

کنترل سیستم غیر خطی آونگ وارونه

علیرضا سحاب^{*}، محمد حدادظریف

^۱ گروه الکترونیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

^۲ دانشکده برق و روباتیک دانشگاه صنعتی شاهرود

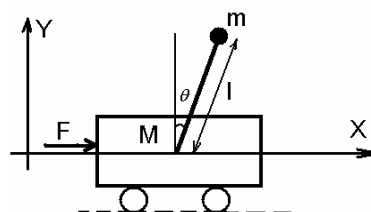
چکیده

یکی از سیستم‌هایی که علیرغم ساختار بسیار ساده، در اکثر کتب و مراجع برای اثبات برتری‌های یک روش کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرد، سیستم آونگ وارونه می‌باشد. هدف از کنترل این سیستم متعادل نمودن آونگ همراه با تضمین محدود بودن حالات سیستم می‌باشد. تاکنون روش‌های مختلفی برای کنترل این سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از بهترین روش‌ها، روش کنترل فازی با کنترل‌کننده ناظر غیر فازی می‌باشد. مشکل اکثر این کنترل‌کننده‌ها محدود بودن بازه تغییرات شرایط اولیه می‌باشد. در این مقاله، برای حل این مشکل، روشی نوین ارائه شده است. با توجه به اینکه اصول کار این روش مشابه روش پسگام بوده و در واقع کارآیی آن را برای سیستم‌های واقعی بیشتری گسترش می‌دهد، این روش را پسگام تعمیم یافته نام نهاده‌ایم.

کلمات کلیدی: آونگ وارونه، روش پسگام، روش پسگام تعمیم یافته.

۱ مقدمه

سیستم آونگ وارونه علیرغم ظاهر و نحوه پیدایش بسیار ساده، یکی از سیستم‌هایی است که از دید تئوری، در اکثر کتب و مراجع کنترلی برای آزمایش مفید بودن یک روش کنترلی استفاده می‌شود. کنترل این سیستم به سبب رفتار غیر خطی بسیار شدید، با روش‌های متداول کنترل خطی، عملاً غیرممکن است یا در محدوده تغییرات بسیار کوچکی قابل اعمال می‌باشد. شکل ۱ ساختار یک آونگ وارونه را نمایش می‌دهد.



شکل ۱: آونگ وارونه

همان گونه که در شکل ۱ دیده می‌شود، این سیستم شامل یک جرم m بوده که با میله‌ای به طول l بر روی ارابه‌ای به جرم M سوار می‌باشد. ارابه با نیرویی به اندازه F تحریک می‌شود و قادر به انجام دو حرکت در راستای x و θ می‌باشد. هدف از کنترل این سیستم متعادل نمودن آونگ $\theta = 0$ و همزمان با آن تضمین کراندار بودن حالات سیستم می‌باشد.

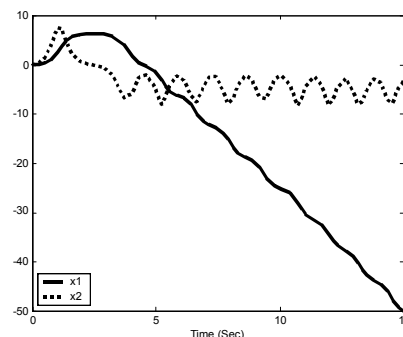
بدین منظور تحقیقات بسیاری انجام شده که یکی از مهمترین آنها حل معادلات این سیستم با استفاده از روش طراحی کنترل کننده فازی با کنترل کننده ناظر غیرفازی می‌باشد^۱. مرجع ۱ سیستم آونگ را با معادلات غیرخطی زیر مدل سازی کرده است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{M+m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right)} + \frac{\frac{\cos x_1}{M+m} u}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right)} \end{cases} \quad (1)$$

که در این رابطه $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ شتاب جاذبه زمین، M جرم ارابه، m جرم میله، l نصف طول میله و u نیروی اعمالی (کنترل) می‌باشد.

شکل ۲ شبیه سازی تغییرات حالات x_1 و x_2 به ازای $u = 0$ و با فرض های زیر را نشان می‌دهد:

$$M = 1\text{Kg} \quad , \quad m = 0.1\text{Kg} \quad , \quad l = 0.5\text{m} \quad (2)$$



شکل ۲: تغییر حالات سیستم آونگ وارونه قبل از پایدارسازی

همان گونه که در شکل ۲ دیده می‌شود، یکی از حالات این سیستم در مدت زمان محدودی به حالت ناپایدار بی نهایت می‌رسد.

