{(2)} = (y_{1o}^{(2)},\dots,y_{so}^{(2)})$ در نظر بگیرید و فرض کنید این واحد در زمان نخست متعلق به سطح کارآیی l' باشد. میزان پیشرفت یا پسرفت این واحد با مدل شعاعی از طریق مساله برنامه ریزی خطی زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
&Max \quad \phi_o^{l'} = \phi \\
&s.t: \\
&\sum_{j\in J^{l'}} \lambda_j x_{ij}^{(1)} \leq x_{io}^{(2)}, \qquad i = 1,\dots,m \\
&\sum_{j\in J^{l'}} \lambda_j y_{rj}^{(1)} \geq \phi y_{ro}^{(2)}, \quad r = 1,\dots,s \\
&\lambda_j \geq 0\,, \qquad j \in J^{l'}
\end{aligned} \tag{۵}$$

فرض کنید (λ^*, ϕ^*) جواب بهینه مساله فوق باشد. سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

- اگر $\phi_o < 1$، در این صورت DMU_o از دوره نخست به دوره دوم فعالیت دارای پسرفت بوده است.
- اگر $\phi_o > 1$، در این صورت DMU_o از دوره نخست به دوره دوم فعالیت دارای پیشرفت بوده است.
- اگر $\phi_o = 1$، در این صورت DMU_o نه پیشرفت داشته است و نه پسرفت.

اگر در زمان نخست مرزهای لایه ای را با مدل غیر شعاعی SBM تشکیل دهیم، پس از گذشت یک دوره زمانی واحد ها با مولفه های ورودی وخروجی جدیدشان را با لایه کارآیی متناظر در زمان نخست با مدل غیر شعاعی ارزیابی می کنیم و میزان پیشرفت یا پسرفت این واحدها را به دست می آوریم.

مجددا" DMU_o را پس از گذشت یک دوره زمانی با بردار ورودی $x_o^{(2)} = (x_{1o}^{(2)},\dots,x_{mo}^{(2)})$ و بردار خروجی $y_o^{(2)} = (y_{1o}^{(2)},\dots,y_{so}^{(2)})$ در نظربگیرید، فرض کنید این واحد در زمان نخست با مدل SBM به سطح کارآیی l' تعلق داشته باشد.

برای ارزیابی میزان پیشرفت یا پسرفت این واحد مساله برنامه ریزی زیر را در نظر می گیریم:

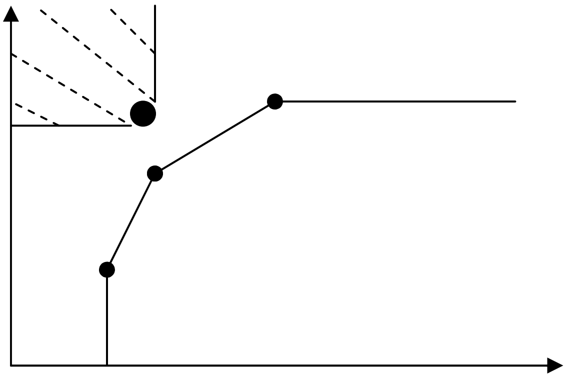
$$
\begin{aligned}
&Min \qquad \rho=\frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-}}{x_{io}^{(2)}}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+}}{y_{ro}^{(2)}}}\\
&s.t:\\
&\sum_{j\in J^{l'}}\lambda_j x_{ij}^{(1)}+s_i^{-}=x_{io}^{(2)}, \quad i=1,\dots,m\\
&\sum_{j\in J^{l}}\lambda_j y_{rj}^{(1)}-s_r^{+}=y_{ro}^{(2)}, \quad r=1,\dots,s\\
&\lambda_j\geq 0, \quad j\in J^{l'}\\
&s_i^{-}\geq 0, \quad i=1,\dots,m\\
&s_r^{+}\geq 0, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

این مساله یک مساله برنامه ریزی کسری است که می توان آن را به کار بردن تبدیل چارنز و کوپر به مساله برنامه ریزی خطی زیر تبدیل نمود:

$$
\begin{aligned}
&Min \qquad \tau=t-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-}}{x_{io}^{(2)}}\\
&s.t:\\
&t+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+}}{y_{ro}^{(2)}}=1\\
&\sum_{j\in J^{l'}}\Lambda_j x_{ij}^{(1)}+s_i^{-}=x_{io}^{(2)}, \quad i=1,\dots,m\\
&\sum_{j\in J^{l'}}\Lambda_j y_{rj}^{(1)}-s_r^{+}=y_{ro}^{(2)}, \quad r=1,\dots,s\\
&\Lambda_j\geq 0, \quad j\in J^{l'}\\
&s_i^{-}\geq 0, \quad i=1,\dots,m
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

فرض کنید $(s^{-*}, s^{+*}, \Lambda^{*})$ جواب بهینه مساله فوق و τ^{*} مقدار بهینه آن باشد.

