آنالیز همگرایی AOR پیش شرط سازی شده برای M – و H– ماتریس ها

هاشم صابری نجفی*، سهراب کردرستمی، سید احمد عدالت پناه
گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

چکیده

دستگاه خطی با ماتریس ضرایب M– و H – ماتریس در حجم وسیعی از مباحث علمی دیده می شود. در این بررسی، ما چند پیش شرط (preconditioner) معرفی شده در [۱۲]، را برای حل دستگاه خطی با ماتریس ضرایب این رده از ماتریس ها، بررسی کرده و روش AOR پیش شرط سازی شده را برای حل دستگاه های خطی به کار می بریم همچنین قضایای همگرایی را برای این پیش شرط سازها ارایه می دهیم و با مثال عددی نتایج تئوری را با پارامترهای مختلف آزمایش می کنیم.

کلمات کلیدی: M– ماتریس، H– ماتریس، پیش شرط ساز، AOR، شعاع طیفی.

۱ مقدمه

دستگاه (۱) $AX = b$ را در نظر بگیرید که $A \in R^{n\times n}$ و $b, x \in R^n$ و x بردار مجهول است. برای هر شکافت، $A = M - N$ با $\det(m) \neq 0$ روش تکراری پایه برای حل (۱) به صورت زیر است:

$$x^{i+1} = M^{-1}Nx^{i} + M^{-1}b \qquad i = 0,1,\ldots \tag{۲}$$

روش پیش شرط سازی عبارت است از انتخاب یک ماتریس نامنفرد با مشخصات خاصی که دستگاه اصلی (۱) را بتواند به صورت های زیر تبدیل کند:

$$PAX = Pb\,, \quad P \in R^{n\times n} \tag{۳}$$

or

$$AFY = b\,, \quad X = FY \tag{۴}$$

که P در (۳) و F در (۴) به ترتیب پیش شرط های چپ و راست نامیده می شوند و دو نوع روش تکراری پایه به صورت های زیر خواهیم داشت:

$$x^{(i+1)} = M_p^{-1}N_p x^{(i)} + M_p^{-1}b \qquad i = 0,1\ldots$$

* عهده دار مکاتبات

که $pA = M_p - N_p$ یک شکافت از pA است و M_p نامنفرد است و

$$y^{(i+1)} = M_F^{-1} N_F y^{(i)} + M_F^{-1} b \qquad i = 0,1,..$$

که $AF = M_F - N_F$ و M_F نامنفرد است. که در میان این دو روش بیشتر محققان پیش شرط چپ را مورد مطالعه قرار می دهند.

ازجمله در سال ۱۹۹۱، Gunawardena و همکاران [۳]، پیش $\hat{P} = I + \hat{S}$ شرط برای تصحیح روش گاوس- سایدل به کار بردند که

$$\hat{S} = (s_{i,j}) = \begin{cases} -a_{i,j} & for \quad j = i+1,\ i = 1,2,\dots,n-1 \\ 0 & for \quad otherwise \end{cases}$$

آن گاه $\hat{A} = (I + \hat{S})A$ به صورت $\hat{A} = I - \hat{D} - L - \hat{E} - (U - \hat{S} + \hat{S}U)$ نوشته می شود که در آن $\hat{D}, \hat{E}$ به ترتیب قسمت پایین مثلثی اکید و قطری $\hat{S}L$ هستند. در (1997) (KOHNO) وهمکاران[۵]، این پیش شرط را تعمیم داده و به صورت $1 + s_\alpha$ ارایه کردند و در آن:

$$s_\alpha = (s_{ij})_{n \times n} = \begin{cases} -\alpha_i a_{ij} & j = i+1 \quad ,0 \le \alpha_i \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

آن ها همچنین قضیه زیر را ثابت کردند:

قضیه ۱ [۵، قضیه۳] فرض کنید A، Z- ماتریس(درایه های غیر قطری نامثبت) مسلط قطری با درایه های قطری یک باشد و $\sum_{j=1}^{n} a_{nj} > 0$. همچنین اگربرای i< n، $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ آنگاه $\sum_{j=1}^{n} a_{i+1\,j} > 0$ برقرار باشد. در نتیجه $A_\alpha = (I + s_\alpha)A$، Z- ماتریس مسلط قطری اکید خواهد بود و برای هر $(1 \le i \le n)\ 0 \le \alpha_i \le 1$، خواهیم داشت: $\rho(T_\alpha) < 1$

