بهینه سازی تابع هدف چندگانه با توجه به محدودیت های معادلات فازی با عملگر Yager's union

محمد خوینی*، اسماعیل خرّم
دانشکده علوم، دانشگاه رازی کرمانشاه
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله، یک مدل بهینه سازی با یک تابع هدف چندگانه با توجه به یک دستگاه معادلات رابطه فازی ارایه می شود. مجموعه جواب این قبیل از معادلات رابطه فازی، یک مجموعه غیر محدب است. بنابراین روش‌های معمولی از قبیل روش سیمپلکس یا روش نقطه ی داخلی برای حل این گونه مسایل به کار نمی روند. در این مقاله، ابتدا روی مجموعه جواب شدنی بحث می کنیم و سپس به مساله بهینه سازی یک تابع هدف خطی می پردازیم که برای حل این مساله، ابتدا آن را به یک مساله برنامه ریزی صحیح ۱−۰ تبدیل کرده و سپس آن را با استفاده از تکنیک شاخه و کران حل می نمائیم و در نهایت به مساله بهینه سازی یک تابع هدف چندگانه با استفاده از روش های L_p متریک می پردازیم. قضایا، تعاریف و لم های مورد نیاز در این مقاله بیان می شود و سرانجام به منظور روشن شدن روش ارایه شده، مثالی واقعی ارایه می شود.

کلمات کلیدی: نظریه مجموعه های فازی، معادلات رابطه فازی، عملگر اجتماع Yager، بهینه سازی تابع هدف خطی، روش شاخه و کران، برنامه ریزی صحیح ۱−۰، بهینه سازی تابع هدف چندگانه، روش های L_p متریک.

۱ مقدمه

Yager اجتماع مجموعه‌های فازی را به صورت $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x))\middle| x\in X\right\}$ تعریف کرد [۱] که در آن $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه ی فازی و X یک مجموعه ی مرجع است و

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\min\left\{1,(\mu_{\tilde{A}}^{P}(x)+\mu_{\tilde{B}}^{P}(x))^{\frac{1}{P}}\right\}, P\geq 1 \qquad (۱)$$

* عهده دار مکاتبات

عملگر اجتماع وی برای $P \to \infty$ به عملگر ماکزیمم همگراست و همچنین این عملگر برای همه ی مقادیر P، دارای خاصیّت جابجایی و شرکت‌پذیری است. در این مقاله، عملگر Yager's union برای حالت خاصّ $P=۱$ در نظر گرفته می شود.

فرض می‌کنیم $۰ \le a_{ij} \le ۱$, $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ یک ماتریس فازی و $۰ \le b_j \le ۱$, $b=(b_۱,b_۲,\ldots,b_n)^T$ یک بردار فازی $n-$ بعدی باشد، آن گاه مدل تصمیم گیری چند هدفی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}&\min \quad F(x)=\{f_۱(x),f_۲(x),\ldots,f_k(x)\}\\ &s.t. \quad x^T \mathrm{O} A=b^T \qquad ۰\le x\le ۱\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $x=(x_۱,x_۲,\ldots,x_m)^T$، $۰\le x\le ۱$ یک بردار فازی $m-$ بعدی و تابع هدف $f_j(x)$ به ازای هر $j\in K=\{۱,۲,\ldots,k\}$، تابعی خطی می باشد، یعنی:

$$f_j(x)=c_j x \quad (j\in K) \tag{۳}$$

و همچنین "O" عملگر Yager's union برای حالت $P=۱$ است، یعنی:

$$\mathrm{O}: \max_{i=1,2,\ldots,m}\left\{\min\left\{۱, x_i+a_{ij}\right\}\right\}=b_j \qquad (j=۱,۲,\ldots,n) \tag{۴}$$

به عبارت دیگر، سعی می کنیم یک بردار جواب $x=(x_۱,x_۲,\ldots,x_m)^T$ با $۰\le x_i\le ۱$ را طوری پیدا کنیم که توابع هدف $\{f_۱(x),f_۲(x),\ldots,f_k(x)\}$ به طور هم زمان کمترین مقدار خود را روی مجموعه شدنی مساله (۲) اختیار کنند.