- اگر τ^{*} کمتر از یک باشد، واحد تحت ارزیابی پسرفت داشته است.
- اگر τ^{*} برابر یک باشد، این واحد نه پیشرفت داشته است نه پسرفت.
- ممکن است مساله فوق نشدنی باشد، در این صورت واحد دارای پیشرفت بوده است. (این مطلب در شکل (۱) توصیف شده است).



شکل ۱: مدل(۷) برای واحدی که پیشرفت داشته باشد نشدنی است

میزان پیشرفت واحد تحت ارزیابی DMU_o که در زمان نخست به لایه کارآیی l' تعلق داشته است، پس از گذشت یک دوره زمانی از طریق مساله برنامه ریزی خطی زیر به دست می آید:

$$
\begin{aligned}
&Min \qquad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{io}^{(2)}} \\
&s.t. \\
&t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{y_{ro}^{(2)}} = 1 \\
&\sum_{j\in J^{l'}}\Lambda_j x_{ij}^{(1)} - s_i^- = x_{io}^{(2)}, \quad i=1,\dots,m \\
&\sum_{j\in J^{l'}}\Lambda_j y_{rj}^{(1)} + s_r^+ = y_{ro}^{(2)}, \quad r=1,\dots,s \\
&\Lambda_j \ge 0, \quad j\in J^{l'} \\
&s_i^- \ge 0, \quad i=1,\dots,m \\
&s_r^+ \ge 0, \quad r=1,\dots,s
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

بنابراین در روش غیر شعاعی با استفاده از مساله (۷) میزان پسرفت واز طریق مساله (۸) میزان پیشرفت واحدها را به دست می آوریم.

۴ مثال عددی

۱۵واحد تصمیم گیرنده را با ۲ خروجی و ورودی واحد در نظر بگیرید. مقادیر ورودی و خروجی در جدول (۱) نشان داده شده است.

DMU_j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
Output 1	۳	۵	۷	۱۲	۱۰	۷	۵	۹	۱۰	۹	۱۱	۸	۱۲	۱۵	۱۴
Output 2	۱۰	۱۲	۷	۴	۱۵	۱۰	۸	۶	۱۰	۲	۱۳	۴	۸	۹	۶
Input	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

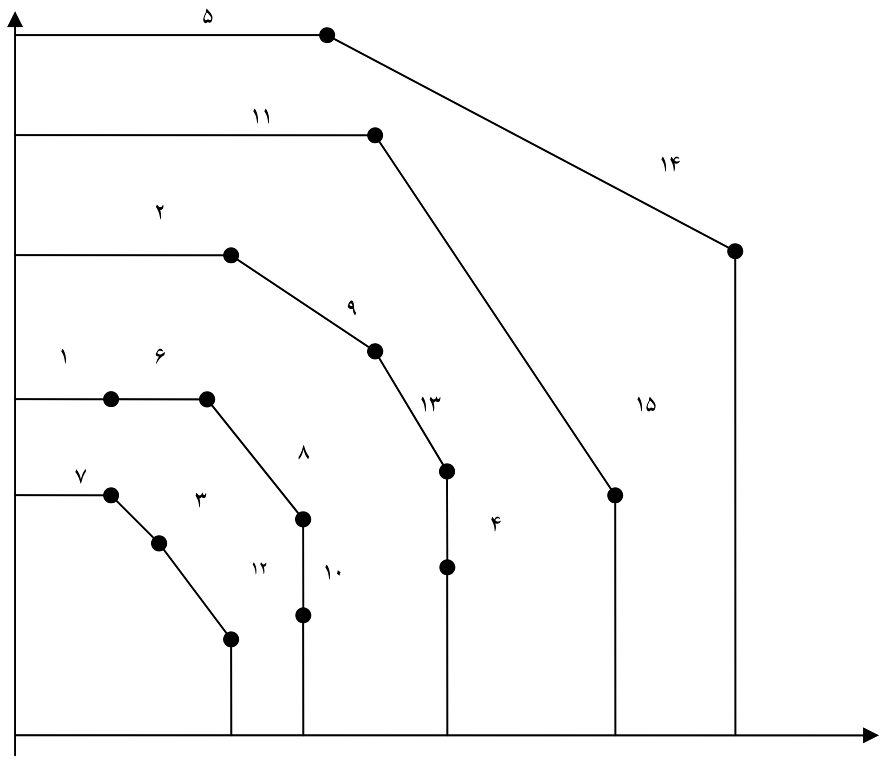
جدول ۱: مقادیر ورودی و خروجی ۱۵ واحد در زمان نخست

پس از گذشت یک دوره زمانی، مقادیر جدید ورودی وخروجی برای این ۱۵ واحد در جدول ۲ نشان داده شده است.