مانیز در [۱۲]، یک دنباله از پیش شرط سازهای کلاس (I+S)، ارایه دادیم که به صورت های زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \bar{A}_i x &= \bar{b}_i \\ \bar{A}_i &= (I + s_i)A \\ \bar{b}_i &= (I + s_i)b \end{aligned} \tag{۵}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 a_{12} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 a_{23} & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & -\alpha_{n-1} a_{n-1,n} \\ \frac{-a_{n,1}}{k} & 0 \cdots & & & 0 \end{bmatrix} \quad ,k \ge 1, 0 \le \alpha_i \le 1 \tag{۶}$$

$$s_2=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 a_{12} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 a_{23} & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & -\alpha_{n-1}a_{n-1,n} & \\ \frac{-a_{n,1}}{k_1} & \frac{-a_{n,2}}{k_2} & \cdots\cdots & \frac{-a_{n,n-1}}{k_{n-1}} & 0 \end{bmatrix},\quad \alpha_i\in[0,1]\ \ \forall i: k_i\geq 1 \qquad (۷)$$

$$s_3=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 a_{12} & 0 & & -ta_{1,n} \\ 0 & 0 & -\alpha_1 a_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & -\alpha_{n-1}a_{n-1,n} & \\ \frac{-a_{n,1}}{k_1} & \frac{-a_{n,2}}{k_2} & \cdots\cdots & \frac{-a_{n,n-1}}{k_{n-1}} & 0 \end{bmatrix},\quad \alpha_i, t\in[0,1],\ k_i\geq 1 \qquad (۸)$$

$$s_4=\begin{cases} -\alpha_i a_{ij} & for\ \ (j=i+1),\ (j=n, i\neq n),\ (j\neq n, i=n) \\ 0 & otherwise \qquad \&\ \alpha_i\in[0,1] \end{cases} \qquad (۹)$$

$$s_5=\begin{cases} -\alpha_i a_{ij} & for\ \ (j=i+1),\ (j=n, i\neq n),\ (j\neq n, i=n),\ (j\neq 1, i=1) \\ 0 & otherwise \qquad \&\ \alpha_i\in[0,1] \end{cases} \qquad (۱۰)$$

در این مقاله، ثابت می کنیم که پیش شرط سازهای ما در جهت بهبود نرخ همگرایی ساخته شده اند و همچنین شرایط همگرایی آن ها را در حالتی که ماتریس ضرایب A، یک H- ماتریس باشد بررسی می کنیم.

۲ روش تکراری AOR پیش شرط سازی شده

در سال (۱۹۸۷)، روش تکراری AOR (Accelerated OverRelaxation) توسط Hadjidimos به صورت زیرتعریف شد [۴] که تعمیمی از روش SOR است:

$$x^{(i+1)}=L_{r,w}x^{(i)}+(I-rL)^{-1}wb \qquad i=0,1,\ldots \qquad (۱۱)$$

که ماتریس تکرار آن به صورت:

$$L_{r,w}=(I-rL)^{-1}[(1-w)I+(w-r)L+wU] \qquad (۱۲)$$

و w, r پارامترهای حقیقی با $w\neq 0$.

ماتریس تکرار با پیش شرط (۵) به صورت زیر است:

$$\bar{L}_{r,w}=(\bar{D}-r\bar{L})^{-1}[(1-w)\bar{D}+(w-r)\bar{L}+w\bar{U}] \qquad (۱۳)$$

که به عنوان مثال در (۶) داریم:

$$\bar{A}_1 = \bar{D}_1 - \bar{L}_1 - \bar{U}_1$$

$$\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1 a_{12} a_{21} & & & \\ & 1-\alpha_2 a_{23} a_{32} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\frac{a_{1,n} a_{n,1}}{k} \end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \alpha_2 a_{23} a_{31} - a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ (\frac{1}{k}-1)a_{n,1} & \frac{a_{n,2} a_{1,2}}{k} - a_{n,2} \cdots & \frac{a_{n,1} a_{1,n-1}}{k} - a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

$$\bar{U}_1 = \begin{bmatrix} 0 & (\alpha_1 - 1)a_{12} & \alpha_1 a_{12} a_{23} - a_{13} \cdots & \alpha_1 a_{12} a_{2n} - a_{1n} \\ 0 & 0 & (\alpha_1 - 1)a_{23} \ldots & \alpha_2 a_{23} a_{3n} - a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & 0 \ddots & \vdots \ddots (\alpha_{n-1} - 1)a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