حل معادلات رابطه ی فازی، تاکنون مورد توجّه بسیاری از محققین بوده است [۹-۲]. همچنین ثابت شده است که مجموعه ی شدنی معادلات رابطه ی فازی $x^T \mathrm{O} A=b^T$ برای بعضی از عملگرهای فازی، می‌توانند برحسب یک جواب ماکزیمم و تعداد متناهی جواب می‌نیمم تعیین شود [۳,۷,۸].

۲ مشخص سازی مجموعه ی شدنی

تعریف ۱: فرض می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&J_1=\left\{j\in J \,\middle|\, b_j<1, I_j^{1}\neq\varnothing\right\} \quad , \quad I_j^{1}=\left\{i\in I \,\middle|\, a_{ij}>b_j\right\}\\
&J_2=\left\{j\in J \,\middle|\, b_j<1, I_j^{1}=\varnothing, I_j^{2}\neq\varnothing\right\} \quad , \quad I_j^{2}=\left\{i\in I \,\middle|\, a_{ij}=b_j\right\}\\
&J_3=\left\{j\in J \,\middle|\, b_j<1, I_j^{1}=I_j^{2}=\varnothing\right\} \quad , \quad I_j^{3}=\left\{i\in I \,\middle|\, a_{ij}<b_j\right\}\\
&J_4=\left\{j\in J \,\middle|\, b_j=1, I_j^{2}\neq\varnothing\right\}\\
&J_5=\left\{j\in J \,\middle|\, b_j=1, I_j^{2}=\varnothing\right\}
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

حال مسأله ی زیر را در نظر می‌گیریم: (برای یک j ثابت)

$$x^T \circ a_j=b_j \tag{۶}$$

قضیه ۱ مساله (۶) را در نظر می گیریم که در آن $j\notin J_1$.

فرض می کنیم $j_{X\left[A,b^T\right]}=\left\{x\in X \,\middle|\, x^T\circ a_j=b_j\right\}$ آن گاه:

$$j_{X\left[A,b^T\right]}=\bigcup_{i\in I=I_j^{2}\cup I_j^{3}}\left[j_{\breve{x}(i)},j_{\hat{x}}\right] \tag{۷}$$

که در آن $j_{\hat{x}}$ جواب ماکزیمم و $(i\in I)$ $j_{\breve{x}(i)}$ جواب های مینیمم مساله (۶) می باشند.

اثبات: به اثبات قضیه (۱) در [۹] مراجعه شود.

تعریف ۲ فرض می کنیم $I_J=I_{j_1}^{3}\times I_{j_2}^{3}\times\ldots\times I_{j_m}^{3}$ که در آن $j_1<j_2<\ldots<j_m$، $j_1,j_2,\ldots,j_m\in J_3\cup J_5$ و $m\le n$.

بردار $m-$بعدی $e=(e(j_1),e(j_2),\ldots,e(j_m))$ را تعریف می کنیم به طوری که:

(توجّه شود که وقتی $j\in J_3\cup J_5$، آنگاه $I_j^{3}=I$.)

$$e(j_i)\in I_{j_i}^{3} \tag{۸}$$

تعریف ۳ تعریف می کنیم $\hat{x}=\min_{j\in J}\left\{j_{\hat{x}}\right\}$ و همچنین بردار $m-$بعدی $e_x=((e_x)_1,(e_x)_2,\ldots,(e_x)_m)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall i\in I:(e_x)_i=\begin{cases}\max\limits_{j\in J_e(i)}\left\{b_j-a_{ij}\right\}, & J_e(i)\neq\varnothing\\ 0 & J_e(i)=\varnothing\end{cases} \tag{۹}$$

که در آن $J_e(i)=\left\{j\in J_۳ \bigcup J_۵ \left| e(j)=i\right.\right\}$.

تعریف ٤ ماتریس $\tilde{A}$ یک ماتریس هم ارز با ماتریس A گفته می شود اگر و تنها اگر $X\left[\tilde{A},\tilde{b}^T\right]=X\left[A,b^T\right]$ به طـور مشـابه، مساله $x^T \text{O}\tilde{A}=\tilde{b}^T$ یک مسأله ی هم ارز با مسأله ی $x^T \text{O}A=b^T$ گفته می شود اگر و تنها اگر ماتریس $\tilde{A}$ یک ماتریس هم ارز با ماتریس A باشد.