۲ طراحی کنترل کننده فازی با کنترل کننده ناظر غیر فازی^۱

فرض می‌کنیم پایگاه قواعد فازی شامل قواعد زیر باشد.

(۱) اگر x_1 مثبت و x_2 مثبت باشد، آن گاه u بزرگ منفی است.

(۲) اگر x_1 مثبت و x_2 منفی باشد، آن گاه u صفر است.

(۳) اگر x_1 منفی و x_2 مثبت باشد، آن گاه u صفر است.

(۴) اگر x_1 منفی و x_2 منفی باشد، آن گاه u بزرگ مثبت است.

که در روابط فوق مجموعه‌های فازی "مثبت"، "منفی"، "بزرگ منفی"، "بزرگ مثبت" و "صفر" به ترتیب با توابع تعلق زیر نمایش داده می‌شوند.

$$\mu_{Positive}(x) = \frac{1}{1 + e^{-30x}} \quad (۳)$$

$$\mu_{Negative}(x) = \frac{1}{1 + e^{30x}} \quad (۴)$$

$$\mu_{Negative-Big}(u) = e^{-(u+5)^2} \quad (۵)$$

$$\mu_{Positive-Big}(u) = e^{-(u-5)^2} \quad (۶)$$

$$\mu_{Zero}(u) = e^{-u^2} \quad (۷)$$

با استفاده از غیرفازی‌ساز میانگین مراکز و موتور استنتاج حاصلضربی، کنترل‌کننده فازی که آن را به صورت u_{fuz} نمایش می‌دهیم، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$u_{fuz}(X) = \frac{5 \frac{1}{1+e^{30x_1}} \frac{1}{1+e^{30x_2}} - 5 \frac{1}{1+e^{-30x_1}} \frac{1}{1+e^{-30x_2}}}{\frac{1}{1+e^{30x_1}} \frac{1}{1+e^{30x_2}} + \frac{1}{1+e^{30x_1}} \frac{1}{1+e^{-30x_2}} + \frac{1}{1+e^{-30x_1}} \frac{1}{1+e^{30x_2}} + \frac{1}{1+e^{-30x_1}} \frac{1}{1+e^{-30x_2}}} \quad (۸)$$

برای طراحی کنترل‌کننده نظارتی باید محدوده F^u و g_L را تعیین کنیم که برای این سیستم داریم.

$$\left| f(x_1, x_2) \right| = \left| \frac{g \sin x_1 - \frac{m x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{M+m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right)} \right| \leq \frac{9.8 + \frac{0.025}{1.1} x_2^2}{\frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1}} = 15.78 + 0.0366 x_2^2 = F^u(x_1, x_2) \quad (۹)$$

فرض کنید ما بخواهیم که $|x_1(0)| \leq \frac{\pi}{9}$ ، در این صورت باید پارامترها را چنان مشخص کنیم که این شرط ارضا گردد، آن گاه داریم:

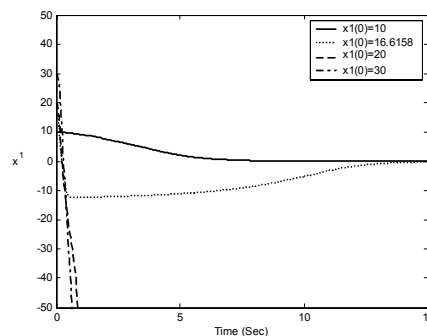
$$\left| g(x_1, x_2) \right| \geq \frac{\cos \frac{\pi}{9}}{1.1 \left(\frac{2}{3} + \frac{0.05}{1.1} \cos^2 \frac{\pi}{9} \right)} = 1.1 = g_L(x_1, x_2) \quad (۱۰)$$

با توجه به روابط بیان شده در مرجع ۱ می‌توان تابع کنترل‌کننده نظارتی زیر را به دست آورد.

$$u_s = - \text{Sign} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos x_1}{M+m} \\ l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right) \end{bmatrix} \right) * \left[\frac{1}{1.1} \left(15.78 + 0.0366 x_2^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \right] + |u_{fuz}| \quad (۱۱)$$

نتیجه اعمال کنترل کننده فوق به سیستم آونگ وارونه در شکل ۳ نشان داده شده است که به ازای حالات اولیه متفاوت به صورت $x_1(0) = 10, 16.6158, 20, 30$ رسم شده است. (تمامی شرایط اولیه برحسب درجه می باشند).