DMU_j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
Output 1	۴	۵	۵	۸	۱۱	۹	۴	۱۲	۱۴	۱۵	۹	۵	۱۱	۱۳	۱۳
Output 2	۴	۱۰	۸	۱۳	۱۲	۸	۷	۵	۱۰	۸	۵	۵	۹	۷	۱۵
Input	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۲: مقادیر ورودی و خروجی ۱۵ واحد پس از گذشت یک دوره زمانی

لایه های کارآیی متناظر با این ۱۵ واحد در زمان نخست از طریق مدل (۱) در شکل(۲) دیده می شود.



شکل۲: مرزهای لایه ای از طریق مدل شعاعی

جدول (۳) لایه های کارآیی متناظر با هر واحد را در زمان نخست و میزان شاخص پیشرفت و پسرفت هر واحد را پس از گذشت یک دوره زمانی نسبت به لایه کارآیی متناظر آن در زمان اول از طریق مدل شعاعی نشان می دهد. ستون دوم جدول لایه ی شامل DMU_j را نشان می دهد، میزان پیشرفت یا پسرفت شعاعی در ستون سوم آمده است.

DMU_j	$\in E^l$	ϕ^*	Status
۱	۴	۰,۵۰۰۰	پسرفت
۲	۳	۰,۸۵۷۱	پسرفت
۳	۵	1.0000	تغییر نمی کند
۴	۳	1.1571	پیشرفت
۵	۱	0.9333	پسرفت
۶	۴	1.0833	پیشرفت
۷	۵	0.8750	پسرفت
۸	۴	1.3333	پیشرفت
۹	۳	1.2000	پیشرفت
۱۰	۴	1.6667	پیشرفت
۱۱	۲	0.6724	پسرفت
۱۲	۵	0.7143	پسرفت
۱۳	۳	1.0000	تغییر نمی کند
۱۴	۱	0.8667	پسرفت
۱۵	۲	1.1724	پیشرفت

جدول ۳: پیشرفت و پسرفت با مدل شعاعی

جدول(۴) لایه های کارآیی هر واحد را در زمان نخست و میزان پیشرفت و یا پسرفت هر واحد را پس از گذشت یک دوره زمانی نسبت به لایه کارآیی متناظر هر واحد در زمان نخست از طریق مدل غیرشعاعی SBM نشان می دهد. ستون دوم جدول لایه ی شامل DMU_j را نشان می دهد، میزان پیشرفت یا پسرفت غیر شعاعی در ستون سوم آمده است.

DMU_j	$\in E^l$	τ^*	Status
۱	۵	0.1250	پسرفت
۲	۳	0.5000	پسرفت
۳	۶	1.0000	تغییر نمی کند
۴	۴	0.7967*	پیشرفت
۵	۱	0.9750*	پسرفت
۶	۴	0.6250	پیشرفت
۷	۶	0.9792*	پسرفت
۸	۵	0.7885*	پیشرفت
۹	۳	0.0323*	پیشرفت
۱۰	۶	0.0889	پیشرفت
۱۱	۲	0.7500	پسرفت
۱۲	۷	0.7143	پسرفت
۱۳	۳	1.0000	تغییر نمی کند
۱۴	۱	0.6857	پسرفت
۱۵	۲	0.7778*	پیشرفت

جدول ۴: پیشرفت و پسرفت با مدل غیر شعاعی

۵ نتیجه گیری

تون در سال۲۰۰۲ لایه بندی مرزهای کارآیی را از طریق مدل شعاعی مطرح نمود، سپس سیفورد و زو در سال۲۰۰۳ میزان پیشروی و پسروی واحدها را با استفاده از مرزهای لایه ای و از طریق مدل شعاعی مطرح نمودند. در این مقاله میزان پیشرفت و یا پسرفت واحدها در یک دوره زمانی مطرح نمودیم. به این صورت که ابتدا در زمان نخست مرزهای لایه ای را از طریق مدل غیر شعاعی به دست آورده و سپس میزان پیشرفت و یا پسرفت هر واحد را پس از گذشت یک دوره زمانی از طریق مدل های مطرح شده نسبت به لایه کارآیی متناظرش در مرحله قبل به دست آوردیم.

منابع

[1] Charnes A., Cooper W. W. and Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research. 1978, 2, 429-444.
[2] Tone K. A slack–based measure of efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research. 2002, 130, 498-509.
[3] Tone K. A slack–based measure of super–efficiency in data envelopment analysis. European journal of Operational Research. 2002, 143, 32-41.
[4] Seiford L.M. and Zhu J. Context–dependent data envelopment analysis measuring attractiveness and progress. OMEGA, 2003, 31, 397-408.
[5] Morita H., Hirokawa K. and Zhu J. A slack–based measure of efficiency in Context–dependent data envelopment analysis. OMEGA, 2005, 33, 357-362.
[6] Charnes A. and Cooper W. W. Programming with linear fractional functional. Naval Research Logistics Quarterly, 1962, 15, 333-334.