تعریف ٥ ماتریس $A_۱$ که با حذف ستون های a_j به ازای هر $j\in J_٤$ از ماتریس A به دست می آید را تعریف می کنیم و همچنین بردار $b_{(۱)}$ را تعریف می کنیم که از حذف مؤلفه ی b_j به ازای هر $j\in J_٤$ از بردار b به دست می آید.

قضیه ۲ مسأله ی $x^T \text{O}A_۱=b_{(۱)}^T$ با مسألهٔ $x^T \text{O}A=b^T$ هم ارز است.

اثبات: با توجه به تعریف (۴) اثبات واضح است.

تعریف ٦ مجموعه ی I' را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$I'=\left\{i\in I\ \left|\ i\in I_j^{۲},\ j\in J_۲\ in\ A_۱\right.\right\} \tag{۱۰}$$

قضیه ۳ فرض می کنیم $X\left[A_۱,b_{(۱)}^T\right]\neq\varnothing$ و $J_۲\neq\varnothing$، آنگاه داریم:

$$\forall x\in X\left[A,b^T\right],\forall i\in I':x_i=۰$$

اثبات: اثبات با توجه به قضیه (۲) و تعریف (۴)، به دست می‌آید.

تعریف ۷ برای هر $x\in X\left[A_۱,b_{(۱)}^T\right]$ و هر $i\in I'$ قرار می دهیم $x_i=۰$ وسطر iام را از ماتریس $A_۱$ حذف می کنیم و به این ترتیب ماتریس $A_۲$ به دست می آید.

قضیه ٤ ستون a_j از ماتریس های $A_۱$و $A_۲$ را در نظر می گیریم. اگر در ماتریس $A_۱$، $j\in J_۲$ و در ماتریس $A_۲$، $j\in J_۳$ باشد آنگاه ماتریس های $A_۱$ و $A_۲$ هم ارز نیستند.

اثبات: با توجه به قضیه (۳) و تعریف (۷)، نتیجه می گیریم که $X\left[A_۱,b_{(۱)}^T\right]\not\subseteq X\left[A_۲,b_{(۱)}^T\right]$ لذا بنابر تعریف (۴)، حکم برقرار نیست.

قضیه ٥ ستون a_j از ماتریس های $A_۱$و $A_۲$ را در نظر می گیریم. اگر در ماتریس $A_۱$، $j\in J_۲$ و در ماتریس $A_۲$ نیز $j\in J_۲$ باشدآنگاه ماتریس های $A_۱$ و $A_۲$ هم ارز هستند.

اثبات: با توجه به قضیه (۳) و تعریف (۷)، نتیجه می گیریم که $X\left[A_۱,b_{(۱)}^T\right]=X\left[A_۲,b_{(۱)}^T\right]$ لذا بنابر تعریف (۴)، حکم برقرار است.

تعریف ۸ اکنون ماتریس $A_۳$ را از روی ماتریس $A_۲$، با حذف هر ستون a_j از آن که $j\in J_۲$ است، به دست می آوریم.

قضیه ٦ بردار $b_{(۲)}$ از بردار $b_{(۱)}$ با حذف مؤلفهٔ b_j برای هر $j \in J_۲$ به دست می آوریم و فرض می کنیم که $\hat{x}$ جواب ماکزیمم مجموعهٔ $X\left[A_۲, b_{(۱)}^T\right]$ باشد. اگر $\hat{x}$ را جواب ماکزیمم مجموعهٔ $X\left[A_۳, b_{(۲)}^T\right]$ نیز در نظر بگیریم آنگاه ماتریس های $A_۲$ و $A_۳$ هم ارز هستند.

اثبات: با توجه تعریف (۳)، نتیجه می گیریم که $X\left[A_۳, b_{(۲)}^T\right] = X\left[A_۲, b_{(۱)}^T\right]$ لذا بنابر تعریف (۴)، حکم برقرار است.