همان طور که در شکل ۳ دیده می شود سیستم با $x_1(0) = 10, 16.6158$ به حالت پایدار خواسته شده می رسد؛ در حالی که به ازای شرایط اولیه $x_1(0) = 20, 30$ سیستم ناپایدار می شود؛ یعنی سیستم در ناحیه طراحی تعیین شده نیز جواب نمی دهد. در واقع سیستم آونگ وارونه فقط در محدوده $|x_1(0)| \leq 16.6158$ به پایداری می رسد.



شکل ۳: تغییر حالت x_1 سیستم آونگ وارونه پس از پایداری سازی با کنترل کننده فازی با کنترل کننده نظارتی

حال در این مقاله با تکیه بر روش پسگام، روش جدیدی را پیشنهاد می کنیم که بتوان محدوده تغییرات شرایط اولیه را گسترش داد.

۳ روش پسگام

برای مدت طولانی، تئوری لیاپانوف ابزار مناسبی جهت بررسی سیستم های کنترل خطی و غیرخطی بوده است. این روش نخستین بار توسط ریاضی دان و دانشمند روسی، لیاپانوف، پایه ریزی شد. او موفق شد که بردار حالت $X(t)$ را به یک تابع اسکالر $V(X)$ تبدیل کند و از روی این تابع نحوه دور شدن سیستم از نقطه تعادل را اندازه گیری نماید. $V(X)$ را می توان بیان کننده مقدار انرژی موجود در سیستم دانست. اگر $V(X)$ پیوسته کاهش یابد، نشانگر این است که سیستم به صورت خود کار به سمت نقطه تعادل پیش می رود. [2]

مشکل اصلی این تئوری، مخصوصاً در سیستم های غیرخطی، یافتن تابعی است که دارای خصوصیات ویژه تابع لیاپانوف باشد. اگر بتوان چنین تابعی را یافت، پایداری سیستم تضمین می شود، ولی یافتن آن به تجربه طراح نیاز دارد. در این راستا روش هایی پیشنهاد شده است، ولی هر کدام محدودیت های خاص خود را دارند. به علت وجود مشکلات تئوری های فوق، دانشمندان در جهت یافتن راهی که به کمک آن بتوان تابع لیاپانوف سیستم را به دست آورد و با تکیه بر آن، برای سیستم کنترل کننده ای مناسب طراحی کرد، تلاش کردند. مجموعه این تلاش ها، منجر به ایجاد روش های نوین برای محاسبه تابع لیاپانوف شد که یکی از این روش ها، روش پسگام است.

پسگام یک روش بازگشتی است که می‌تواند به ما در دستیابی به تابع لیاپانوف کمک کند. در روش پسگام، با پسخور گرفتن از حالات سیستم و اعمال آن‌ها به ورودی کنترل، سیستم ناپایدار را پایدار نموده و تابع لیاپانوف سیستم نیز به دست می‌آید. در واقع پسگام گسترش روش طراحی کنترل‌کننده پسخور از حالت سیستم‌های خطی به سیستم‌های غیرخطی می‌باشد که در این راستا از تئوری‌های لیاپانوف استفاده شده است. انعطاف‌پذیری این روش، اجازه استفاده بیشتر از آن را در بسیاری از مسایل علمی، نسبت به روش‌های مشابه، فراهم می‌کند.

مبدا پیدایش تئوری پسگام دقیقاً مشخص نبوده و تجربه‌های همزمانی در این مورد انجام گرفته است و تقریباً می‌توان آغاز دستیابی به آن را در چندین مقاله همزمان در دهه ۱۹۸۰ م. دانست. اگرچه منصفانه‌تر اینست که بگویم تحقیقات پروفیسور کوکوتوویچ و همکارانش باعث بوجود آمدن این تئوری بطور محض و غیر کاربردی گردید [3]. در سال ۱۹۹۱ م. مقاله کوکوتوویچ در این مورد منتشر شد [4]. مجموعه پیشرفتهای روش پسگام و سایر ابزارهای کنترل غیرخطی در دهه ۱۹۹۰ م. توسط کوکوتوویچ در سال ۱۹۹۹ م. در کنگره جهانی IFAC ارائه شد [5]. در حالت کلی این روش در سیستم‌هایی که با رابطه زیر نمایش داده شده و سیستم پسخور صریح نامیده می‌شوند، کاربرد دارد.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2)z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = f_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) + g_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})z_n \\ \dot{z}_n = f_n(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n) + g_n(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n)u \end{cases} \quad (12)$$

که در آن f_0 تا f_n در مبدا صفر می‌باشند.

