بهبود روش تجزیه آدومین برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

علیرضا وحیدی* قاسم اسعدی کردشولی[۲] مسعود امان‌زاده [۳]
گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهری
گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهری
گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

چکیده
در روش تجزیه آدومین برای یافتن تقریبی از جواب معادله دیفرانسیل به‌صورت یک چند جمله‌ای، از بسط تیلور تابع معلوم موجود در معادله، حول نقطه ی ابتدای بازه استفاده می‌کنند. این امر سبب می‌شود جواب تقریبی حاصل در نقاط انتهایی نسبت به نقاط ابتدایی بازه از دقت کمتری برخوردار باشد. در این مقاله دو روش برای رفع این مشکل و تصحیح روش تجزیه ارایه شده و نتایج عددی توسط دو مثال برای معادلات دیفرانسیل خطی وغیر خطی مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل معمولی، روش تجزیه آدومین، بسط تیلور.

۱ مقدمه
یکی از روش‌های عددی که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته ودر حل انواع معادلات تابعی از جمله معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، معادلات انتگرو دیفرانسیل و غیره کار برد دارد روش تجزیه آدومین است [۱,۲]، که توسط او در سال ۱۹۸۰ معرفی شد. در این روش جواب معادله به صورت یک سری نامتناهی در نظر گرفته می‌شود که غالباً به جواب واقعی معادله همگرا ست [۳و۴] .

یکی از پر اهمیت‌ترین تفاوت‌های روش تجزیه با سایر روش‌های عددی برای یافتن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل این است که می‌توان در این روش جواب را به‌صورت یک چند جمله‌ای محاسبه کرد. برای این منظور از بسط تیلور تابع معلوم حول نقطه ابتدای بازه استفاده می‌شود. از آن جایی که بسط تیلور فقط در نقطه بسط داده شده یعنی نقطه ابتدای بازه دقیق است و هر چه از این نقطه دور شویم از دقت آن کاسته می‌شود [5] لذا جواب تقریبی که از روش تجزیه به‌دست می‌آید نیز دارای این نقص می‌باشد. در این مقاله قصد داریم برای تابع معلوم، از تقریب‌های مناسب‌تری نسبت به بسط تیلور حول نقطه‌ی ابتدای بازه استفاده و تاثیر این جایگزینی بر جواب روش تجزیه را بررسی کنیم. برای این کار دو روش پیشنهاد شده است. در روش اول از بسط تیلور حول نقطه‌ی

* عهده دار مکاتبات

Email address: alrevahidi@yahoo.com
Email address: ghascor@yahoo.com
Email address: addresses addresses @yahoo.com

میانی بازه استفاده می‌شود و در روش دوم بازه‌ی داده شده را به چند زیر بازه افراز و روش تجزیه را در هر یک از زیر بازه‌ها به‌کار می بریم.

۲ روش تجزیه آدومین برای حل معادله دیفرانسیل معمولی

معادله دیفرانسیل مرتبه nام زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &y^{(n)} = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \quad a \le t \le b \\ &y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}. \end{aligned} \qquad (۱)$$

برای یافتن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل فوق با استفاده از روش تجزیه، آن را به‌صورت $Ly(t) + Ry(t) + Ny(t) = g(t)$ در نظر بگیرید، که در آن $L = \frac{d^n}{d^n t}(\cdot)$، R جملات خطی، N جملات غیرخطی و g تابعی معلوم از t است. با استفاده از عملگر معکوس $L^{-1} = \int_a^t \int_a^t \ldots \int_a^t (\cdot) dt \ldots dt$ داریم

$$y(t) = f(t) - L^{-1}Ry(t) - L^{-1}Ny(t). \qquad (۲)$$

که درآن $f(t)$ حاصل تاثیر عملگر معکوس بر $g(t)$ و شرایط اولیه داده شده است. فرض کنید که تابع جواب به‌صورت $y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i(t)$ و جمله غیر خطی به صورت $Ny(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i$ است که در آن A_iها چندجمله‌ای‌هایی بر حسب y_0، y_1، y_2، ... هستند که به چند جمله‌ای‌های آدومین معروفند و از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} N\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \lambda^n\right)\right)_{\lambda=0} \qquad (۳)$$

در این صورت از رابطه (۲) داریم

$$\sum_{i=0}^{+\infty} y_i(t) = f(t) - L^{-1}R\left(\sum_{i=0}^{+\infty} y_i(t)\right) - L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \qquad (۴)$$