تعریف ۹ قرار می دهیم $\forall j \in J_۳ \cup J_۵ : I_j^* = \left\{ i \in \bar{I} \,\middle|\, \hat{x}_i < b_j - a_{ij} \right\}$ که در آن مجموعهٔ $\bar{I}$، نشان دهنده ی تعداد سطرهای ماتریس $A_۳$ است. اکنون برای هر $i \in I_j^*$، در ماتریس $A_۳$ به جای a_{ij} علامت * قرار می دهیم به این ترتیب ماتریس $A_٤$ به دست می آید.

قضیه ۷ فرض می کنیم برای حداقل یک $j \in J_۳ \cup J_۵$، $i \in I_j^*$ باشد. بردار $e \in I_J$ را در نظر می گیریم به طوری که $e(j) = i$ آنگاه $(e_X)_i > \hat{x}_i$.

اثبات: اثبات با توجه به تعریف (۳) به دست می‌آید.

تعریف ۱۰ تعریف می کنیم: $\bar{X}_L = \left\{ e_X \in \bar{X} \,\middle|\, e_X \not\leq \hat{x} \right\}$ و $\bar{X}_F = \bar{X} - \bar{X}_L$.

قضیه ۸ $X\left[A_۳, b_{(۲)}^T\right] = \bigcup_{e_X \in \bar{X}_F} \left[e_X, \hat{x}\right]$.

۳ بهینه سازی یک تابع هدف خطی

مسأله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = f(x) = \sum_{i=۱}^{m} c_i x_i \\ s.t. \quad & x^T \circ A = b^T \qquad ۰ \leq x \leq ۱ \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در آن $c = (c_۱, c_۲, \ldots, c_m)^T \in \mathbb{R}^m$ یک بردار m-بعدی است به طوری که c_i وزن (یا هزینه ی) نسبت داده شده به متغیر x_i برای $i = ۱,۲,\ldots,m$ را نشان می دهد. اکنون فرض می کنیم $\Lambda = (\bar{I} - I_{j_۱}^*) \times (\bar{I} - I_{j_۲}^*) \times \ldots \times (\bar{I} - I_{j_m}^*) = I_{j_۱} \times I_{j_۲} \times \ldots \times I_{j_m}$ باشد که در آن مجموعه $\bar{I}$ تعداد سطرهای ماتریس $A_۳$ تعریف می شود و همچنین فرض می کنیم $(\forall j_i \in J_۳ \cup J_۵ \,,\, i = ۱,۲,\ldots,m)$ $I_i = I_{j_i} = \bar{I} - I_{j_i}^*$ آنگاه $\Lambda = I_۱ \times I_۲ \times \ldots \times I_m$. حال می خواهیم مساله زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c_{(1)_i} x_i \\ s.t. \quad & x^T\, OA_3 = b_{(2)}^T \\ & x_i \in [0,1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \tag{12}$$

لم ۱ اگر $\forall i \in \bar{I} : c_{(1)_i} \le 0$ آنگاه بردار $\hat{x} = (\hat{x}_i) \ \ (\forall i \in \bar{I})$ یک جواب بهینه برای مسأله ی (۱۲) است. در این صورت بردار $\hat{x} = (\hat{x}_i) \ \ (\forall i \in I)$ یک جواب بهینه برای مسأله ی (۱۱) خواهد بود.

اثبات: اثبات واضح است.

لم ۲ اگر $\forall i \in \bar{I} : c_{(1)_i} \ge 0$ آنگاه یکی از جواب های می نیمم، مانند بردار $\breve{x}^* = (\breve{x}_i^*) \ \ (\forall i \in \bar{I})$، یک جواب بهینه برای مسألهٔ (۱۲) است. در این صورت بردار $\breve{x}^* = (\breve{x}_i^*) \ \ (\forall i \in I)$ یک جواب بهینه برای مسأله ی (۱۱) خواهد بود.

اثبات: اثبات با توجه به قضایای (۳) و (۹) به دست می‌آید.