علت نامگذاری پسخور صریح برای این سیستم‌ها آن است که در معادله \dot{z}_i توابع غیرخطی f_i و g_i فقط به حالت‌های پیشین که تا کنون پسخور شده‌اند، وابسته می‌باشد.⁶

۴ روش پسگام تعمیم یافته

فرض کنید رابطه (۱۷) مدل سیستم کنترل غیرخطی مفروضی باشد.

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) + G(X)\eta \\ \dot{\eta} = f_0(X, \eta) + g_0(X, \eta)u \end{cases} \quad (13)$$

که در آن $X = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1}$ و $\eta \in \mathbb{R}$ است.

حال تابع اسکالر $V(X)$ را به صورت زیر در نظر بگیرد:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \quad (14)$$

تابع اسکالر $\eta = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ به ازای $i = 1, 2, \dots, n-1$ را طوری تعریف می‌کنیم که تابع $V(X)$ رابطه (۱۸) مثبت معین بوده و مشتق آن منفی معین باشد. در این صورت تابع کنترل پسخور حالت و تابع لیپانوف کل سیستم با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$u = \frac{1}{g_0(X, \eta)} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} [f_j(X) + g_j(X)\eta] - \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_i [\eta - \Phi_i(X)] - f_0(X, \eta) \right\}$$

$$\forall k_i > 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (15)$$

$$V_t(X, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [\eta - \Phi_i(X)]^2 \quad (16)$$

که در این روابط $F = [f_1, f_2, \dots, f_{n-1}]^T$ و $G = [g_1, g_2, \dots, g_{n-1}]^T$ می‌باشند. در ضمن پایداری سیستم کنترل شده از نوع مجانبی به مفهوم وسیع (کلی) می‌باشد [7].

۵ طراحی کنترل کننده با تکیه بر پسگام تعمیم یافته

برای اینکه بتوانیم از قضیه ۴-۱ استفاده کنیم، می‌توان مقدار $\Phi(x_1)$ را مطابق رابطه زیر انتخاب کرد.

$$\Phi(x_1) = -x_1 \quad (17)$$

که در این صورت با توجه به مقادیر انتخاب شده برای پارامترها، می‌توان مقدار قانون کنترل پسخور حالت و همچنین تابع لیپانوف سیستم آونگ و وارونه مدل شده با رابطه (۱) را از روابط زیر به دست آورد.

$$u = -\frac{0.7333 - 0.05 \cos^2 x_1}{\cos x_1} [(k+1)(x_1 + x_2) + \frac{9.8 \sin x_1 - 0.02275 x_2^2 \sin 2x_1}{0.6667 - 0.0455 \cos^2 x_1}] \quad ; \quad k > 0 \quad (18)$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_1 + x_2)^2 \quad (19)$$

حال می‌خواهیم کنترل کننده طراحی شده را به معادلات (۱) اعمال کرده و نتایج را مشاهده کنیم.

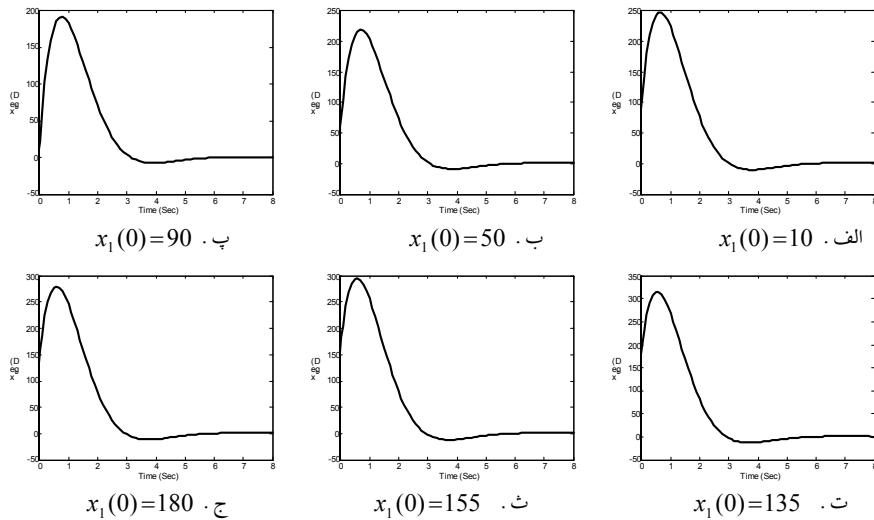
شکل های ۴-الف تا ۴-ج و همینطور شکل های ۵-الف تا ۵-ج به ترتیب تغییر حالت های x_1 و x_2 را نسبت به زمان، بعد از اعمال تابع کنترل پسخور حالت به سیستم به ازای $x_1(0) = 10, 50, 90, 135, 155, 180$ نشان می‌دهد.