۳ تعاریف و لم های مورد نیاز

در اینجا برای راحتی توضیح کوتاهی در مورد بعضی از اصطلاحات، تعاریف ولم ها که در بخش بعدی مورد استفاده قرار می گیرد، بیان می کنیم.

ماتریس A نامنفی(مثبت)است اگر هر درایه ازA نامنفی (مثبت)باشدکه آن ها را به ترتیب با نماد $A \geq 0$ و $A >> 0$ نشان می دهیم. به طور مشابه می توانیم این حرف را در موردبردار X بزنیم. به علاوه شعاع طیفی A را با نماد $\rho(A)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱ [۲، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱]

a) ماتریس $A = [a_{ij}]$ یک Z- ماتریس نامیده می شود اگر: $i \neq j, a_{ij} \leq 0$

b) z- ماتریس، یک M- ماتریس نامنفرد است اگر A نامنفرد و $A^{-1} \geq 0$

c) ماتریس مربعی A، M- ماتریس نامنفرد نامیده می شود اگر $A = \alpha I - B; B > 0; \alpha > \rho(B)$

d) برای هر ماتریس A، ماتریس M=<A>، ماتریس همسنج است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$m_{ii} = |a_{ii}|, \quad m_{ij} = -|a_{ij}|, \quad i \neq j \quad 1 \leq i, j \leq n$$

e) ماتریس A، H- ماتریس است اگر و فقط اگر <A>، M- ماتریس باشد

تعریف ۲ [۱]

ماتریس A تحویل ناپذیر است اگر گراف جهت دار مربوط به A قویا همبند باشد. لازم به ذکر است که یک گراف قویا همبند است اگر به هر زوج مرتب از نقاط مجزا P_j, P_i، مسیر جهت داری در گراف $\overline{p_{i0}, p_{i1}}, \ldots, \overline{p_{ir-1}, p_{ir}}$ با $i0 = i, ir = j$ وجود داشته باشد.

تعریف ۳ [۱، ۲، ٦، ۷، ۸]

فرض کنیم A یک ماتریس حقیقی باشد. آنگاه نمایش A=M-N یک شکافت از A نامیده می شود اگر M، ماتریس نامنفرد باشد همچنین این شکافت:

a) همگرا است اگر $\rho(M^{-1}N) < 1$

b) منظم است اگر $M^{-1} \geq 0$ و $N \geq 0$

c) نامنفی است اگر $M^{-1}N \geq 0$

d) M- شکافت است اگر M، M- ماتریس نامنفردو $N \geq 0$

e)H- شکافت است اگر $\langle M \rangle - |N|$، M- ماتریس باشد.

f) H- همساز است اگر $\langle A \rangle = \langle M \rangle - |N|$

لم ۱ [۱]

فرض کنیم $A \in R^{n\times n}$ یک ماتریس نامنفی باشد. آن گاه

i) A مقدار ویژه مثبت حقیقی برابر با شعاع طیفی اش ($\rho(A)$) دارد.

ii) برای $\rho(A)$، بردار ویژه متناظر x>0 موجود است.

iii) وقتی هر درایه A افزایش یابد، $\rho(A)$ نیز افزایش می یابد.

لم ۲ [۹] فرض کنیم A=M-N یک M-شکافت از A باشد. آنگاه $\rho(M^{-1}N) < 1$ اگر و فقط اگر A، M- ماتریس نامنفرد باشد.