اکنون در حالت کلّی، برای هر بردار هزینهٔ $c_{(1)} = (c_{(1)_i}) \ \ (\forall i \in \bar{I})$، بردارهای $c'_{(1)} = (c'_{(1)_i}) \ \ (\forall i \in \bar{I})$ و $c''_{(1)} = (c''_{(1)_i}) \ \ (\forall i \in \bar{I})$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \forall i \in \bar{I} : c'_{(1)_i} &= \begin{cases} c_{(1)_i}, & if \ c_{(1)_i} \ge 0 \\ 0, & if \ c_{(1)_i} < 0 \end{cases} \\ \forall i \in \bar{I} : c''_{(1)_i} &= \begin{cases} 0, & if \ c_{(1)_i} \ge 0 \\ c_{(1)_i}, & if \ c_{(1)_i} < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

در نتیجه دو مساله ی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c'_{(1)_i} x_i \\ s.t. \quad & x^T\, OA_3 = b_{(2)}^T \\ & x_i \in [0,1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c''_{(1)_i} x_i \\ s.t. \quad & x^T\, OA_3 = b_{(2)}^T \\ & x_i \in [0,1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \tag{15}$$

حال با ترکیب جواب های $\hat{x}$ و $\breve{x}^*$، یک جواب جدید x^* برای مسأله ی (۱۲) می سازیم که یک جواب بهینه برای مساله (۱۲) و در نتیجه یک جواب بهینه برای مسأله ی (۱۱) خواهد بود.

$$\forall i \in \bar{I} : x_i^* = \begin{cases} \breve{x}_i^*, & if \ c_{(1)_i} \geq 0 \\ \hat{x}_i, & if \ c_{(1)_i} < 0 \end{cases} \tag{16}$$

تعریف ۱۱ فرض می کنیم $\Gamma = \{1, 2, \ldots, card(J_3 \cup J_5)\}$ آن گاه با توجه به اینکه $\forall i \in \bar{I} : c'_{(1)_i} \geq 0$، لذا حل مسأله ی (۱۴) هم ارز است با پیدا کردن یک $e^* \in \Lambda$ به طوریکه :

$$\sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c'_{(1)_i} (e_x^*)_i = \min_{e \in \Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c'_{(1)_i} (e_x)_i \right\} \tag{17}$$

با توجه به تعریف مجموعه ی $I_t \ (\forall t \in \Gamma)$، متغیرهای x_{it} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & if \ i \ is \ chosen \ from \ I_t \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad (\forall i \in \bar{I}, \forall t \in \Gamma) \tag{18}$$

اکنون مسأله ی برنامه ریزی صحیح ۱−۰ زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} \left(c'_{(1)_i} \max_{t \in \Gamma} \{ (b_t - a_{it}) x_{it} \} \right) \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} x_{it} = 1 \qquad (\forall t \in \Gamma) \\ & x_{it} = 0 \ or \ 1 \qquad (\forall i \in \bar{I}, \forall t \in \Gamma) \\ & x_{it} = 0 \qquad (\forall i, t \ with \ i \notin I_t) \end{aligned} \tag{19}$$

توجّه شود که قیود (۱۹) برقرارند اگر برای هر $t \in \Gamma$ فقط یک $i \in I_t$ وجود داشته باشد به طوری که $x_{it} = 1$. بنابراین اگر $e(t) = i$ آنگاه $x_{it} = 1$

در نتیجه $e = (e(1), e(2), \ldots, e(card(J_3 \cup J_5))) \in \Lambda$. بنابراین حل مسأله ی (۱۴) معادل با حل مسأله ی برنامه ریزی صحیح ۱−۰ است.

یک روش شاخه و کران به طور ضمنی، تمام جواب های ممکن یک مسأله ی برنامه ریزی صحیح را مشخص می کند. برای استفاده از این روش، ابتدا یک محدودیت را به منظور شاخه کردن مسأله ی اولیه ی به چندین زیر مسأله ی، انتخاب می کنیم. هر زیر مسأله بوسیله ی یک گره نشان داده می شود.

سپس شاخه کردن در هر گره با اضافه کردن یک محدودیت جدید انجام می شود. در نتیجه زیر مسأله های جدید، تولید شده و با گره های جدیدی نشان داده می شوند. توجه شود که هرچه محدودیت های بیشتری به یک زیر مسأله اضافه شوند، آن زیر مسأله دامنهٔ شدنی کوچکتری پیدا خواهد کرد و مقدار هدف بهینه ی بزرگتری را به دست می آورد. اگر بهترین جواب ممکن یک گره ی خاص، بهتر از جواب کاندید جاری نباشد آن گاه احتیاجی به شاخه کردن این گره نیست. در غیر این صورت، برای به دست آوردن یک کران جدید، شاخه کردن مورد نیاز می باشد.