و مولفه‌های y_0، y_1، y_2، ... با توجه به (۴) از رابطه بازگشتی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &y_0(t) = f(t), \\ &y_{k+1}(t) = -L^{-1}R\, y_k(t) - L^{-1}A_K \quad , \quad k \ge 0. \end{aligned} \qquad (۵)$$

با مشخص بودن y_0، y_1، y_2، ... تقریب n جمله‌ای $\varphi_n(t)$ را برای جواب $y(t)$ چنین تعریف می‌کنیم

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t), \quad \text{به طوری که} \quad y(t) = \lim_{n \to +\infty} \phi_n(t). \qquad (۶)$$

۳ روش‌های پیشنهادی

۳-۱ بسط تیلور حول نقطه ی میانی بازه

در این روش به‌جای استفاده از بسط تیلور تابع $g(t)$ حول نقطه $t=a$ از بسط تیلور تابع $g(t)$ حول نقطه میانی بازه یعنی $t=\frac{a+b}{۲}$ استفاده می‌شود.

۳-۲ افراز بازه

فرض کنید $a\le t\le b$، $g(t)$ تابع معلوم موجود در معادله دیفرانسیل باشد. هدف این است که با استفاده از بسط تیلور تقریب یکنواختی برای $g(t)$ در این بازه ارایه شود. برای این منظور بازه فوق به دو یا چند زیر بازه افراز و در هر زیر بازه از بسط تیلور حول نقطه ابتدای بازه استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال بازه‌ی $[a,b]$ را به دو زیر بازه به‌صورت $\left[a,\frac{a+b}{۲}\right)$ و $\left[\frac{a+b}{۲},b\right]$ افراز و در هر یک از زیر بازه‌ها بسط تیلور را به‌کار می‌بریم. بنابراین چند جمله‌ای $P(t)$ به‌عنوان تقریبی برای $g(t)$ در بازه $[a,b]$ به صورت زیر خواهد بود:

$$P(t)=\begin{cases} P_1(t) & a\le t<\dfrac{a+b}{2} \\ P_2(t) & \dfrac{a+b}{2}\le t\le b \end{cases}$$

که در آن $p_۱(t)$ و $p_۲(t)$ چند جمله‌ای‌های حاصل از بسط تیلور در زیر بازه‌ها می‌باشند. $p_۱(t)$ چند جمله‌ای حاصل از بسط حول نقطه $t=a$ و $p_۲(t)$ چند جمله‌ای حاصل از بسط حول نقطه $t=\frac{a+b}{۲}$ است.

اکنون معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید. با افراز بازه داده شده به دو زیر بازه $\left[a,\frac{a+b}{۲}\right)$ و $\left[\frac{a+b}{۲},b\right]$ این معادله به دو معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} &y^{(n)}=F(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(n-1)}(t)),\quad a\le t<\frac{a+b}{2} \\ &y(a)=\alpha_{\circ},y'(a)=\alpha_1,\dots,y^{(n-1)}(a)=\alpha_{n-1}. \end{aligned} \tag{۷}$$

و

$$\begin{aligned} &y^{(n)}=F(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(n-1)}(t)),\quad \frac{a+b}{2}\le t\le b \\ &y\left(\frac{a+b}{2}\right)=\bar{\alpha}_{\circ},y'\left(\frac{a+b}{2}\right)=\bar{\alpha}_1,\dots,y^{(n-1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\bar{\alpha}_{n-1}. \end{aligned} \tag{۸}$$

با به‌کار بردن روش تجزیه برای معادله (۷) و با استفاده از جواب تقریبی آن که به صورت یک چند جمله‌ای است، مقدار $\bar{\alpha}_{\circ}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست می‌آوریم و هم چنین برای یافتن مقادیر $\bar{\alpha}_1$ ، ... ، $\bar{\alpha}_{n-1}$ می‌توان از

چند جمله‌ای جواب معادله (۷) مشتق گرفت. به این ترتیب با داشتن شرایط اولیه‌ی معادله دیفرانسیل (۸) می‌توان روش تجزیه را برای حل آن به‌کار برد.