همان طور که در شکل ها می‌بینیم با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته تمامی خواسته‌های آونگ و وارونه؛ متعادل نمودن آونگ و کراندار بودن حالات بر آورده شده است.

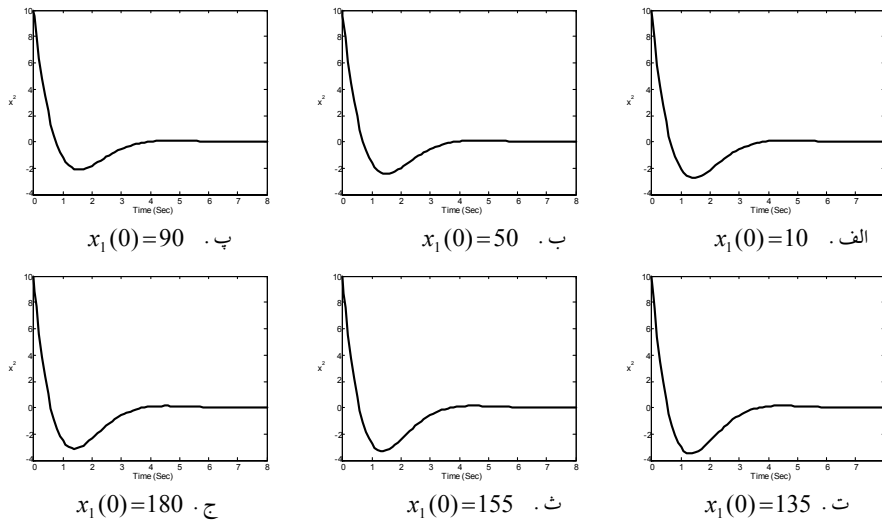
۶ نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا به بیان سیستم آونگ و وارونه پرداخته و موفق ترین روش کنترلی موجود برای متعادل نمودن آن را بیان کردیم. سپس با تکیه بر روش پسگام تعمیم یافته روشی نوین در کنترل این سیستم بیان نمودیم که حاصل مقایسه این دو روش کنترلی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

۱. با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته سیستم آونگ وارونه را به ازای هر شرط اولیه ای، یعنی با رها کردن از هر نقطه می توان به حالت تعادل بازگرداند در حالی که در روش کنترل فازی با کنترل کننده نظارتی بدین صورت نیست و فقط می توان با شروع از محدوده کوچکی سیستم را پایدار نمود.
۲. با فرض شرایط اولیه یکسان، روش اول در مدت زمان کوتاهی به حالت تعادل می رسد و این در حالیست که در روش دوم مدت زمان بیشتری طول می کشد تا سیستم به حالت پایدار خود برسد.



شکل ۴: تغییر حالت x_1 سیستم آونگ وارونه پس از پایدارسازی به ازای شرایط اولیه متفاوت



شکل ۵: تغییر حالت x_2 سیستم آونگ وارونه پس از پایدارسازی به ازای شرایط اولیه متفاوت

منابع

- [۱] وانگ، ل. ، سیستم‌های فازی و کنترل فازی، مترجم: تشنه‌لب، م. ، صفارپور، ن. و افیونی، د.، صفحه ۳۲۵-۳۲۰ ، چاپ دوم، ۱۳۸۰ .
- [2] Lyapunov A. M. The General Problem of the Stability of Motion. Taylor & Francis, 1992. English Translation of the Original Publication in Russian from 1892.
- [3] Harkegard Ola. Flight Control Design Using Backstepping. Linkoping Studies in Science and Technology. Thesis No.875, 2001.
- [4] Kokotovic Petar V. The joy of Feedback : Nonlinear and Adaptive. IEEE Control Systems Magazine, 12(3) : 7-17, June 1992.
- [5] Kokotovic Petar V. Constructive Nonlinear Control : Progress in the 90's. In IFAC 1999 Proceedings, Pages 49-77, 1999.
- [6] Kanellakopoulos I. , Kokotovic Petar V. and Morse A. S. A Toolkit for Nonlinear Feedback Design. System & Control Letters, 18(2) : 83-92 , February 1992.
- [۷] قره‌ویسی، ع. و سحاب، ع. ، روشی جدید در طراحی کلاس خاصی از سیستمهای کنترل غیرخطی، ۳۴ امین کنفرانس ریاضی ایران، شاهرود، صفحه ۸۶ ، ۱۳۸۲ .