ارتباط بین (P – گراف) ها و ماتروئیدها و ابرگراف ها

(وقتی که بین راسها رابطه ترتیبی جزئی برقرار باشد)

میرمظفر معصومی[۱] * زهره السادات میرمویدی[۲]
[۱]دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات تهران
[۲]آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران

چکیده

در این مقاله (P – گراف) ها، ماتروئیدها و ابرگرافها و ماتریسهای مربوط به آنها را به صورت دیگری بیان گردیده و ارتباط بین آنها را با یکدیگر نشان خواهیم داد. همچنین نشان خواهیم داد که یک ماتروئید و یا ابرگراف یک (P – گراف) است. در حالت نخست فرض می کنیم که بین راسها رابطه ترتیبی جزئی موجود است و سپس در حالت کلی به راحتی می توان آنرا تعمیم داد.

کلمات کلیدی: گراف جهت دار، گراف غیرجهت دار، ماتروئیدها، ابرگراف ها.

مقدمه

نخست (P- گراف) هایی را تعریف می کنیم که بین راسهای آن رابطه تربیتی جزئی موجود باشد. سپس ماتروئیدها و ابرگرافها را مورد مطالعه قرار می دهیم. هدف ما یافتن رابطه بین (P – گراف) با ماتروئیدها و ابرگراف می باشد.

(P– مسیر) در یک گراف

تعریف: (P– مسیر) در یک گراف یک $p+1$ گانه به صورت $G=(X,U_1,U_2,...,U_i,...,U_p)$ می باشد. که در آن X مجموعه راسها و p مجموعه دیگر یعنی $U_1,U_2,...,U_p$ به صورت:

$$x,y\in X \qquad \{x,y\}\in U_i$$

تعریف می شوند که به ترتیب روابط دوتایی $R_p,...,R_i,...,R_2,R_1$ بین راسهای آنها برقرار می باشد. عضوهای U_i را یالهای (P– مسیر) و U_i را یک مسیر مربوط به (P– مسیر) گراف غیرجهت دار می نامند.

هرگاه عضوهای U_i به صورت $(x,y)\in U_i$ $x,y\in X$ تعریف شوندآنرا (P– مسیر) گراف جهت دار نامند. عضوهای U_i را کمان و U_i را یک راه مربوط به (P– مسیر) گراف جهت دار گویند.

*عهده دار مکاتبات

(P– گراف)

(P- گراف) یک (P– مسیر) است هرگاه عدد p تعداد ماکزیمم یالهای بین دو راس باشد. (P- گراف) را یک چند گراف نیز گویند.

مثال ۱: مجموعه $X = \{10,12,15,30,60\}$ و روابط دو به دو عضوهای این مجموعه به صورت زیر تعریف شده اند:

$x \neq y \qquad x,y \in X \quad , \quad x\,R_1 y \Leftrightarrow$ x و y بر ۳ قابل قسمت هستند.

$x \neq y \qquad x,y \in X \quad , \quad x\,R_2 y \Leftrightarrow$ x و y بر ۵ قابل قسمت هستند.

$x \neq y \qquad x,y \in X \quad , \quad x\,R_3 y \Leftrightarrow$ x و y بر ۲ قابل قسمت هستند.

هرگاه X مجموعه راسها و U_1,U_2,U_3 را مجموعه های مسیر فرض کنیم، گراف آن یک (۳-گراف) غیرجهت دار با مرتبه ۵ است و ماتریس وابسته به گراف مربوط به مسیرهای آن به صورت زیر نشان داده می شود:

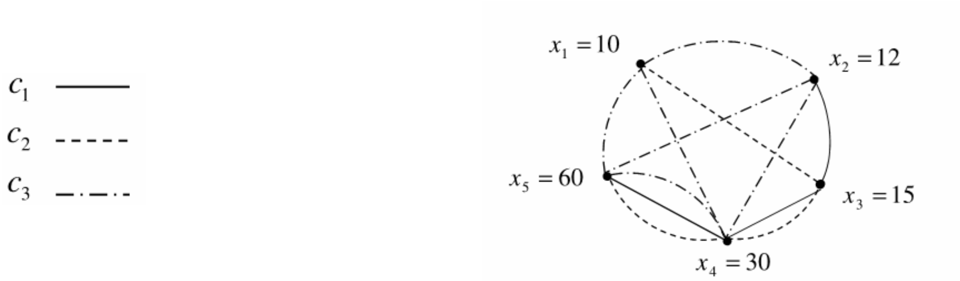
$c_1 = \{x_2,x_3,x_4,x_5\}$

$c_2 = \{x_1,x_3,x_4,x_5\}$

$c_3 = \{x_1,x_2,x_4,x_5\}$

ماتریس مربوط به مسیرها $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



ماتریس وابسته به گراف(۳- گراف) $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \max(a_{ij}) = 3$$

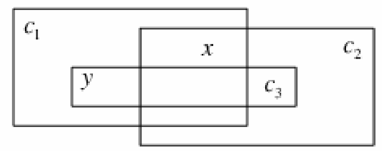
ماتروئیدها و گرافهای مربوط به آن

یک ماتروئید به صورت $M=(L,E)$ تعریف می شود که یک ساختمان جبری است و در آن L یک مجموعه متناهی و E زیرمجموعه ای از L با دو شرط زیر می باشد:

- هیچکدام از عضوهای E تهی نبوده و شامل زیر مجموعه دیگری نیز نباشد، یعنی:

$$c_i \neq \phi \quad \forall \mathrm{c_i} \in E \quad \forall \mathrm{c_j} \in E \quad \mathrm{c_i} \not\subset c_j$$

- اگر $c_1 \in E$ و $c_2 \in E$ و $x \in L$ و $y \in L$ بطوریکه $x \in c_1 \bigcap c_2$ و $y \in c_1 - c_2$ بوده، وانگهی وجود داشته باشد $c_3 \in E$ بطوریکه $y \in c_3$ باشد و $x \notin c_3$ و $c_3 \in c_1 \bigcup c_2$ باشد که در شکل زیر نشان داده شده است.



L را مجموعه راسها، و زیرمجموعه های $c_1, c_2, ..., c_i$ را مجموعه یالهای ماتروئید می نامند (با فرض اینکه عضوهای c_i ها مجهز به رابطه ترتیبی جزئی باشد). ماتروئید به صورت یک (P- گراف) نمایش داده می شود.

مثال ۲: هرگاه $\begin{cases} L=\{x_1,x_2,x_3,x_4x_5,x_6\} \\ x_i \leq x_{i+1} \end{cases}$ و E شامل تمام زیر مجموعه های چهارعضوی L باشند، $\mathrm{M}=(L,E)$ یک ماتروئید است. $E=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\}$ که در آن

$$c_1=\{x_2,x_3,x_4,x_5\} \qquad \mathrm{c}_3=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$$

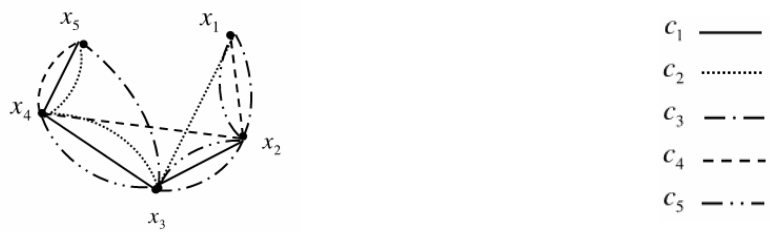
$$c_2=\{x_1,x_3,x_4,x_5\} \qquad \mathrm{c}_4=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\} \qquad \mathrm{c}_5=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$

ماتریس مربوط به مسیرها و ماتریس وابسته آن به صورت زیر است:

ماتریس مربوط به مسیرها

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



که دارای ۵ مسیر بوده، اما یک (۳-گراف) است.