٤ بهینه سازی یک تابع هدف چندگانه

مدل تصمیم گیری چند هدفه زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} &\min \quad F(x)=\{f_{1}(x), f_{2}(x), \ldots, f_{k}(x)\} \\ &s.t. \quad x^{T} \mathrm{O} A=b^{T} \qquad 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{20}$$

در روش های L_p متریک، تابع نرم به صورت $L_P=\left\{\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \left(\frac{f_j(x)-f_j(x_j^*)}{\left|f_j(x_j^*)\right|}\right)^P\right\}^{\frac{1}{P}}$ می باشد که در آن x_j^* نشان دهنده ی راه حل ایده آل در بهینه سازی هدف jام است، x بیانگر یک راه حل مفروض بوده، $1 \le P \le \infty$ بیانگر پارامتر مشخص کننده ی خانواده ی L_P و γ_j نشان دهنده ی اهمّیّت، برای هدف jام با $\gamma_j > 0$ می باشد. تابع نرم L_P به منظور حداقل کردن انحرافات از ایده آل، باید می نیمم شود.

تعریف ۱۲ یک نقطه ی $\bar{x} \in X\left[A, b^{T}\right]$ یک جواب مؤثر یا یک جواب بهینه ی پاراتو برای مسأله ی (۲۰) است اگر و تنها اگر هیچ راه حل دیگری همچون $x \in X\left[A, b^{T}\right]$ وجود نداشته باشد که به ازای آن داشته باشیم $\begin{cases} f_i(x) \le f_i(\bar{x}), & for\ each\ i \in K \\ f_i(x) < f_i(\bar{x}), & for\ at\ least\ one\ i \in K \end{cases}$ در غیر این صورت، $\bar{x}$ یک جواب غیر مؤثر است.

تعریف ۱۳ فرض می کنیم z^1, z^2 دو بردار هدف باشند. آن گاه z^1 بر z^2 مسلّط است اگر و تنها اگر $z^1 \le z^2$ و $z^1 \ne z^2$، یعنی:

$$\begin{cases} z_i^1 \le z_i^2, & for\ each\ i \in K \\ z_i^1 < z_i^2, & for\ at\ least\ one\ i \in K \end{cases} \tag{21}$$

تعریف ۱٤ بردار هدف $\bar{z}$ غیر مسلّط است اگر و تنها اگر هیچ بردار هدفی مانند z وجود نداشته باشد که بر $\bar{z}$ مسلّط باشد. در غیر این صورت، $\bar{z}$ یک بردار هدف مسلّط می باشد.

اکنون نشان می دهیم که تحت چه شرایطی، جواب بهینه ای که از می نیمم سازی تابع نرم L_P بر روی مجموعه ی شدنی $X\left[A,b^T\right]$ به دست می آید، یک راه حل مؤثر برای مسأله ی (۲۰) می باشد. در زیر $P=۱$ در نظر گرفته شده است برای Pهایی که $۲\le P\le\infty$، اثبات مشابه است.

قضیه ۹ مسأله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}&\min \quad L_1=\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x)\\ &s.t. \quad x\in X\left[A,b^T\right]\end{aligned} \tag{۲۲}$$

و فرض می کنیم که x^* یک جواب بهینه برای مسأله ی (۲۲) باشد. آن گاه در صورتی که بردار $w>0$، x^* یک راه حل مؤثر برای مسأله ی (۲۰) می باشد.