لم ۳ [۲] فرض کنیم A ماتریس نامنفرد باشد. آن گاه

i) اگربه ازای بردارهای نامنفی ومخالف صفر x، $\alpha x \leq Ax$، آن گاه $\alpha \leq \rho(A)$

ii) اگر برای بردارهای مثبت x، $\alpha x \leq \beta x$ آنگاه $\rho(A) \leq \beta$

لم ٤ [۸، ۱۰]

الف)اگر A، یک H-ماتریس باشد آنگاه: $|A^{-1}| \leq \langle A \rangle^{-1}$

ب) اگر A، M-ماتریس و B، Z-ماتریس و A≤B آنگاه، B نیز M-ماتریس است

ج) $|A| \leq B \rightarrow \rho(A) \leq \rho(B)$

۴ قضیه های مقایسه ای

دراین بخش ابتدا ثابت می کنیم که تحت شرایط معین پیش شرط سازهای ما در جهت افزایش سرعت همگرایی ساخته شده اند و شعاع طیفی آن ها از پیش شرط ساز های مشهور کوچکتر است.

قضیه ۲

فرض کنید $L_{r,w}$ ماتریس های تکرار(۱۲)و $\hat{L}_{r,w}$ ماتریس تکرار پیش شرط سازی شده یکی از پیش شرط های (6، 7، 8، 9،10) از روش AOR باشند. اگر ماتریس A از دستگاه خطی (۱)یک Z- ماتریس نامنفرد وتحویل ناپذیر باشد و شرایط برای نامنفی بودن ماتریس های تکراربرقرار باشد، خواهیم داشت:

۱)اگر $\rho(L_{r,w})<1$: $\rho(\hat{L}_{r,w})\le\rho(L_{r,w})$

۲)اگر $\rho(L_{r,w})=1$: $\rho(\hat{L}_{r,w})=\rho(L_{r,w})$

۳) اگر $\rho(L_{r,w})\ge1$: $\rho(\hat{L}_{r,w})\ge\rho(L_{r,w})$

اثبات [۱۲]. ■

قضیه ۳

فرض کنید A، از دستگاه خطی (۱)یک Z- ماتریس نامنفرد وتحویل ناپذیر باشد و $A_\alpha=M_\alpha-N_\alpha$ ماتریس پیش شرط سازی شده از پیش شرط ساز (KOHNO) و $\bar{A}_i=\bar{M}_i-\bar{N}_i$ پیش شرط سازهای (6، 7، 8، 9،10) از شکافت های AOR ذکر شده در بالا باشند.

آن گاه اگر $\rho(L_{r,w})<1$ و $0\le r\le w\le1$ $w\ne0, r\ne1$ خواهیم داشت:

$$\rho(\bar{M}_5^{-1}\bar{N}_5)\le\rho(\bar{M}_4^{-1}\bar{N}_4)\le\rho(\bar{M}_3^{-1}\bar{N}_3)\le\rho(\bar{M}_2^{-1}\bar{N}_2)\le\rho(\bar{M}_1^{-1}\bar{N}_1)\le\rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha)\le\rho(L_{r,w})<1$$

اثبات چون $\bar{A}=\frac{1}{w}(\bar{D}-r\bar{L})-\frac{1}{w}[(1-w)\bar{D}+(w-r)\bar{L}+w\bar{U}]$ قرار می دهیم:

$$\bar{M}_i=\frac{1}{w}(\bar{D}_i-r\bar{L}_i)$$

$$\bar{N}_i=\frac{1}{w}[(1-w)\bar{D}_i+(w-r)\bar{L}_i+w\bar{U}_i]$$

واضح است که وقتی $0\le r\le w\le 0$ $w\ne0, r\ne1$ آن گاه با توجه به اینکه $\bar{D}_i,\bar{L}_i,\bar{U}_i$، نامنفی اند [12].

بنا به تعریف[۳]، $\bar{A}$ یک M- شکافت خواهد.

پس از لم ۱ بردار مثبت xای موجود است به طوری که $(\bar{M}_i^{-1}\bar{N}_i)X=\rho(\bar{M}_i^{-1}\bar{N}_i)X$.