ماتریس وابسته $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \max(a_{ij}) = 3 \end{array}$$

ابرگرافها

هدف از بیان نظریه ابرگرافها، تعمیم نظریه گراف است.

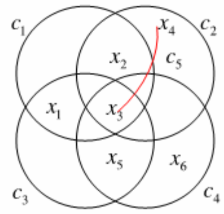
تعریف: اگر $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ یک مجموعه متناهی و $E=\{c_i : i\in I\}$ یک خانواده از زیرمجموعه های X باشند، $H=(X,E)$ رایک ابرگراف می نامند اگر شرایط زیر برقرار باشد.

$$\bigcup_{i\in I} c_i = X \qquad \mathrm{c_i} \neq \phi \qquad (\mathrm{i}\in \mathrm{I})$$

$|X|=n$ را مرتبه این ابرگراف و $x_1,x_2,...,x_n$ را راسها و $c_1,c_2,...,c_m$ را یالهای آن می نامند. در حالت خاص فرض می کنیم که در مجموعه c_i ها رابطه ترتیبی وجود داشته باشد:

$|c_i|=1$ را یک گره و $|c_i|=2$ را یک یال بین دو راس و $|c_i|>2$ را به وسیله منحنی بسته ای که تمام راس های c_i را دربر دارد نشان میدهند. در این حالت c_i را یک راه ساده که به ترتیب رابطه ترتیبی به هم وصل شده باشد می نامند، که نظیر یال در (P- گراف) ها است.

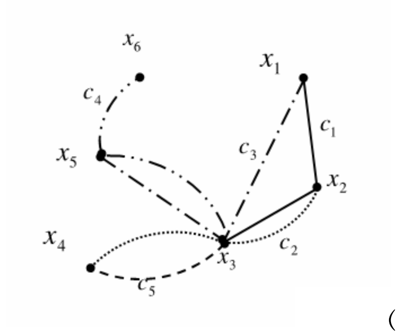
مثال: هرگاه $\left| \begin{array}{l} X=\{x_1,x_2,x_3,x_4x_5,x_6\} \\ x_i \le x_{i+1} \end{array} \right.$ و $c_1=\{x_1,x_2,x_3\}$ و $c_2=\{x_2,x_3,x_4\}$ و $c_3=\{x_1,x_3,x_4\}$ و $c_4=\{x_5,x_6\}$ و $c_5=\{x_3,x_4\}$ باشد ابرگراف زیر را رسم کرده و به صورت (P- گراف) نشان می دهیم. همچنین ماتریس وابسته و ماتریس مسیرهای ابرگراف را هم به دست می آوریم.



ابرگراف

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ماتریس مربوط به مسیرها



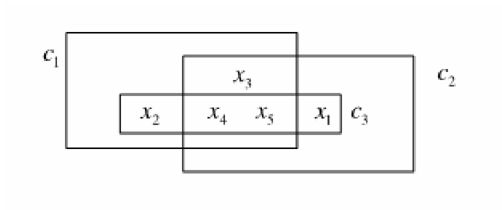
(۲-گراف)

ماتریس وابسته به (۲-گراف) ⟵

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \max(a_{ij}) = 2$$

ابرگراف فوق یک (۵-مسیر) با مرتبه ۶ می باشد که یک (۲-گراف) است.

مثال۱ مربوط به (P- گراف) را می توان یک ماتروئید به صورت زیر نشان داد:



نتایج

ماتروئیدها و ابرگرافها را می توان به (P-گراف) تبدیل کرد و تمام قضایای مربوط به ماتروئیدها و ابرگرافها قابل تبدیل به (P-گراف) بوده و عکس آن با تغییر کوچکی صادق است.

منابع

۱- C.Berge; Graphs and Hypergraphs (Paris, 1989)

۲- معصومی، شاهورانی، حسین زاده، مدل های ریاضی- زیرچاپ