اثبات: به خلف فرض می کنیم که x^* راه حل مؤثر برای مسأله ی (۲۰) نباشد در این صورت یک $\bar{x}\in X\left[A,b^T\right]$ وجود دارد به طوریکه:

$$\begin{cases}(f_۱(\bar{x}),f_۲(\bar{x}),\ldots,f_k(\bar{x}))\le(f_۱(x^*),f_۲(x^*),\ldots,f_k(x^*))\\ ((f_۱(\bar{x}),f_۲(\bar{x}),\ldots,f_k(\bar{x}))\ne(f_۱(x^*),f_۲(x^*),\ldots,f_k(x^*))\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall i\in K: f_i(\bar{x})\le f_i(x^*)\\ \exists t\in K: f_t(\bar{x})<f_t(x^*)\end{cases} \tag{۲۳}$$

اکنون بدون از دست دادن کلیّت استدلال، فرض می کنیم که $t=۱$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases}f_۱(\bar{x})<f_۱(x^*)\Rightarrow w_۱f_۱(\bar{x})<w_۱f_۱(x^*)\\ f_۲(\bar{x})\le f_۲(x^*)\Rightarrow w_۲f_۲(\bar{x})\le w_۲f_۲(x^*)\\ \vdots\\ f_k(\bar{x})\le f_k(x^*)\Rightarrow w_kf_k(\bar{x})\le w_kf_k(x^*)\end{cases}\Rightarrow\sum_{i=۱}^{k}w_if_i(\bar{x})<\sum_{i=۱}^{k}w_if_i(x^*) \tag{۲۴}$$

بنابراین از رابطه ی (۲۴) در می یابیم که x^* راه حل بهینه برای مسأله ی (۲۲) نمی باشد که این، برخلاف فرض است در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اکنون به منظور سهولت در امر محاسبات، تابع نرم L_P را به ازای $P=۱$ تشکیل می دهیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$L_۱=\sum_{j=۱}^{k}\gamma_j\left(\frac{f_j(x)-f_j(x_j^*)}{\left|f_j(x_j^*)\right|}\right)=\sum_{j=۱}^{k}\gamma_j\left(\frac{c_jx-c_jx_j^*}{\left|c_jx_j^*\right|}\right) \tag{۲۵}$$

بنابراین کافی است مسألهٔ می نیمم سازی زیر را با استفاده از مطالب گفته شده در قسمت ۳، حل نمائیم:

$$\min \quad L_{1}=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{j}\left(\frac{c_{j}x-c_{j}x_{j}^{*}}{\left|c_{j}x_{j}^{*}\right|}\right)$$
$$s.t. \quad x^{T}\,\text{O}A=b^{T} \qquad 0\leq x\leq 1$$

مثال: مساله (۲) را با $b=(1,1,0/9,0/7)^{T}$، $c_{1}=(3,4,-1,5)^{T}$، $c_{2}=(-0/1,0,-2,1)^{T}$، $c_{3}=(6,-3,2,9)^{T}$ و $A=\begin{bmatrix}0/6 & 0/9 & 0/4 & 0/9\\ 0/5 & 0/6 & 0/3 & 0/5\\ 0/6 & 0/4 & 0/7 & 1\\ 0/3 & 0/7 & 0/9 & 0/8\end{bmatrix}$ حل نمائید.

حل: با توجه به تعاریف گفته شده، معادلات $x^{T}\,\text{O}A_{4}=b_{(2)}^{T}$ و بردار $\hat{x}$ به صورت زیر خواهند بود:

$$x^{T}\,\text{O}\begin{bmatrix}0/5 & *\\ 0/6 & *\\ * & 0/9\end{bmatrix}=(1,0/7) \quad , \quad \hat{x}=(0/2,0/1,0/2)^{T} \tag{۲۷}$$

بنابراین با توجه به تعریف (۳) و قضیه (۹) خواهیم داشت:

$$X\left[A,b^{T}\right]=\left\{0/2,[0,0/1],[0/1,0/2]\right\}\cup\left\{[0,0/2],0/1,[0/1,0/2]\right\} \tag{۲۸}$$

حال چون $I'=\{1\}$ پس $c_{(1)}=(4,-1,5)^{T} \Rightarrow \begin{cases}c'_{(1)}=(4,0,5)^{T}\\ c''_{(1)}=(0,-1,0)^{T}\end{cases}$ در نتیجه مساله برنامه ریزی صحیح ۰−۱ زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\min \quad & Z=0/8x_{12}+0/5x_{31}\\ s.t. \quad & x_{31}=1\\ & x_{12}+x_{22}=1\\ & x_{i2}=0\ or\ 1 \quad (\forall i\in I_{2})\end{aligned} \tag{۲۹}$$