چون $\bar{N}_i\ge0$ پس $\bar{N}_iX\ge0$ و داریم:

$$(\overline{M}_i^{-1}\overline{N}_i)X = \rho(\overline{M}_i^{-1}\overline{N}_i)X$$
$$\overline{M}_i X = \frac{1}{\rho(\overline{M}_i^{-1}\overline{N}_i)}\overline{N}_i X \geq 0$$
$$\Rightarrow \overline{A}_i X = \overline{M}_i(I - \overline{M}_i^{-1}\overline{N}_i)X = \frac{1-\rho(\overline{M}_i^{-1}\overline{N}_i)}{\rho(\overline{M}_i^{-1}\overline{N}_i)}\overline{N}_i X \geq 0$$

حال با مقایسه $\overline{M}_i, M_\alpha$، با محاسبات مستقیم خواهیم داشت:

$$M_\alpha = \frac{1}{w}\{[(I-(s_\alpha L)_D] - r[L + (s_\alpha L)_L]\}$$
$$\overline{M}_i = \frac{1}{w}\{[(I-(s_i L)_D - (s_i U)_D] - r[L + (s_i L)_L + (s_i U)_L]\}$$
$$\Rightarrow \overline{M}_5 \leq \overline{M}_4 \leq \overline{M}_3 \leq \overline{M}_2 \leq \overline{M}_1 \leq M_\alpha$$

و چون اصولا $\overline{M}_i, M_\alpha$، M-ماتریس است خواهیم داشت:

$$\overline{M}_5 \geq \overline{M}_4 \geq \overline{M}_3 \geq \overline{M}_2 \geq \overline{M}_1 \geq M_\alpha$$

از طرفی $\overline{A}_i X = (I+S_i)AX \geq 0$ و چون $(I+S_i) \geq 0$، در نتیجه $AX \geq 0$.

حل داریم:

$$\overline{A}_1 X = (I+S_1)AX$$
$$= (I+S_1)AX + (S_\alpha - S_\alpha)AX$$
$$= (I+S_\alpha)AX + (S_1 - S_\alpha)AX \geq (I+S_\alpha)AX \geq 0$$
$$\Rightarrow \overline{A}_1 X \geq A_\alpha X$$

به همین ترتیب خواهیم داشت: $\overline{A}_5 X \geq \overline{A}_4 X \geq \overline{A}_3 X \geq \overline{A}_2 X \geq \overline{A}_1 X \geq A_\alpha X$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\rho(\overline{M}_1^{-1}\overline{N}_1)X = \overline{M}_1^{-1}\overline{N}_1 X = X - \overline{M}_1^{-1}\overline{A}_1 X$$
$$\leq X - \overline{M}_1^{-1}A_\alpha X \leq X - M_\alpha^{-1}A_\alpha X$$
$$= (I - M_\alpha^{-1}A_\alpha)X = M_\alpha^{-1}N_\alpha X$$

در نتیجه بنا به لم ۳، خواهیم داشت: $\rho(\overline{M}_1^{-1}\overline{N}_1) \leq \rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha)$

با استدلال مشابه خواهیم داشت:

$$\rho(\overline{M}_5^{-1}\overline{N}_5) \leq \rho(\overline{M}_4^{-1}\overline{N}_4) \leq \rho(\overline{M}_3^{-1}\overline{N}_3) \leq \rho(\overline{M}_2^{-1}\overline{N}_2) \leq \rho(\overline{M}_1^{-1}\overline{N}_1)$$

همچنین با توجه به قضیه ۲، داریم: $\rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha) \leq \rho(L_{r,w}) < 1$

و حکم برقرار خواهد بود. ■

در ادامه آنالیز همگرایی روش AOR پیش شرط سازی شده را برای H- ماتریس ها بررسی می کنیم:

H- ماتریس ها در مباحث علمی متنوعی از جمله در حل عددی معادلات دیفرانسیل، درتحقیق در عملیات در حل مسایل مکمل خطی(LCP) با روش تکراری، در اقتصاد در مدل های رشد، در احتمالات در زنجیر مارکفی،

همچنین در مسایل فیزیک وشیمی وحتی مسایل بیولوژی کاربرد دارد. با توجه به اهمیت کاربردی آن ها، طبیعی است که عملکرد پیش شرط سازی را برای این رده از ماتریس ها مورد مطالعه قرار دهیم.