٤ مثال‌های عددی

مثال ۱ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y'(t) = y(t) + \frac{e^t}{t}, \; y(1) = 0, \quad 1 \le t \le 2 \tag{۹}$$

را در نظر بگیرید که دارای جواب دقیق $y(t) = e^t Lnt$ است. برای یافتن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل (۹) با استفاده از روش تجزیه فرض کنید $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$. بنابراین $L^{-1} = \int_1^t (\cdot)dt$ که با اعمال آن روی (۹) داریم:

$$Ly(t) = y(t) + \frac{e^t}{t} \quad , \tag{۱۰}$$

$$y(t) = L^{-1} y(t) + L^{-1} \frac{e^t}{t} \; ,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = y(1) + \int_1^t \sum_{i=0}^{\infty} y_i dt + \int_1^t \frac{e^t}{t} dt,$$

با توجه به رابطه اخیر مولفه‌های y_0، y_1، y_2، ... به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$y_0(t) = y(1) + \int_1^t \frac{e^t}{t} dt, \tag{۱۱}$$

$$y_{i+1}(t) = \int_1^t y_i(t) dt, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{۱۲}$$

با استفاده از چهار جمله ی بسط تیلور تابع $\frac{e^t}{t}$ حول نقطه $t_0 = 1$

$$\frac{e^t}{t} \approx \frac{53\,e}{24} - \frac{7e}{2}t + \frac{15\,e}{4}t^2 - \frac{11\,e}{6}t^3 + \frac{3\,e}{8}t^4 \tag{۱۳}$$

با جای گذاری (۱۳) در (۱۱) داریم

$$y_0(t) = y(1) + \int_1^t \left(\frac{53e}{24} - \frac{7e}{2}t + \frac{15e}{4}t^2 - \frac{11e}{6}t^3 + \frac{3e}{8}t^4 \right) dt \tag{۱۴}$$

$$= -\frac{53e}{40} + \frac{53et}{24} - \frac{7et^2}{4} + \frac{5et^3}{4} - \frac{11et^4}{24} + \frac{3et^5}{40}$$

و با استفاده از (۱۲)، مولفه‌های y_0، y_1، y_2، ... به صورت زیر به دست می آیند:

$$y_1(t) = \int_1^t y_0(t) dt = \int_1^t \left(-\frac{53\,e}{40} + \frac{53\,et}{24} - \frac{7et^2}{4} + \frac{5et^3}{4} - \frac{11et^4}{24} + \frac{3et^5}{40} \right) dt$$

$$= \frac{137\,e}{240} - \frac{53\,et}{40} + \frac{53\,et^2}{48} - \frac{7et^3}{12} + \frac{5et^4}{16} - \frac{11et^5}{120} + \frac{et^6}{80}$$

$$\vdots$$

با محاسبه هفت جمله اول سری (۶)، جواب تقریبی مثال ۱ به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \varphi_{۷}(t) \\ &= y_{۰}(t)+\ldots+y_{۶}(t) = -\frac{۸۹۵۵۷۴۳e}{۹۹۷۹۲۰۰}+\frac{۴۷۵۷۶۹۹et}{۳۶۲۸۸۰۰}-\frac{۱۴۷۱۹et^{۲}}{۱۳۴۴۰}+\ldots+\frac{et^{۱۱}}{۴۴۳۵۲۰۰}. \end{aligned} \quad (۱۵)$$

روش پیشنهادی اول

به جای استفاده از بسط تیلور تابع $\frac{e^t}{t}$ حول نقطه ی $t=۱$، از بسط حول نقطه $t=۱/۵$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{e^t}{t} \approx ۴/۳۶۴۹۸ - ۴/۰۴۵۹۷t + ۳/۲۵۷۵۲t^{۲} - ۱/۰۲۳۶t^{۳} + ۰/۱۶۱۳۷۸t^{۴} \quad (۱۶)$$

با قرار دادن (۱۶) به‌جای تابع معلوم در (۱۱) و روندی مشابه جواب تقریبی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} y(t) \approx \varphi_{۷}(t) &= y_{۰}(t)+y_{۱}(t)+\ldots+y_{۶}(t) \\ &= -۲/۱۱۰۸۷ + ۲/۲۵۴۶۶\,t - ۰/۸۹۷۵۷\,t^{۲} + \ldots + ۹/۷۰۲۸۴\times۱۰^{-۸}\,t^{۱۱} \end{aligned} \quad (۱۷)$$

روش پیشنهادی دوم

با افراز بازه ی [۲و۱] به دو زیر بازه $[۱,۱/۵)$ و $[۱/۵,۲]$ ، معادله دیفرانسیل (۷) به دو معادله دیفرانسیل به‌صورت:

$$y'(t) = y(t)+\frac{e^t}{t} \;, y(۱)=۰\,, \quad ۱\le t<۱/۵, \quad (۱۸)$$

و

$$y'(t) = y(t)+\frac{e^t}{t} \;, y(۱/۵)=\alpha_{۰}\,, \quad ۱/۵\le t\le ۲. \quad (۱۹)$$

تبدیل می‌شود.