با به کار بردن روش شاخه و کران، $x_{31}=x_{22}=1$ و $Z=0/5$ به دست می آید در نتیجه $\breve{x}^{*}=e_{X}=(0,0/1,0/1)^{T}$ خواهد بود که یک جواب بهینه مساله (۱۴) می باشد. بنابراین با توجه به رابطه (۱۶)، $x^{*}=(0,0/1,0/1)^{T}$ می باشد. به طور مشابه، روند فوق را برای به دست آوردن جواب های بهینه توابع هدف $f_{2}(x)$ و $f_{3}(x)$ نیز بکار می بریم و در نهایت، جواب های بهینه هر یک از توابع هدف $f_{1}(x)$، $f_{2}(x)$

و $f_{۳}(x)$ به ترتیب $x_{۱}^{*}=(۰,۰,۰/۱,۰/۱)^{T}$، $x_{۲}^{*}=(۰,۰/۲,۰/۱,۰/۱)^{T}\ or\ x_{۲}^{*}=(۰,۰,۰/۱,۰/۱)^{T}$
و $x_{۳}^{*}=(۰,۰/۲,۰,۰/۱)^{T}$ به دست می آیند. حال با انتخاب $\gamma=(۲,۱,۱)$ مساله زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \min\quad & L_{۱}=۳۴x_{۱}+۱۰x_{۲}-\frac{۵۵}{۳}x_{۳}+۶۵x_{۴}-۲=V-۲ \\ s.t.\quad & x^{T}\,\text{O}A=b^{T} \\ & ۰\le x\le ۱ \end{aligned} \tag{۳۰}$$

لذا با توجه به روش گفته شده، $x^{*}=(۰,۰,۰/۱,۰/۱)^{T}$ جواب بهینه مساله (۳۰) ودر نتیجه جواب بهینه مساله چند هدفه اولیه می باشد.

۵ نتیجه گیری

پس از بررسی بهینه سازی مساله چند هدفه مذکور، نتایجی حاصل گردید که اهمّ آنها بدین شرح است:

۱) بهینه سازی یک مساله برنامه ریزی خطی را با توجّه به یک دستگاه معادلات رابطه ی فازی مطالعه کردیم و یک روش برای پیدا کردن یک جواب بهینه ارایه دادیم.

۲) به دلیل غیر محدّب بودن ماهیّت مجموعه ی شدنی مساله مورد نظر، در می یابیم که هیچیک از روش های برنامه ریزی خطی برای حل این مساله مفید نمی باشند.

۳) دستگاه های معادلات رابطه ی فازی می توانند برای کاربردهای خاصی از قبیل تشخیص پزشکی [۲] مورد استفاده قرار گیرند.

منابع

[1] H.J. Zimmermann, Fuzzy set theory and its application,kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London, (1999).

[2] S.C.Fang, G.Li, Solving fuzzy relations equations with a linear objective function, Fuzzy sets and system103, 107-113 (1999).

[3] J.Lu, S.C.Fang, Solving nonlinear optimization problems with fuzzy relation constraints, Fuzzy sets and systems 119, 1-20 (2001).

[4] E. Khorram, A. Ghodousian, Linear objective function optimization, Applied Mathematics and Computation, doi: 10.1016/j.amc.2005.4.021.

[5] A. Ghodousian, E. Khorram, An algorithm for optimizing the Linear function with fuzzy relation equation constraints regarding max-prod composition, Applied Mathematics and Computation, doi: 10.1016/j.amc.2005.4.021.

[6] E. Khorram, A. Godousian, A.A.molai, Solving linear optimization problems with max-star composition equation constraints, Applied Mathematics and Computation, doi: 10.1016/j.amc.2005.4.021.

[7] A.Ghodousian, E.Khorram, The convex combination of max-min and max-average composition application in the linear programming problems, Applied Mathematics and Computation, doi:10.1016/j.amc.2005.12.027.

[8] E.Khorram, A.Ghodousian, Linear objective function optimization with fuzzy relation constraints regarding max-av composition, Applied Mathematics and Computation, doi:10.1016/ j.amc.2005.4.021

[9] M. J. Asgharpour, Multiple Criteria Decision Making, University of Tehran Press, 1377.