قضیه۳

فرض کنید $L_{r,w}$ ماتریس های تکرار(۱۲) و $\hat{L}_{r,w}$ماتریس تکرار پیش شرط سازی شده یکی از پیش شرط های (10,9,8,7,6) از روش AOR باشند. اگر ماتریس A از دستگاه خطی (۱) یک H- ماتریس و $0 \le r \le w \le 1$ $w \ne 0, r \ne 1$ و شرایط برای مثبت بودن درایه های قطری ماتریس پیش شرط سازی شده برقرار باشد خواهیم داشت: $\rho(\hat{L}_{r,w}) \le \rho(\langle \hat{L}_{r,w} \rangle) \le \rho(\langle L_{r,w} \rangle) < 1$

اثبات: فرض A، H- ماتریس باشد. پس $\langle A \rangle$، M- ماتریس و بنا به لم۲، $\rho(\langle L_{r,w} \rangle) < 1$ و از آن با توجه به قضیه ۲، داریم: $\rho(\langle \hat{L}_{r,w} \rangle) \le \rho(\langle L_{r,w} \rangle)$

حال برای اثبات نامساوی دیگر، ابتدا ثابت می کنیم که $\overline{A}$، H- همساز است.

می دانیم در روش AOR

$$\overline{A} = \overline{M} - \overline{N}$$

$$\overline{M} = \frac{1}{w}[\overline{D} - r\overline{L}], \quad \overline{N} = \frac{1}{w}[(1-w)\overline{D} + (w-r)\overline{L} + w\overline{U}]$$

حال H- همساز بودن آن را به ترتیب در قسمت های قطری و بالا مثلثی وپایین مثلثی اکید بررسی می کنیم.

$$\xrightarrow{i=j} \begin{cases} (\overline{M})_{ii} = \frac{1}{w}[\overline{D}], \quad (\overline{N})_{ii} = \frac{1}{w}[(1-w)\overline{D}] \\ \Rightarrow \left|\overline{D}\right| = \langle \overline{A} \rangle_{ii} = \langle \overline{M} \rangle_{ii} - \left|(\overline{N})_{ii}\right| = \frac{1}{w}\left|\overline{D}\right| - \frac{1-w}{w}\left|\overline{D}\right| = \left|\overline{D}\right| \end{cases}$$

$$\xrightarrow{i>j} \begin{cases} (\overline{M})_{ik} = \frac{1}{w}[-r\overline{L}], \quad (\overline{N})_{ik} = \frac{1}{w}[(w-r)\overline{L}] \\ \Rightarrow -\left|\pm \overline{L}\right| = \langle \overline{A} \rangle_{iK} = \langle \overline{M} \rangle_{ik} - \left|(\overline{N})_{ik}\right| = \frac{-r}{w}\left|-\overline{L}\right| - \frac{w-r}{w}\left|\overline{L}\right| = -\left|\overline{L}\right| \end{cases}$$

$$\xrightarrow{i<j} \begin{cases} (\overline{M})_{ik} = 0, \quad (\overline{N})_{ik} = \frac{1}{w}[w\overline{U}] \\ \Rightarrow -\left|\pm \overline{U}\right| = \langle \overline{A} \rangle_{iK} = \langle \overline{M} \rangle_{ik} - \left|(\overline{N})_{ik}\right| = 0 - \left|\overline{U}\right| = -\left|\overline{U}\right| \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت: $\langle \overline{A} \rangle = \langle \overline{M} \rangle - \left|\overline{N}\right| \to \langle \overline{L}_{r,w} \rangle = \langle \overline{M} \rangle^{-1} \left|\overline{N}\right|$

پس، با توجه به لم ۴، داریم:

$$\rho(\overline{M}^{-1}\overline{N}) \le \rho(\left|\overline{M}^{-1}\overline{N}\right|) \le \rho(\left|\overline{M}^{-1}\right|\left|\overline{N}\right|) \le \rho(\langle \widetilde{M} \rangle^{-1}\left|\widetilde{N}\right|) = \rho(\langle \overline{L}_{r,w} \rangle)$$

و حکم برقرار است. ■

نتیجه ۱ با انتخاب پارامترهای مناسب در روش AOR، روش های تکراری دیگری به دست می آید که نتایج به دست آمده در این مطالعه را می توان برای آن ها نیز تعمیم داد به عنوان مثال:

۱ روش ژاکوبی با r=0،w=1

۲ روش JOR(Jacobi Overrelaxation)، با r=0

۳ روش گاوس-سایدل با r = w= 1

۴ روش SOR با r = w

۵ مثال عددی

در این قسمت با مثال، نتایج به دست آمده در بخش های قبلی را، مشاهده می کنیم.