ابتدا جواب تقریبی معادله (۱۸) را در بازه $[۱,۱/۵)$ توسط روش تجزیه به‌دست می‌آوریم. پاسخ این معادله به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{۷}(t) &= y_{۰}(t)+y_{۱}(t)+\ldots+y_{۶}(t) \\ &= -\frac{۸۹۵۵۷۴۳e}{۹۹۷۹۲۰۰}+\frac{۴۷۵۷۶۹۹et}{۳۶۲۸۸۰۰}-\frac{۱۴۷۱۹et^{۲}}{۱۳۴۴۰}+\ldots+\frac{et^{۱۱}}{۴۴۳۵۲۰۰}. \end{aligned} \quad (۲۰)$$

حال معادله (۱۹) رابر بازه $[۱/۵,۲]$ در نظر بگیرید. برای حل معادله در این بازه لازم است که مقدار $y(۱/۵)=\alpha_{۰}$ را تعیین کنیم. مقدار $\alpha_{۰}$ را با استفاده از جواب تقریبی جواب به‌دست آمده در بازه قبلی یعنی $[۱,۱/۵)$، از $\overline{\varphi}_{۷}(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\alpha_{۰} = y(۱/۵) \approx \overline{\varphi}_{۷}(۱/۵) = ۱/۸۱۹۱۳$$

اکنون می‌توان روش تجزیه را برای معادله (۱۹) به‌کار برد. با محاسبه هفت جمله اول جواب تقریبی در بازه دوم به‌صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{\varphi}_{۷}(t) = y_{۰}(t) + y_{۱}(t) + \ldots + y_{۶}(t)$$
$$= -۲/۱۰۶۶۴ + ۲/۲۳۹۲۴t + \ldots + ۹/۷۰۲۲۸۴ \times ۱۰^{-۸}\, t^{۱۱} \qquad (۲۱)$$

بنابراین جواب حاصل از روش دوم به‌صورت زیر است

$$\varphi_{۷}(t) = \begin{cases} \overline{\varphi}_{۷}(t), & ۱ \le t < ۱/۵ \\ \tilde{\varphi}_{۷}(t), & ۱/۵ \le t \le ۲ \end{cases} \qquad (۲۲)$$

خطای مطلق روش تجزیه ور روش‌های اول و دوم محاسبه و در جدول ۱ ارایه شده‌اند.

t	خطای روش تجزیه	خطای روش اول	خطای روش دوم
۱	۰	۰	۰
۱/۱	$۱/۵۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۲/۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۵۵ \times ۱۰^{-۷}$
۱/۲	$۹/۳۴ \times ۱۰^{-۶}$	$۳/۴۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۳۴ \times ۱۰^{-۶}$
۱/۳	$۱/۰۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۸۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۰۰ \times ۱۰^{-۴}$
۱/۴	$۵/۳۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۳۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۳۸ \times ۱۰^{-۴}$
۱/۵	$۱/۹۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۹۶ \times ۱۰^{-۳}$
۱/۶	$۵/۶۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۲۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۱۶ \times ۱۰^{-۳}$
۱/۷	$۱/۳۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۵/۸۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۳۹ \times ۱۰^{-۳}$
۱/۸	$۲/۹۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۶/۴۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۶۵ \times ۱۰^{-۳}$
۱/۹	$۵/۷۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۶/۹۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۹۷ \times ۱۰^{-۳}$
۲	$۱/۰۵ \times ۱۰^{-۱}$	$۶/۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۴۰ \times ۱۰^{-۳}$

جدول ۱: خطای مطلق حاصل از روش تجزیه و روش‌های پیشنهادی در مثال ۱

مثال ۲ مساله مقدار اولیه غیر خطی

$$y'(t) = \frac{۱}{t^{۲}} - \frac{y(t)}{t} - y^{۲}(t), \quad y(۱) = -۱, \quad ۱ \le t \le ۲. \qquad (۲۳)$$

را در نظر بگیرید. جواب تحلیلی این معادله $y(t) = -\frac{۱}{t}$ است.