مثال۱ [۱۲]: ماتریس ضرایب A رابه صورت زیر می سازیم:

$$A = (a_{i,j})_{n\times n} = \begin{cases} 1 & if \quad i = j \\ \dfrac{-1}{i+2j} & if \quad i \neq j \end{cases}$$

جدول زیر شعاع های طیفی مربوط به ماتریس های تکرار دستگاه های پیش شرط سازی شده با پارامترهای مختلف را نشان می دهد. $\rho(L_{R,W})$ شعاع طیفی ماتریس تکرار دستگاه پیش شرط سازی شده (Gunawardena) است. $\rho(S_i)$ نیز نشان دهنده شعاع طیفی ماتریس تکرار AOR پیش شرط سازی شده توسط پیش شرط ساز iام است. دردستگاه های پیش شرط سازی شده مقدار پارامترها را $k_i, \alpha_i, t = 1$ انتخاب کردیم.

N	w	r	$\rho(L_{r,w})$	$\rho(L_{R,W})$	$\rho(S_1)$	$\rho(S_2)$	$\rho(S_4)$	$\rho(S_5)$
8	1	0	.6470	.6028	.5999	.5875	.5845	.5170
	.9	.7	.5794	.5184	.5137	.5035	.5001	.4410
	.9	.8	.5558	.4886	.4832	.4735	.4699	.4119
	1	1	.4341	.3333	.3241	.3151	.3100	.2492

نتیجه گیری

در این مقاله، بعضی از پیش شرط سازهای کلاس (I+S) را بر اساس روش تکراری AOR مورد مطالعه قرار دادیم. درطول این مقاله فرض کردیم که ماتریس ضرایب دستگاه خطی Z- ماتریس و یا M- ماتریس و یا H- ماتریس باشد. نشان دادیم که دستگاه پیش شرط سازی شده در این حالات نسبت به حالت پایه دارای نرخ همگرایی بهتراست. همچنین ثابت کردیم که در این شرایط مدل های پیش شرطی ارایه شده توسط ما نسبت به دیگر مدل های این کلاس دارای شرایط طیفی مطلوب تری می باشد.

منابع

[1] R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, second ed. , Springer, Berlin, 2000.

[2] A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic, New York, 1979.

[3] A. Gunawardena, S. Jain, L. Snyder, Modified iterative methods for consistent linear systems, Linear Algebra Appl. 154/156 (1991)123–143.

[4] A. Hadjidimos, Accelerated overrelaxation method, Math. Comput. 32 (1978) 149–157.

[5] T. Kohno, H. Kotakemori, Improving the modified Gauss–Seidel method for Z-matrices, Linear Algebra Appl. 267 (1997) 113–123.

[6] M. Neumann, R. J. Plemmons, Convergence of parallel multisplitting iterative methods for M-matrix, Linear Algebra Appl. 88/89 (1987) 559–573.

[7] L. Y. Sun, Some extensions of the improved modified Gauss–Seidel iterative method for H-matrix, Numer. Linear Algebr. 13 (2006) 869–876.

[8] A. Frommer, D. B. Szyld, H-splitting and two-stage iterative methods, Numer. Math. 63 (1992) 345–356.

[9] W. Li, W. W. Sun, Modified Gauss–Seidel type methods and Jacobi type methods for Z-matrices, Linear Algebra Appl 2000;317: 227–240.

[10] I. Marek, D. B. Szyld, Comparison theorems for weak splittings of bounded operators, Numer. Math. 58 (1990) 387–397.

[11] I. WO´ZNICKI, MATRIX SPLITTING PRINCIPLES, IJMMS 28:5 (2001) 251–284, PII. S0161171201007062 http://ijmms. hindawi. com. Hindawi Publishing Corp

[12] H. Saberi Najafi,S. Kordrostami,S. A. Edalatpanah, New preconditions for solving linear systems, Numer. Linear Algebr. in press