این معادله را با روش تجزیه و روش‌های پیشنهادی حل و جواب‌ها را مقایسه می‌کنیم. با به کارگیری روش تجزیه داریم

$$y_{۰} = -۱ + \int_{۱}^{t} \frac{۱}{t^{۲}}\, dt,$$
$$y_{۱} = -\int_{۱}^{t} \frac{۱}{t} y_{۰}\, dt - \int_{۱}^{t} A_{۰}\, dt,$$
$$y_{i+۱} = -\int_{۱}^{t} \frac{y_i}{t}\, dt - \int_{۱}^{t} A_i\, dt, \quad i = ۱,۲,\ldots \qquad (۲۴)$$

اکنون با استفاده از بسط تیلور مرتبه چهار حول نقطه $t=1$، برای توابع $\frac{1}{t^2}$ و $\frac{1}{t}$

(۲۵)

$$\frac{1}{t^2} \approx 15-40t+45t^2-24t^3+5t^4$$

و

(۲۶)

$$\frac{1}{t} \approx 5-10t+10t^2-5t^3+t^4$$

و با توجه به رابطه (۲۴) داریم

$$y_0=-1+\int_1^t (15-40t+45t^2-24t^3+5t^4)dt=-6+15t-20t^2+15t^3-6t^4+t^5$$

$$y_1=-\int_1^t (5-10t+10t^2-5t^3+t^4)y_0 dt-\int_1^t y_0^2 dt=0/7365-6t+22/5t^2-\ldots-0/0909091t^{11}$$

$$\vdots$$

با ادامه این روند تقریب چهار جمله‌ای زیر حاصل می‌شود.

$$y(t)=\varphi_4(t)=y_0+y_1+y_2+y_3=-5/4664+10/4634t+1/0989t^2-\ldots-0/0012t^{23}$$

با استفاده از روش‌های پیشنهادی اول و دوم و بر اساس آنچه در مثال یک اعمال شد معادله (۲۳) را حل کرده ونتایج حاصل از مقایسه با جواب دقیق $y(t)=-\frac{1}{t}$ را در جدول(۲) خلاصه می کنیم.

t	خطای روش تجزیه	خطای روش اول	خطای روش دوم
۱	۰	۰	۰
۱/۱	$1/06\times10^{-6}$	$1/35\times10^{-3}$	$1/06\times10^{-6}$
۱/۲	$6/26\times10^{-5}$	$1/82\times10^{-3}$	$6/26\times10^{-5}$
۱/۳	$6/60\times10^{-4}$	$2/04\times10^{-3}$	$6/60\times10^{-4}$
۱/۴	$3/45\times10^{-3}$	$2/20\times10^{-3}$	$3/45\times10^{-3}$
۱/۵	$1/23\times10^{-2}$	$2/35\times10^{-3}$	$7/20\times10^{-4}$
۱/۶	$3/44\times10^{-2}$	$2/51\times10^{-3}$	$7/68\times10^{-4}$
۱/۷	$8/14\times10^{-2}$	$2/66\times10^{-3}$	$8/20\times10^{-4}$
۱/۸	$1/69\times10^{-1}$	$2/77\times10^{-3}$	$9/06\times10^{-4}$
۱/۹	$3/17\times10^{-1}$	$2/75\times10^{-3}$	$1/13\times10^{-3}$
۲	$5/44\times10^{-1}$	$2/31\times10^{-3}$	$1/76\times10^{-3}$

جدول۲: خطای مطلق حاصل از روش تجزیه و روش های پیشنهادی در مثال ۲

نتیجه گیری

نتایج عددی نشان می‌دهند که اگر در روش تجزیه به‌جای استفاده از بسط تیلور حول نقطه ابتدای بازه برای تابع معلوم، از چند جمله‌ای‌های یکنواخت‌تری استفاده کنیم آن‌گاه جوابی که از روش تجزیه حاصل می‌شود یکنواخت‌تر خواهد بود. به‌عبارت دیگر دقیق بودن چند جمله‌ایی که به‌عنوان تقریب برای تابع معلوم به‌کار می‌بریم ارتباط مستقیمی با دقت جواب تقریبی حاصل از روش تجزیه دارد.

منابع

[1] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
[2] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics, Kluwer , Dordrecht, 1989.
[3] Y. Cherruault, Convergence of Adomian s method, Kybernets 18 (2) (1989) 31–39.
[4] Y. Cherruault, and G.Adomian, Decomposition methods: A New Proof of convergence, Math. Copmut. Modelling 18 (12), 103-106, (1993).
[5] Richard L. Burdan, J. Dauglas Faires, Numreical Analysis, Seventh Edition, Brooks /Cole, 2001.